I Concurso de Acertijos Matemáticos

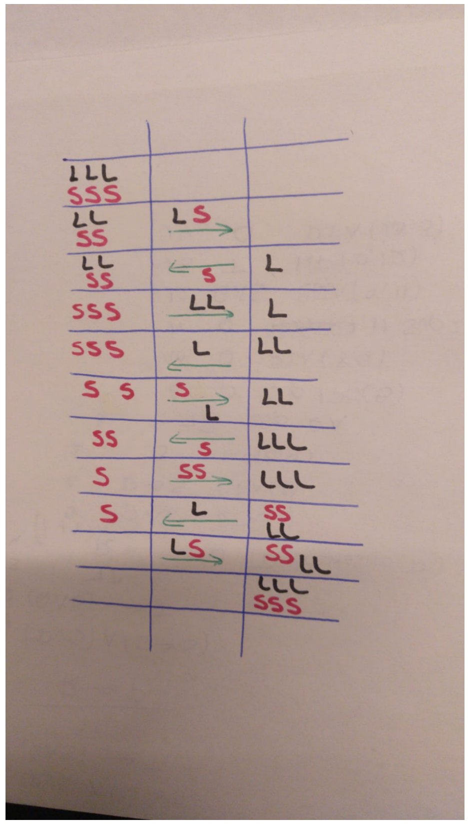
Problema 1. Tres miembros de la casa Stark y tres miembros de la casa Lannister desean cruzar el Mar Angosto que separa Rocadragón de Desembarco del Rey, pero sólo tienen una barca perteneciente a la Flota de Hierro con capacidad para 2 personas. El problema es que si en cualquiera de las orillas hay más Stark que Lannister se producirá una batalla en la que morirán los Lannister. Del mismo modo, si los Lannister superan en número a los Stark, estos últimos acabarían pereciendo fruto de la batalla.

¿Es posible que crucen el Mar Angosto sin que haya ningún asesinato? En dicho caso, ¿cómo sería?

Figura 1: Casa Lannister

Figura 2: Casa Stark

Solución: Una imagen vale más que mil palabras.



Por lo que es posible que crucen el Mar Angosto sin que haya ningún asesinato.

Problema 2. Cuatro amigas se van de vacaciones a un punto cardinal diferente: Almudena dice: “Beatriz se irá al Norte y Diana no irá al Este”. Beatriz dice: “Yo iré al Norte y Carlota no irá al Oeste”. Carlota afirma: “Beatriz irá al Este y Diana al Oeste”. Diana, por último, declara: “Almudena se va al Sur y Carlota al Este”.

Cada una de las amigas dice una verdad y una mentira. ¿A dónde irán Almudena y Beatriz?

Solución: Utilizaremos las letras A, B, C, D para referirnos a Almudena, Beatriz, Carlota y Diana a lo largo del problema.

Supongamos que B va al Norte. Por tanto, D va al Este. Pero en este caso Carlota estaría diciendo 2 mentiras. Por lo tanto B no va al Norte, D no va al Este y C no va al Oeste.

Supongamos ahora que B va al Este. Por tanto D no puede ir al Oeste porque si no Carlota diría 2 verdades y C tampoco puede ir al Este porque ya va B al Este. Si nos fijamos ahora en lo que dice Diana, como C no va al Este, su verdad debe de ser que A vaya al Sur, pero en ese caso B y C tendrían que ir ambos al Norte, contradicción.

Por lo tanto, resumiendo, obtenemos finalmente que B va al Sur y A va al norte.

Problema 3. Halla tres números naturales a,b y c, de forma que:

$$5^a - 5^b - 5^c = 12475.$$

Solución: Vamos a tener en cuenta las siguientes descomposiciones factoriales: $12475 = 5^2 \cdot 499$ y $500 = 5^3 \cdot 2^2$.

$$\begin{aligned} 5^a - 5^b - 5^c &= 12475 \\ 5^c(5^{a-c} - 5^{b-c} - 1) &= 12475 \\ 5^c(5^{a-c} - 5^{b-c} - 1) &= 5^2 \cdot 499 \end{aligned}$$

Así, tenemos que $c = 2$. Vamos a repetir el argumento.

$$\begin{aligned} 5^{a-2} - 5^{b-2} - 1 &= 499 \\ 5^{a-2} - 5^{b-2} &= 500 \\ 5^{-2}(5^a - 5^b) &= 5^3 \cdot 2^2 \\ 5^a - 5^b &= 5^2 \cdot 5^3 \cdot 2^2 \\ 5^b(5^{a-b} - 1) &= 5^5 \cdot 2^2 \end{aligned}$$

Llegamos a que $b = 5$ y resolvemos la siguiente ecuación para a:

$$\begin{aligned} 5^{a-5} - 1 &= 2^2 \\ 5^{a-5} &= 5 \\ a - 5 &= 1 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Concluimos que una solución es: $a = 6, b = 5, c = 2$. Sin embargo, también existe otra solución intercambiando el papel de la b por el de la c: $a = 6, b = 2, c = 5$.

Problema 4. El día 12 de mayo, (día del mes: 12, mes: 05) es el día escolar de las matemáticas. Pero este día, no es un día cualquiera. El día del mes es mayor que el mes y, además, ocurre lo siguiente:

- Si sumas el día del mes y el mes, resulta un número primo:

$$12 + 5 = 17 \text{ (primo)}.$$

  Si restas al día del mes, el mes, da un número primo:

$$12 - 5 = 7 \text{ (primo)}.$$

- Si sumas los cuadrados del día del mes y del mes, se obtiene un cuadrado perfecto:

$$12^2 + 5^2 = 13^2$$

¿Qué otros días del año cumplen tales casualidades?

Figura 3: La fecha elegida para esta celebración, 12 de mayo, coincide con la del nacimiento del insigne matemático Pere Puig Adam, que fue el iniciador de la didáctica de las matemáticas en nuestro país.

Solución: Notemos que la condición más restrictiva es que nos habla de los cuadrados perfectos, así que solo debemos fijarnos en las ternas pitagóricas primitivas, ya que si tuviesen algún divisor en común no verificarían la condición de que se resta o suma fuese un número primo. Por tanto solo tenemos los siguientes posibilidades:

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 5^2 + 12^2 &= 13^2 \\ 7^2 + 24^2 &= 25^2 \\ 8^2 + 15^2 &= 17^2. \end{aligned}$$

De estos 4 pares notemos que sólo los 3 últimos verifican el resto de condiciones y así obtenemos los siguientes días aplicando la condición de que el día sea mayor que el mes:

4 de marzo, 12 de mayo, 24 de julio y 15 de agosto.

Problema 5. ¿Puede el cuadrado de un número entero terminar en tres cifras idénticas, por supuesto, diferentes de 0? ¿Cuál es el menor número que lo cumple?

Solución: El primer paso es darse cuenta que un cuadrado solo puede terminar en 1,4,5,6 o 9.

Después nos debemos fijar en que el cuadrado de un número será múltiplo de 4 si el número es par o será un múltiplo de 4 más 1 si el número es impar. Así que la única posibilidad es que acabe en 44.

Ahora notemos que el 444 no es un cuadrado perfecto, pero que sí lo es el 1444.En particular,

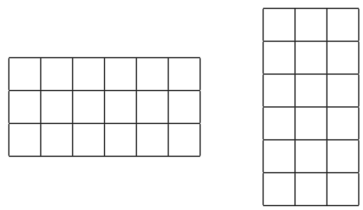
$$38^2 = 1444$$

Problema 6. Desentraña el siguiente mensaje cifrado cuya clave está en sus factores:

$$EELAOAUKOSGDRAHLRO$$

Solución: Notemos que nos dice que la clave está en los factores, como la longitud de la palabra es 18, pensamos en 1×18, 2×9, 3×6.

Ahora podemos pensar en representar el 18 como producto de sus factores en una rejilla de la siguiente forma



Además de otras posibles distribuciones, escribiendo el mensaje en horizontal obtenemos el siguiente resultado.

E	E	L	A	O	A
U	K	O	S	G	D
R	A	H	L	R	O

Ahora, leyendo en vertical, obtenemos el mensaje cifrado:

EUREKA LO HAS LOGRADO