

SISTEMAS DINÁMICOS: DE LOS ÁTOMOS AL SISTEMA SOLAR

MANUEL IÑARREA¹, WAFAA KANAAN²,
VÍCTOR LANCHARES³, ANA ISABEL PASCUAL³,
JOSÉ PABLO SALAS¹

RESUMEN

Un átomo de Rydberg es un átomo sobredimensionado debido a que uno o dos de sus electrones son excitados hasta alcanzar niveles muy altos de energía, lejos del núcleo atómico. En estas condiciones, los electrones pueden verse como pequeños planetas orbitando alrededor del núcleo, como si se tratara de un sistema solar en miniatura. Así, podemos describir el comportamiento de estos átomos mediante las leyes que rigen en el sistema solar. En este trabajo se da una conexión entre el mundo microscópico y el macrosópico, con modelos muy similares, destacando algunos resultados interesantes, obtenidos mediante las técnicas cualitativas de los sistemas dinámicos, por el grupo de Dinámica No Lineal de la Universidad de La Rioja.

Palabras clave: Sistemas dinámicos, átomos de Rydberg, anillos planetarios.

A Rydberg atom is an oversize atom due to the fact that one or two of its electrons are excited to very high energy levels, far from the nuclear core. In this scenario, the electrons seem to orbit the nucleus like planets orbiting the sun. Thus, Rydberg atoms are suitable to be described by classical mechanics, as well as planets in the solar system. In this work a link between microscopic and macroscopic worlds is presented, through similar models, and interesting results are analyzed using qualitative methods of dynamical systems. These results have been achieved by the group of Nonlinear Dynamics at Universidad de La Rioja.

Key words: Dynamical systems, Rydberg atoms, planetary rings.

-
1. Dpto. de Química, Universidad de La Rioja, C/ Madre de Dios 51, 26006 Logroño
Correo electrónico: {manuel.inarrea, josepablo.salas}@unirioja.es
 2. Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004 Logroño
Correo electrónico: wafaa.kanaan@alum.unirioja.es
 3. Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004 Logroño
Correo electrónico: {vlancha, aipasc}@unirioja.es
Página web: <http://www.unirioja.es/cu/mheras/nolineal.html>
La investigación de los autores está subvencionada por el proyecto MTM2011-28227-C02-02.

1. INTRODUCCIÓN

Hoy en día sabemos que para describir con precisión el comportamiento de los átomos es necesario recurrir a la mecánica cuántica, cuyas leyes parecen, muchas veces, incompatibles con las más familiares de la mecánica newtoniana. Sin embargo, cuando los átomos están altamente excitados, sus electrones alcanzan un nivel de energía lo suficientemente alto como para que se encuentren a una gran distancia del núcleo, en lo que se ha venido a denominar *átomos de Rydberg*. Con algo más de precisión, un átomo de Rydberg es un átomo muy excitado en el cual uno o varios electrones tienen un número cuántico principal n muy grande. Dado que el radio de la órbita del electrón alrededor del núcleo aumenta proporcionalmente a n^2 , los átomos de Rydberg son extremadamente grandes y las funciones de onda del electrón se asemejan a órbitas clásicas alrededor del núcleo. Como, además, la energía del electrón es proporcional a $1/n^2$, éste permanece débilmente ligado al núcleo. De este modo, en este estado de alta excitación, la repuesta de los átomos de Rydberg a campos eléctricos y magnéticos externos es muy significativa. Más aún, debido a que la separación entre los niveles de energía es proporcional a $1/n^3$, el espectro de energías de un átomo de Rydberg presenta una gran densidad que, desde un punto de vista clásico, se asemeja a un espectro continuo. Podemos, así, recuperar la imagen del átomo como un sistema solar en miniatura [33].

En este caso, el átomo puede describirse como un núcleo central alrededor del cual orbitan los electrones. La fuerza coulombiana que gobierna la interacción entre el núcleo y los electrones es análoga a la fuerza de gravitación de Newton, pero para cargas eléctricas. De este modo, tanto los problemas que tienen que ver con el movimiento de los distintos cuerpos del sistema solar como los que se derivan del comportamiento de los electrones en átomos de Rydberg, cuando son sometidos a campos externos, pueden describirse a partir de ecuaciones clásicas. Así, nos encontramos con los denominados problemas de dos cuerpos perturbados o problemas keplerianos perturbados, ya que en ausencia de perturbación las trayectorias que describirían los objetos lo harían obedeciendo las leyes de Kepler. Gracias a esta analogía, problemas correspondientes a áreas tan aparentemente distantes como la Mecánica Celeste y la Física Atómica y Molecular pueden describirse usando los mismos modelos. Como ejemplo, citamos la correspondencia que existe entre el efecto Stark, que explica el desdoblamiento y desplazamiento de las líneas espectrales de los átomos cuando interactúan con un campo eléctrico, y el movimiento de una partícula de polvo que gira alrededor del sol sometida a presión de radiación [2]. Cuando, además de la presión de radiación, la partícula se ve afectada por un campo magnético, llegamos a un modelo que es el mismo que describe la interacción de un átomo de Rydberg con un campo magnético estático y un campo de microondas circularmente polarizado [22, 23, 24].

Si remarcable es la coincidencia de modelos, más lo es aún el que las técnicas desarrolladas, de manera independiente, para estudiar problemas en las dos áreas (Mecánica Celeste y Física Atómica y Molecular) se hayan fundido, dando lugar a técnicas modernas que lo mismo permiten diseñar misiones espaciales como expli-

car la dinámica de los procesos de reacción [21, 34]. En este sentido, las técnicas clásicas de la Mecánica Celeste que dieron lugar a las teorías de perturbaciones, y que luego derivaron en la teoría de las formas normales desarrollada por Birkhoff y otros en los años 30 del siglo pasado, se han entremezclado con la teoría del estado de transición para reacciones químicas, gestada y desarrollada en la misma época, dando lugar a un conjunto de herramientas de gran utilidad que permiten conectar los átomos con el sistema solar en un entorno común, como es el de los sistemas dinámicos hamiltonianos. A continuación, presentaremos dos problemas, uno a escala microscópica y otro a escala macrosópica, donde se describen fenómenos distintos, usando el mismo marco teórico y las mismas técnicas de análisis. Ambos problemas han constituido parte de la investigación del grupo en los últimos años.

2. INTERACCIÓN DE UN ÁTOMO DE HIDRÓGENO CON UNA SUPERFICIE METÁLICA

Como ya se ha comentado antes, los átomos de Rydberg son especialmente sensibles a las perturbaciones inducidas por campos externos, como pueden ser campos eléctricos o magnéticos. Cuando hay más de un campo actuando, resulta de interés saber cómo se produce la organización de los niveles cuánticos al variar la intensidad de los mismos, analizando las bifurcaciones entre órbitas periódicas [3, 13, 29, 30]. Pero, en otras circunstancias, interesa conocer cómo son los mecanismos de ionización, cuando el átomo pierde alguno de sus electrones. Dentro de este tipo de problemas nos encontramos con el que corresponde a la interacción de un átomo de Rydberg con una superficie metálica. En esta situación, incluso a gran distancia de la superficie, los efectos de la interacción alteran los estados electrónicos, dando lugar a una reorganización de los niveles de energía [26]. Sin embargo, cuando el átomo se acerca a una cierta distancia de la superficie, el electrón exterior es capturado por la superficie, dando lugar a la ionización del átomo. Tras el proceso de transferencia de carga, el ion positivo es atraído hacia la superficie y finalmente queda neutralizado mediante un proceso de Auger. La cuestión fundamental que se plantea en el proceso de transferencia de carga es saber a qué distancia de la superficie metálica tiene lugar la ionización. Para ello, en la mayoría de los experimentos se aplica un campo eléctrico perpendicular a la superficie, de manera que, cuando el campo es lo suficientemente fuerte, es capaz de contrarrestar la atracción ejercida por la superficie. De este modo, el ion positivo puede escapar de la atracción de la superficie, proporcionando así una señal observable experimentalmente, que permite determinar la distancia a la cual se produce la ionización [27].

Por otra parte, los estudios teóricos demuestran que cuando el átomo se acerca a la superficie o cuando la intensidad del campo eléctrico aumenta, antes de producirse la ionización, el electrón entra en un régimen Stark, de tal manera que las funciones de onda están fuertemente orientadas bien hacia la superficie metálica, bien en la dirección contraria [27]. Este hecho ha servido para estudiar experimentalmente la ionización de átomos de Rydberg de xenón en las proximidades de una

superficie de oro [28]. Así pues, nos encontramos ante un problema en el que la mecánica clásica es capaz de proporcionar con precisión muchas de las propiedades cuánticas. En este sentido, nuestro objetivo consistirá en usar la mecánica clásica para describir la interacción de un átomo de Rydberg con una superficie metálica y un campo eléctrico estático, centrándonos, en particular, en el caso de un átomo de hidrógeno.

2.1. Modelo y análisis del potencial

Tal como hemos dicho, consideraremos el movimiento de un electrón con carga e en un campo coulombiano, producido por la atracción del núcleo, que supondremos de masa infinita, y que se encuentra situado en el origen de coordenadas. Además, consideraremos la interacción con una superficie metálica paralela al plano xy situada a una distancia d del origen, en la parte negativa del eje z . Por último, también consideraremos que el electrón interactúa con un campo eléctrico de intensidad $F > 0$, que está dirigido en la dirección del eje z . Con estas hipótesis de partida, en unidades atómicas, y usando coordenadas cilíndricas $(\rho, z, \phi, P_\rho, P_z, P_\phi)$, donde

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi,$$

y P_ρ , P_z y P_ϕ son los momentos generalizados, el hamiltoniano que describe el problema viene dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = E = & \frac{P_\rho^2 + P_z^2}{2} + \frac{P_\phi^2}{2\rho^2} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + Fz \\ & + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (2d + z)^2}} - \frac{1}{4(d + z)}, \end{aligned} \quad (1)$$

donde E es la energía del sistema y los tres últimos términos describen la interacción con el campo F y con la superficie metálica. Debido a que el sistema es invariante bajo rotaciones alrededor del eje z , la tercera componente del momento angular P_ϕ es constante y el problema se reduce a dos grados de libertad, que son los correspondientes a las variables ρ y z . Para simplificar el problema, analizaremos el caso más sencillo, que corresponde a tomar $P_\phi = 0$. Por otra parte, si escalamos las variables, usando como unidad de longitud la distancia a la superficie, según

$$\rho' = \rho/d, \quad z' = z/d, \quad P_\rho = d^{1/2}P'_\rho, \quad P'_z = d^{1/2}P_z,$$

llegamos al hamiltoniano

$$\mathcal{H}' = \mathcal{E} = Ed = \frac{P_\rho'^2 + P_z'^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + (2 + z')^2}} - \frac{1}{4(1 + z')} + f z', \quad (2)$$

donde hemos prescindido de las primas, siendo $f = Fd^2$. De este modo, fijando los valores de $\mathcal{E}$ y f , podemos variar E , F y d de manera que se pueden explorar diferentes regiones donde la dinámica clásica permanece inalterada.

En (2) podemos distinguir claramente la parte cinética de la energía, que es la que depende de las velocidades, de la potencial. Por tanto, es conveniente introducir un potencial y estudiar las curvas equipotenciales o de velocidad cero, que son las que van a delimitar las zonas de movimiento del electrón. Este potencial viene dado por

$$U(\rho, z) = -\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (2+z)^2}} - \frac{1}{4(1+z)} + fz. \quad (3)$$

Nótese que, por las condiciones del problema y el significado de las variables, $\rho \geq 0$ y $z \geq -1$. Si estudiamos los puntos críticos de $U(\rho, z)$ en la región en la que ρ y z están definidas, tendremos una idea más o menos clara de lo que cabe esperar para el comportamiento del electrón. Los puntos críticos son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \rho} &= \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\rho}{(\rho^2 + (2+z)^2)^{3/2}} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= f + \frac{1}{4(1+z)^2} + \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{2+z}{(\rho^2 + (2+z)^2)^{3/2}} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Es fácil ver que si (ρ_s, z_s) es una solución del sistema (4), entonces $\rho_s = 0$. Para determinar z_s es preciso encontrar las raíces de una ecuación de grado 6 y seleccionar aquéllas para las que $z \geq -1$. Puede probarse [17] que siempre existe un único punto crítico, cuya coordenada z depende de la intensidad del campo eléctrico y, que para valores pequeños de éste, viene dada por

$$z_s(f) = -0.693673 + 0.044466f + 0.006259f^2 + 0.0002199f^3 + O(f^4). \quad (5)$$

Así, el aspecto del potencial es similar para diferentes valores de f y será el valor de la energía el que juegue un papel determinante. En la figura 1 se pueden ver las curvas equipotenciales y la variación del potencial cuando $\rho = 0$. Aquí es fácil ver la presencia del punto crítico, que además es un punto de silla. Si la energía del electrón es inferior a la del punto de silla, su movimiento será acotado y estará confinado en el interior de la región delimitada por las curvas equipotenciales cerradas. Sin embargo, si la energía del electrón supera a la del punto de silla, las curvas equipotenciales son abiertas y el electrón puede escapar y ser atrapado por la superficie metálica. Así pues, el punto de silla es el canal de ionización, a través del cual el electrón es capturado por la superficie.

La siguiente cuestión que debemos analizar es en qué medida influye el campo eléctrico en el proceso de ionización. Para ello, introducimos (5) en (3), con $\rho = 0$, y obtenemos la siguiente aproximación asintótica del valor de la energía en el punto de silla:

$$\mathcal{E}(f) = -0.978547 - 0.808072f + 0.0232718f^2 + 0.003851f^3 + O(f^4).$$

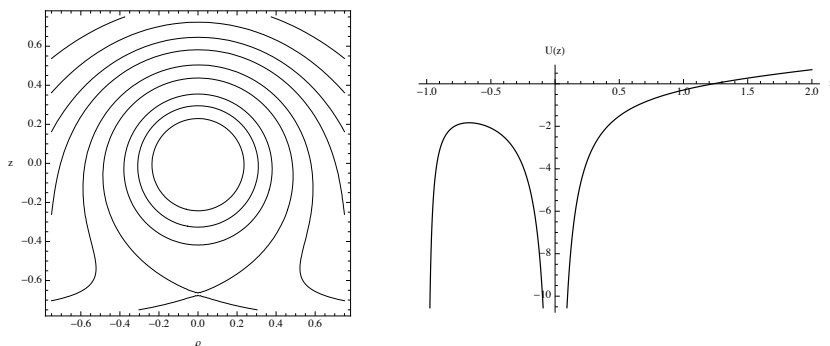


Figura 1: Curvas equipotenciales y la función $U(\rho, z)$, cuando $\rho = 0$, para $f = 0.5$.

De aquí es fácil deducir que $\mathcal{E}(f)$ es una función decreciente y, por tanto, si aumentamos la intensidad del campo eléctrico llegará un momento en que la energía del electrón será mayor que la del punto de silla y se abrirá el canal de escape, a través del cual puede escapar y ser capturado por la superficie metálica. No obstante, la influencia del campo eléctrico también se hace notar en la evolución de las familias de órbitas periódicas, que organizan la estructura de las soluciones y que van a predisponer al electrón hacia un régimen Stark, que favorece la ionización.

2.2. Estructura del espacio de fases: órbitas periódicas

Una de las formas más usuales para encontrar órbitas periódicas es mediante superficies de sección de Poincaré, que consideran la intersección de las soluciones con un plano escogido de manera apropiada. Así, los puntos fijos en la sección de Poincaré corresponden a órbitas periódicas. En el problema que estamos considerando, la singularidad que presenta el hamiltoniano (2) en el origen constituye un problema a la hora de propagar numéricamente las soluciones. Para evitar este inconveniente se efectúa un proceso de regularización de las ecuaciones, que transforma la parte coulombiana del problema en un oscilador armónico. Si introducimos unas nuevas variables u y v definidas a través de las ecuaciones

$$\rho = uv, \quad z = (u^2 - v^2)/2$$

y un nuevo tiempo τ , de manera que $\tau = t/(u^2 + v^2)$, y multiplicamos por $u^2 + v^2$, el hamiltoniano (2) se transforma en

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = 2 = & \frac{P_u^2 + P_v^2}{2} - \mathcal{E}(u^2 + v^2) \\ & + \frac{2(u^2 + v^2)}{\sqrt{4u^2v^2 + (4 + u^2 - v^2)^2}} - \frac{u^2 + v^2}{2(2 + u^2 - v^2)} + \frac{f}{2}(u^4 - v^4), \end{aligned} \quad (6)$$

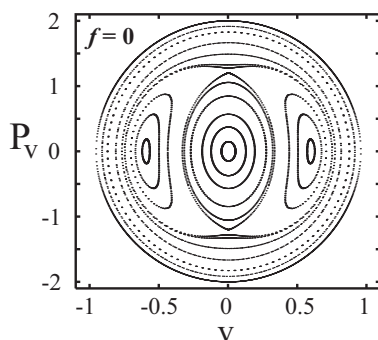


Figura 2: Sección de Poincaré cuando $f = 0$ y $\mathcal{E} = -2$.

donde se ha eliminado la singularidad en el origen. Si planteamos las ecuaciones diferenciales del movimiento se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{u} &= P_u, & \dot{v} &= P_v, \\ \dot{P}_u &= u \left(2\mathcal{E} - 2fu^2 - \frac{2(v^2 - 1)}{(2 + u^2 - v^2)^2} - \frac{16(4 + u^2 - 3v^2)}{(u^4 + (v^2 - 4)^2 + 2u^2(v^2 + 4))^{3/2}} \right), \\ \dot{P}_v &= v \left(2\mathcal{E} + 2fv^2 + \frac{2(u^2 + 1)}{(2 + u^2 - v^2)^2} - \frac{16(4 + 3u^2 - v^2)}{(u^4 + (v^2 - 4)^2 + 2u^2(v^2 + 4))^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Es claro que existen soluciones particulares, $v = P_v = 0$ y $u = P_u = 0$, que corresponden con órbitas periódicas especiales, denominadas I_∞^+ e I_∞^- , y que son órbitas rectilíneas que recorren el eje u y el eje v respectivamente. Si las miramos en las coordenadas ρ, z , I_∞^+ sería una órbita rectilínea a lo largo de la parte positiva del eje z , mientras que I_∞^- lo sería a lo largo de la parte negativa. Pero para tener una visión completa del conjunto de órbitas periódicas construimos una sección de Poincaré, tomando como plano de sección $u = 0$. En ausencia de campo eléctrico, y con un valor de la energía $\mathcal{E} = -2$, se obtiene la sección que se ve en la figura 2. Podemos identificar las órbitas rectilíneas, de manera que I_∞^+ corresponde al punto fijo central en la sección, mientras que I_∞^- es tangente al flujo y en este caso coincide con el límite de la sección de Poincaré.

Además de las órbitas rectilíneas, aparecen otros dos tipos de órbitas periódicas. Por un lado están las denominadas de tipo C , que son órbitas casi circulares y que corresponden a los dos puntos fijos situados sobre $v = 0$ a izquierda y derecha del punto fijo central. El otro tipo de órbitas son las llamadas tipo H y son también rectilíneas, aunque inestables, y están dirigidas según el eje ρ . Corresponden a los dos puntos de silla localizados en el eje $P_v = 0$, por encima y por debajo del punto fijo central. A medida que el campo eléctrico aumenta estas órbitas evolucionan, de manera que para valores suficientemente grandes de f solo sobreviven las órbitas de tipo I_∞^- . Esto queda reflejado en la figura 3 en la que se ve la evolución de las secciones de Poincaré al aumentar la intensidad del campo eléctrico. En el estadio

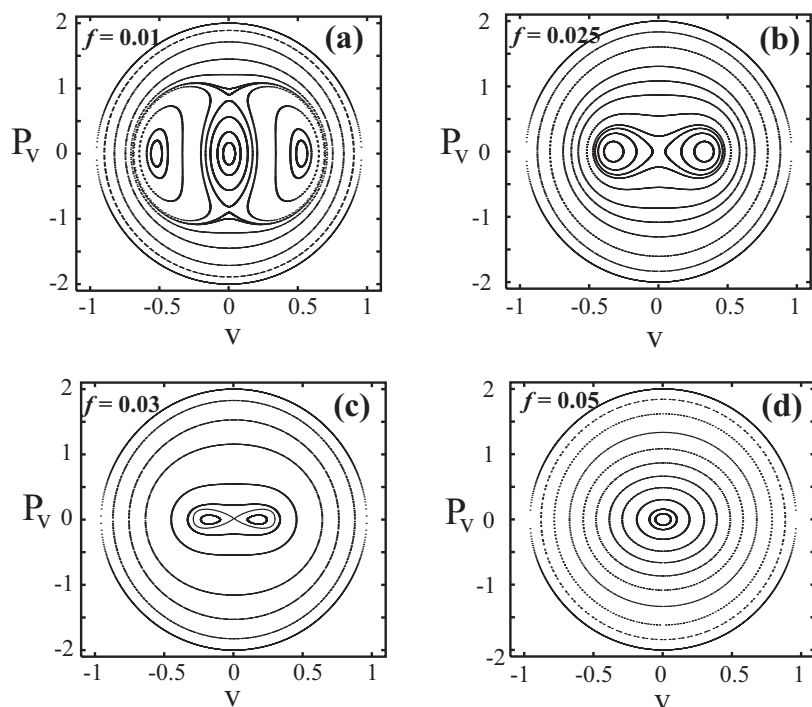


Figura 3: Evolución de las secciones de Poincaré en función del campo eléctrico, cuando $\mathcal{E} = -3.3$.

final, todas las soluciones están organizadas en torno a las órbitas I_∞ que están orientadas en la dirección de la superficie metálica. De este modo, una vez que se abra el canal de escape todas las órbitas próximas a I_∞^- accederán rápidamente a dicho canal y se consumará el proceso de ionización. No obstante, aquellas órbitas en torno a I_∞^+ aún permanecerán ligadas al núcleo y será preciso un valor mayor de f para que puedan ionizar.

Es interesante estudiar la probabilidad de ionización de las órbitas. Sin entrar en detalles técnicos, esta probabilidad puede calcularse a partir de variedades invariantes asociadas a una órbita periódica inestable ligada al punto de silla que abre el canal de escape. Se trata de la órbita de Lyapunov y tiene asociadas dos variedades invariantes, una estable y otra inestable, que definen el denominado estado de transición. Si una órbita cruza el estado de transición, no puede volver a cruzarlo en sentido contrario, con lo cual es posible explicar el mecanismo de ionización de una forma puramente geométrica. La conclusión final que puede extraerse es que la probabilidad de ionización aumenta con el valor de f .

3. LAS ENIGMÁTICAS MANCHAS EN LOS ANILLOS DE SATURNO

En 1610, Galileo dirigió su rudimentario telescopio hacia el planeta Saturno. Lo que vio le dejó sorprendido. Para él, Saturno tenía una apariencia *tricornpórea* y así lo comunicó en una carta fechada el 30 de julio de 1610 a Belisario Vinta, Secretario de Estado del Gran Duque de Toscana. En concreto, escribió que «*la estrella Saturno no es una sola, sino un agregado de tres que casi se tocan y que nunca se mueven o mudan entre sí*» [7]. Su sorpresa fue mayor cuando en 1612 observó a Saturno solitario¹ y más tarde los dos cuerpos menores a sus lados en forma semi-elíptica con un triángulo oscuro en el medio de las semiélipses². Galileo había descubierto los anillos de Saturno sin saberlo. Fue Christian Huygens quien, en 1655, anunció que lo que Galileo contempló por primera vez a través de su telescopio era un anillo sólido que rodeaba al planeta. Sin embargo, el anillo no es sólido, como probó Maxwell en su trabajo «On the stability of the motion of Saturn's rings» de 1856, por el que fue merecedor del Premio Adams.

Hoy sabemos que los anillos de Saturno están compuestos por millones de partículas de diferentes tamaños que se extienden casi medio millón de kilómetros de distancia más allá de su superficie, mientras que su espesor no llega a los 15 kilómetros. Esto se lo debemos, en gran medida, a las observaciones realizadas por las sondas Voyager, lanzadas en los años 70 del pasado siglo, y a las realizadas por la Cassini-Huygens, lanzada en 1997. Si bien la información proporcionada por estas misiones ha servido para aclarar muchas cuestiones sobre la estructura y composición de los anillos de Saturno, y del resto de planetas gigantes, también han surgido nuevas cuestiones para las que los científicos no tienen una explicación del todo satisfactoria. Así, en 1980, la sonda Voyager I observó una serie de manchas oscuras en el anillo B de Saturno que, por su estructura radial, se denominan *spokes* (ver figura 4). Las recientes observaciones de la sonda Cassini-Huygens parecen indicar que los spokes se deben a la presencia de partículas micrométricas de polvo, eléctricamente cargadas, que se encuentran en suspensión por encima o por debajo del anillo [6]. En este sentido, es interesante plantear un modelo que explique el movimiento de este tipo de partículas en un ambiente lo más parecido posible al que podemos encontrar en los anillos de Saturno, con el fin de poder encontrar algún mecanismo que sea el responsable de la formación de los spokes.

Existen diferentes maneras de aproximar el problema, pero nosotros nos centraremos en la más simple de todas, que consiste en considerar el movimiento de una sola partícula, despreciando la interacción de ésta con el resto de las que componen el anillo. El modelo que usaremos se remonta a un trabajo de Størmer de 1907 [31, 32], en el que se estudia el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético dipolar. Con este modelo es posible explicar satisfactoriamente la dinámica de los iones y electrones que se encuentran atrapados en los cinturones de radiación que rodean aquellos planetas que poseen un campo magnético, como es el caso de la Tierra [4]. Sin embargo, las partículas que componen los anillos pla-

¹Carta a Mark Welser fechada el 1 de diciembre de 1912 [7].

²Carta enviada a Federico Cesi en 1616 [7].

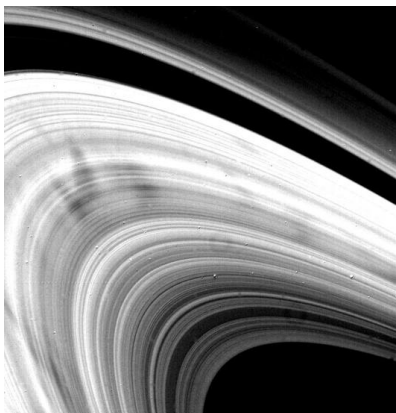


Figura 4: Manchas oscuras o *spokes* en los anillos de Saturno.

netarios no son iones o electrones, sino partículas de polvo cargadas, es decir, éstas tienen una masa que no puede despreciarse. En este sentido, es importante tener en cuenta la relación carga-masa pues, en función de la misma, su movimiento estará dominado por fuerzas gravitatorias o por fuerzas electromagnéticas [9]. Por tanto, debe considerarse la fuerza de atracción del planeta, y como éste rota sobre su eje, que supondremos alineado con el dipolo magnético, habrá que tener en cuenta, también, el campo eléctrico inducido por la corrotación del campo magnético. De esta forma se llega al denominado *problema de Størmer generalizado*, que ha sido estudiado en [5, 10, 11, 12, 14, 15, 19]. Entre los resultados que se obtienen destaca el estudio de la estabilidad de los movimientos, así como la posible existencia de órbitas tipo halo, que son órbitas circulares por encima o por debajo del ecuador del planeta. Estas órbitas podrían ser la causa de los spokes, siempre y cuando sean accesibles a partículas micrométricas eléctricamente cargadas.

Otra posible causa de los spokes tiene que ver con fenómenos de transporte dentro de los anillos, como se propone en [8]. También podrían estar relacionados con la aparición de inestabilidades cerca de las inmediaciones de las órbitas de tipo síncrono, en cuyas inmediaciones se forman los spokes. En los siguientes apartados trataremos de poner de manifiesto que las partículas micrométricas eléctricamente cargadas, dentro de las condiciones ambientales de Saturno, son susceptibles de mostrar inestabilidad cuando están en órbita síncrona, así como también encontrarse en órbita halo [18, 20]. Puesto que las condiciones de carga de la partícula dependen de su exposición a la radiación solar, repentinos cambios en la carga, unidos a la inestabilidad de la órbita, pueden modificar la trayectoria y, eventualmente, situar a la partícula fuera del plano de los anillos.

3.1. Planteamiento del problema

Consideremos una partícula de masa m y carga eléctrica q que orbita en torno a un planeta no esférico de masa M y radio ecuatorial R_p , que suponemos

está dotado de magnetosfera. La expresión del hamiltoniano, que da cuenta de la energía de la partícula, en unidades gaussianas, viene dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left\| \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right\|^2 + U(\mathbf{x}), \quad (7)$$

donde c es la velocidad de la luz, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ es la posición de la partícula en coordenadas cartesianas y $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ son las velocidades generalizadas. El potencial vector $\mathbf{A}$ describe las fuerzas magnéticas, mientras que el potencial escalar $U(\mathbf{x})$ tiene en cuenta las interacciones electrostáticas y gravitatorias. Supondremos que el campo magnético $\mathbf{B}$ corresponde al de un dipolo de momento magnético μ , alineado con el eje de rotación del planeta (eje z). De este modo, los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ quedan definidos como

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{r^3}(-y, x, 0), \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (8)$$

donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ es la distancia de la partícula cargada al centro de masas del planeta.

Si asumimos que la magnetosfera que rodea al planeta es un plasma conductor rígido que rota con la misma velocidad angular Ω que el planeta, la partícula queda sometida a la acción de un campo eléctrico estático corrotacional $\mathbf{E}$ que tiene la forma

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{B} = -\frac{\mu\Omega}{c} \nabla \Psi \quad \text{donde } \Psi = \frac{x^2 + y^2}{r^3}, \quad \boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega).$$

Debido a la no esfericidad del planeta, además del término puramente kepleriano $U_K = -Mm/r$, el potencial gravitatorio del modelo incluye el término [25]

$$U_{J_2} = \frac{MmR_p^2 J_2}{2r^3} \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1 \right).$$

Aquí, J_2 es un parámetro adimensional que da cuenta de la desviación del planeta respecto a una esfera. Si el parámetro es positivo el planeta es achatado por los polos, mientras que si es negativo el planeta está achatado por el ecuador. Nosotros consideraremos solo el caso $J_2 > 0$.

Así pues, la acción combinada de las interacciones gravitatoria y electrostática queda determinada por el potencial escalar

$$U(\mathbf{x}) = U_K + U_{J_2} + U_e = -\frac{Mm}{r} + \frac{MmR_p^2 J_2}{2r^3} \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1 \right) + \frac{q\mu\Omega}{c} \Psi, \quad (9)$$

donde $U_e = q\mu\Omega\Psi/c$ es el potencial electrostático. Si introducimos las expresio-

nes (8) y (9) en la ecuación (7) llegamos al siguiente hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) - \frac{Mm}{r} + \frac{MmR_p^2 J_2}{2r^3} \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1 \right) + \frac{q\mu\Omega}{c} \Psi + \frac{\mu q}{mc r^3} \left(\frac{\mu q}{2c} \frac{x^2 + y^2}{r^3} - P_\phi \right), \quad (10)$$

donde $P_\phi = xP_y - yP_x$ es la componente z del momento angular.

El hamiltoniano anterior $\mathcal{H}$ es invariante por rotaciones alrededor del eje z, por lo que es natural introducir coordenadas cilíndricas $(\rho, z, \phi, P_\rho, P_z, P_\phi)$. En estas coordenadas el hamiltoniano queda como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(P_\rho^2 + P_z^2 + \frac{P_\phi^2}{\rho^2} \right) - \frac{Mm}{r} + \frac{MmR_p^2 J_2}{2r^3} \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1 \right) + \frac{m\Omega\omega_c R_p^3}{c} \frac{\rho^2}{r^3} + \frac{\omega_c R_p^3}{r^3} \left(\frac{m\omega_c R_p^3}{2} \frac{\rho^2}{r^3} - P_\phi \right),$$

donde el parámetro $\omega_c = (qB_0)/(mc)$ representa la frecuencia de ciclotrón, mientras que $B_0 = \mu/(R_p^3 c)$ representa la intensidad del campo magnético en el ecuador del planeta y el último sumando da cuenta del potencial debido al campo magnético y que denominamos U_m .

Si introducimos un cambio de escala, de manera que $\mathbf{x}' = \mathbf{x}/R_p$, y un nuevo tiempo $t' = \omega_K t$, donde $\omega_K = (M/R_p^3)^{1/2}$ es la frecuencia kepleriana, se obtiene el hamiltoniano adimensional

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \frac{\mathcal{H}}{mR_p^2\Omega_K^2} = \frac{1}{2} \left(P_\rho^2 + P_z^2 + \frac{P_\phi^2}{\rho^2} \right) + U_K + U_{J_2} + U_e + U_m \\ &= \frac{1}{2} \left(P_\rho^2 + P_z^2 + \frac{P_\phi^2}{\rho^2} \right) - \frac{1}{r} + \frac{J_2}{2r^3} \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1 \right) + \delta \beta \frac{\rho^2}{r^3} \\ &\quad + \frac{\delta}{r^3} \left(\frac{\delta \rho^2}{2r^3} - P_\phi \right). \end{aligned} \quad (11)$$

En esta expresión se ha prescindido de las primas y, al mismo tiempo, se han definido dos nuevos parámetros: $\delta = \omega_c/\omega_K$ y $\beta = \Omega/\omega_K > 0$. El parámetro δ representa el cociente entre las interacciones magnética y kepleriana (i.e. la relación carga-masa q/m de la partícula), y β representa el cociente entre las interacciones electrostática y gravitatoria.

Para un planeta concreto, los parámetros β y J_2 quedan fijados, por lo que el modelo depende de tres parámetros. Por un lado, depende de los parámetros internos P_ϕ , la tercera componente del momento angular, y de la energía $E =$

$\mathcal{H}'$. Por otra parte, también depende del parámetro externo δ , que puede tomar valores positivos o negativos, según sea la carga de la partícula.

En este punto enfocaremos el problema desde dos puntos de vista distintos. Por un lado, buscaremos soluciones especiales, en forma de equilibrios, correspondientes a órbitas circulares paralelas al plano del ecuador. Estas órbitas, que se denominan halo, pueden explicar la formación de spokes, si su presencia tiene lugar para valores apropiados del parámetro δ . Por otro lado, estudiaremos la dinámica kepleriana, suponiendo que la interacción gravitatoria es la dominante y buscaremos zonas de alta inestabilidad que puedan estar asociadas a la formación de spokes. Aunque el estudio lo haremos en general, al final fijaremos los valores de J_2 y β para Saturno. En concreto tomaremos $\beta = 0.40649$ y $J_2 = 0.016298$ [1, 25].

3.2. Existencia de órbitas halo

Las órbitas halo no son más que soluciones de equilibrio de las ecuaciones de Hamilton, que vienen dadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_\rho}, \quad \dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_z}, \quad \dot{P}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \rho}, \quad \dot{P}_z = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial z}. \quad (12)$$

Por tanto, las órbitas halo son las soluciones del sistema anterior cuando las ecuaciones están igualadas a 0. Es decir, las soluciones de equilibrio se corresponden con las raíces de un sistema no lineal de ecuaciones. Para encontrar estas raíces, podemos definir un potencial efectivo

$$U_{\text{eff}} = \frac{P_\phi^2}{2\rho^2} - \frac{1}{r} - \delta \frac{P_\phi}{r^3} + \frac{\delta^2 \rho^2}{2r^6} + \delta \beta \frac{\rho^2}{r^3} + 3J_2 \frac{z^2}{2r^5} - \frac{J_2}{2r^3}, \quad (13)$$

de manera que sus puntos críticos coinciden con las soluciones de equilibrio del sistema (12). Para interpretar los resultados de una manera más clara, es conveniente introducir una nueva frecuencia ω , tal como hacen otros autores [5, 11, 12],

$$\omega = \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_\phi} = \frac{P_\phi}{\rho^2} - \frac{\delta}{r^3}.$$

El signo de ω determina si la órbita se recorre en sentido directo o retrógrado. Además, cuando $\omega = \beta = \Omega$, la frecuencia de la órbita corresponde a la de una órbita síncrona, es decir la partícula gira a la misma velocidad que el planeta. Por terminar de simplificar la búsqueda de soluciones, haremos un cambio a coordenadas polares (r, θ, ϕ) de manera que

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

con $\theta \in [0, \pi/2]$, ya que el modelo presenta simetría respecto al plano ecuatorial. De hecho, el potencial efectivo (13) no cambia si reemplazamos z por $-z$.

En términos de las nuevas variables y la nueva frecuencia, el potencial efectivo queda como

$$U_{\text{eff}} = -\frac{1}{r} + \delta\beta \frac{\sin^2 \theta}{r} + \omega^2 \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2} + 3J_2 \frac{\cos^2 \theta}{2r^3} - \frac{J_2}{2r^3}, \quad (14)$$

cuyos puntos críticos vienen dados por las ecuaciones que se obtienen de $\partial U_{\text{eff}}/\partial r = 0$ y $\partial U_{\text{eff}}/\partial \theta = 0$, que se reducen a

$$\begin{aligned} -6J_2 + 2r^2 + (9J_2 - 2\delta(\beta - \omega)r^2 - 2r^5\omega^2)\sin^2 \theta &= 0, \\ (-3J_2 + 2\delta(\beta - \omega)r^2 - r^5\omega^2)\sin 2\theta &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Estas ecuaciones son las esperadas para un sistema kepleriano perturbado, como se puede ver en [16]. Así, nos encontramos con dos tipos de soluciones, aquellas para las que $\sin 2\theta = 0$, y que básicamente se reducen a las órbitas ecuatoriales, y aquellas para las que $\sin 2\theta \neq 0$, que van a ser órbitas halo, es decir, órbitas circulares paralelas al plano del ecuador. Nosotros estamos interesados en estas últimas, por lo que es necesario que se cumpla la ecuación

$$3J_2 + 2\delta(\omega - \beta)r^2 + r^5\omega^2 = 0, \quad (16)$$

junto con la primera ecuación de (15) y al mismo tiempo $0 < \sin^2 \theta < 1$. La dificultad con la que nos encontramos es que (16) es una ecuación de quinto grado y no es posible obtener de manera explícita r en función de los parámetros. Sin embargo, usando la regla de los signos de Descartes, se puede ver que la ecuación (16) o no tiene soluciones positivas o tiene exactamente dos [18].

No obstante, nosotros estamos interesados en las condiciones de existencia de las órbitas halo y, para ello, podemos eliminar r del sistema de ecuaciones (15), llegando a la ecuación

$$\begin{aligned} 32[-1 + 3\delta(\beta - \omega)\sin^2 \theta]^3[1 - 2\delta(\beta - \omega)(1 - \sin^2 \theta)]^2 \\ - 27J_2^3\omega^4(5\sin^2 \theta - 2)^5 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Si consideramos los casos límite $\sin \theta = 0$ y $\sin \theta = 1$, obtenemos dos condiciones que determinan la existencia de órbitas halo. En concreto,

$$\begin{aligned} \sin \theta = 1 &\longrightarrow 32[-1 + 3\delta(\beta - \omega)]^3 - 6561J_2^3\omega^4 = 0, \\ \sin \theta = 0 &\longrightarrow 864J_2^3\omega^4 - 32[1 - 2\delta(\beta - \omega)]^2 = 0, \end{aligned}$$

determinan, para valores fijos de β y J_2 , dos curvas en el plano δ - ω que delimitan las zonas donde pueden existir órbitas halo. Es decir, determinan las frecuencias y las cargas de dichas órbitas. Es interesante notar que hay una zona de exclusión, de manera que ciertas partículas no pueden nunca estar en órbita halo. Para el caso de Saturno, aquellas partículas con una relación carga-masa en el intervalo $[-0.777231, 0.000221354]$ no pueden orbitar paralelas al ecuador. Esta particularidad es consecuencia de la no esfericidad del planeta, que hace que las partículas con

poca carga, especialmente si ésta es negativa, no puedan escapar del plano ecuatorial o de otras trayectorias de tipo kepleriano.

Para ver cómo esto puede afectar a la formación de spokes, consideremos una partícula esférica de hielo de radio a y potencial eléctrico Φ . Entonces δ se expresa como

$$\delta = 0.00133887 \frac{\Phi}{a^2}, \quad (18)$$

donde a se mide en micras y Φ en voltios. Si suponemos que el tamaño de la partícula es de una micra, para que esté en órbita halo es necesario que $\Phi > 0.16533$. Si su tamaño fuera diez veces menor, podría estar en órbita halo si $\Phi < -5.8$ o $\Phi > 0.0016533$. Teniendo en cuenta que para Saturno los valores típicos del potencial Φ están en el rango $[-10, 5]$, un cambio en las condiciones ambientales del plasma puede provocar la transición de órbitas ecuatoriales a órbitas halo, por lo que las partículas parecerían estar levitando, dando lugar a las manchas oscuras o spokes. Una vez recuperadas las condiciones ambientales, las partículas decaerían nuevamente al ecuador, desapareciendo los spokes.

3.3. Reducción y existencia de inestabilidades

Otra forma de poder dar una explicación a la formación de spokes es considerando inestabilidades en órbitas keplerianas, es decir, aquellas órbitas que se comportan de acuerdo a las tres leyes de Kepler. En este sentido, la existencia de conexiones entre distintos tipos de órbitas se ha postulado como un posible mecanismo para este fenómeno. En concreto, los spokes serían consecuencia del transporte de partículas de unas órbitas a otras [8]. No obstante, al estudiar la naturaleza de las órbitas keplerianas es posible encontrar órbitas cuya estabilidad depende fuertemente del parámetro δ , es decir de su relación carga-masa, que es a su vez dependiente de las condiciones ambientales. Así pues, nuestro objetivo es estudiar la manera en que la interacción magnética y el achatamiento del planeta influyen en las órbitas keplerianas. Para ello sería preciso resolver el sistema de ecuaciones diferenciales asociado al hamiltoniano (10). En lugar de eso, usaremos la manera clásica de tratar este tipo de problemas. La idea general es que, si el término dominante en el potencial es el correspondiente a la interacción gravitatoria, las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales se parecerán mucho a las soluciones del problema de Kepler. Es decir, las soluciones serán, en general, elipses que se irán deformando con el tiempo. El tiempo de deformación es grande comparado con el tiempo que le cuesta a una partícula completar una órbita alrededor del planeta, por lo que se considera cada órbita en su totalidad como un objeto que evoluciona. Esto se traduce en lo que se denomina normalización de las ecuaciones, que consiste en promediar las mismas a lo largo de un periodo orbital. De aquí resulta un sistema simplificado en el que las soluciones de equilibrio son órbitas especiales en el sistema de partida. La naturaleza de estas órbitas es clave a la hora de describir la dinámica del sistema original, ya que el resto de trayectorias se organizan en torno a ellas.

Tras el proceso de normalización, además de permanecer constante la tercera componente del momento angular, también el semieje mayor de la órbita kepleriana se mantiene constante. Por tanto el problema dependerá solamente de dos variables, que van a ser el módulo del momento angular y el denominado argumento del periastro, que es el ángulo que forma el eje x con el semieje mayor de la órbita. Si denotamos por L a una función conocida del semieje mayor, H a la tercera componente del momento angular, G al módulo del momento angular y g al argumento del periastro, el hamiltoniano normalizado se escribe como

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = & -\frac{1}{2L^2} + \frac{\delta}{16L^5G^7(L+G)} \left(2(L+G)(4\beta L^3G^7 + 4\beta L^3G^5H^2 \right. \\ & \left. - \delta G^4 - 8L^2G^4H - \delta G^2H^2 + 3\delta L^2G^2 + 3\delta L^2H^2) \right. \\ & \left. + (L-G)(G^2-H^2)(8\beta L^3G^5 + \delta G^2 + 2\delta LG + \delta L^2) \cos(2g) \right) \\ & + \frac{J_2(G^2-3H^2)}{4L^3G^5},\end{aligned}$$

donde se cumple la relación $|H| \leq G \leq L$. La expresión anterior se puede reducir más si despreciamos los términos en δ^2 e introducimos variables adecuadas [14, 20]. En concreto, considerando las variables (σ_1, σ_2) definidas como

$$\sigma_1 = (L - |H|)^2 - \frac{(G^2 - H^2)(L^2 - G^2)}{G^2} \sin^2 g, \quad \sigma_2 = G,$$

el hamiltoniano completamente reducido viene dado por

$$\mathcal{Z} = \delta \frac{\beta L \sigma_2^2 (\sigma_1 \sigma_2 + L(\sigma_2 + |H|)^2) - H(L + \sigma_2)^2}{L^3 \sigma_2^3 (L + \sigma_2)^2} + J_2 \frac{\sigma_2^2 - 3H^2}{4L^3 \sigma_2^5}.$$

A partir de aquí, nuestro cometido es estudiar las soluciones de equilibrio del sistema, que se reduce a encontrar las raíces del sistema de ecuaciones $\partial \mathcal{Z} / \partial \sigma_1 = 0$, $\partial \mathcal{Z} / \partial \sigma_2 = 0$. Esta tarea no es sencilla, a pesar de que hemos reducido considerablemente el problema original. Por ello, lo que se busca no es encontrar explícitamente las raíces, sino bajo qué condiciones estas raíces existen y cuándo cambia su número. Por supuesto, estas condiciones van a depender fuertemente de δ , β y J_2 . Si fijamos el valor de β y J_2 para Saturno, obtenemos los diagramas de bifurcación que se muestran en la figura 5, para diferentes valores de δ . Cada vez que se cruza una de las líneas que aparecen en el diagrama, se produce un cambio en el número de soluciones de equilibrio o en su estabilidad.

Lo más notable de estos diagramas es la aparición de los puntos P y Q , en el que coinciden la mayor parte de las curvas de bifurcación, cuando δ es positivo. Para $\delta < 0$ solo aparece el punto P si el valor de δ es relativamente grande en valor absoluto. Estos puntos podrían ser responsables de un cambio en la estabilidad de las órbitas, ya que pequeños cambios en δ podrían modificar la estabilidad de la órbita, convirtiéndola en inestable y desplazando a la partícula a otra zona del

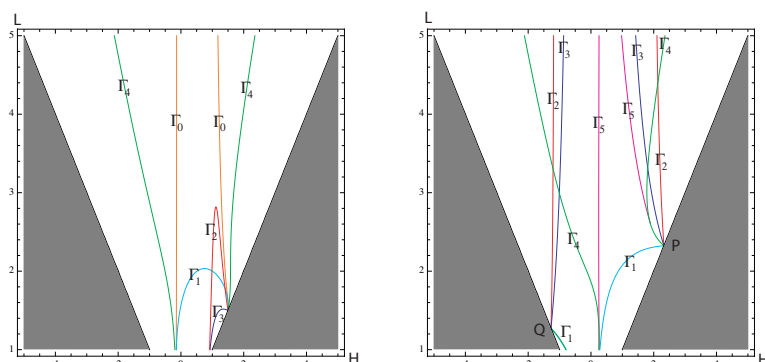


Figura 5: Diagrama de bifurcaciones para los equilibrios del sistema reducido en el caso de Saturno. A la izquierda $\delta = -0.02$ y a la derecha $\delta = 0.01$.

espacio. Ahora bien, para que estos puntos sean responsables de este fenómeno, su localización debe ser compatible con la zona de aparición de spokes, que es en el entorno de la órbita síncrona. Esto sucede para el punto P si $\delta \approx -0.18$, y para el punto Q si $\delta \approx 0.01$. Teniendo en cuenta la expresión de δ en función del potencial y el tamaño de la partícula, dada por (18), y que $\Phi \in [-10, 5]$, resulta que el tamaño de las partículas que se verían afectadas por la inestabilidad debería ser inferior a $0.9 \mu\text{m}$, en consonancia con las observaciones realizadas por la sonda Cassini-Huygens.

REFERENCIAS

- [1] J. K. CAMPBELL Y J. D. ANDERSON, Gravity field of the saturnian system from Pioneer and Voyager tracking data, *Astronomical Journal* **97** (1989), 1485–1495.
- [2] A. DEPRIT, Dynamics of orbiting dust under radiation pressure, *The Big Bang and George Lemaitre* (A. Berger, ed.), Reidel Publishing Company, 151–180, 1984.
- [3] A. DEPRIT, V. LANCHARES, M. IÑARREA, J. P. SALAS Y J. D. SIERRA, Teardrop bifurcation for Rydberg atoms in parallel electric and magnetic fields, *Physical Review A* **54** (1996), 3885–3893.
- [4] H. R. DRAGT, Trapped orbits in a magnetic dipole field, *Review of Geophysics* **3** (1965), 255–298.
- [5] H. R. DULLIN, M. HORÁNYI Y J. E. HOWARD, Generalizations of the Størmer problem for dust grain orbits, *Physica D* **171** (2002), 178–195.
- [6] L. ESPOSITO, *Planetary Rings: A Post-Equinox View*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [7] G. GALILEI Y J. KEPLER, *El mensaje y el mensajero sideral*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

- [8] C. GROTTA-RAGAZZO, M. KULESZA Y P. A. S. SALOMÃO, Equatorial dynamics of charged particles in planetary magnetospheres, *Physica D* **225** (2007), 169–183.
- [9] D. P. HAMILTON, Motion of dust in a planetary magnetosphere: orbit-averaged equations for oblateness, electromagnetic and radiation forces with application to Saturn’s E ring, *Icarus* **101** (1993) 244–264; Erratum, *Icarus* **103** (1993), 161.
- [10] M. HORÁNYI, Charged dust dynamics in the solar system, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **34** (1996), 383–418.
- [11] J. E. HOWARD, H. R. DULLIN Y M. HORÁNYI, Stability of halo orbits, *Physical Review Letters* **84** (2000), 3244–3247.
- [12] J. E. HOWARD, M. HORÁNYI Y G. E. STEWART, Global dynamics of charged dust particles in planetary magnetospheres, *Physical Review Letters* **83** (1999), 3993–3996.
- [13] M. IÑARREA, J. P. SALAS Y V. LANCHARES, Hydrogen atom in the presence of uniform magnetic and quadrupolar electric fields: Integrability, bifurcations and chaotic behavior, *Physical Review E* **66** (2002), 056614-12.
- [14] M. IÑARREA M, V. LANCHARES, J. PALACIÁN, A. I. PASCUAL, J. P. SALAS Y P. YANGUAS, The Keplerian regime of charged particles in planetary magnetospheres, *Physica D* **197** (2004), 242–268.
- [15] M. IÑARREA M, V. LANCHARES, J. PALACIÁN, A. I. PASCUAL, J. P. SALAS Y P. YANGUAS, Global dynamics of dust grains in magnetic planets, *Physics Letters A* **338** (2005), 247–252.
- [16] M. IÑARREA M, V. LANCHARES, J. PALACIÁN, A. I. PASCUAL, J. P. SALAS Y P. YANGUAS, Reduction of some perturbed Keplerian problems, *Chaos, Solitons & Fractals* **27** (2006), 527–536.
- [17] M. IÑARREA M, V. LANCHARES, J. PALACIÁN, A. I. PASCUAL, J. P. SALAS Y P. YANGUAS, Rydberg hydrogen atom near metallic surface: Stark regime and ionization dynamics, *Physical Review A* **76** (2007), 052903-9.
- [18] M. IÑARREA, V. LANCHARES, A. I. PASCUAL, J. PALACIÁN, J. P. SALAS Y P. YANGUAS, The effect of J_2 on equatorial and halo orbits around a magnetic planet, *Chaos Solitons & Fractals* **42** (2009), 155–169.
- [19] M. IÑARREA, V. LANCHARES, A. I. PASCUAL, J. PALACIÁN, J. P. SALAS Y P. YANGUAS, Symplectic coordinates on $S_2 \times S_2$ for perturbed Keplerian problems: Application to the dynamics of a generalised Størmer problem, *J. Differential Equations* **250** (2011), 1386–1407.
- [20] M. IÑARREA, V. LANCHARES, A. I. PASCUAL, J. PALACIÁN, J. P. SALAS Y P. YANGUAS, Influence of planetary oblateness on Keplerian dynamics in magnetospheres and existence of invariant tori, *Physica D* **241** (2012), 1026–1042.
- [21] W. S. KOON, M. W. LO, J. E. MARSDEN Y S. D. ROSS, Heteroclinic Connections between Periodic Orbits and Resonance Transitions in Celestial Mechanics, *Chaos* **10** (2000), 427–469.

- [22] V. LANCHARES, M. IÑARREA Y J. P. SALAS, Bifurcations in the hydrogen atom in the presence of a circularly polarized microwave field and a static magnetic field, *Physical Review A* **56** (1997), 1839–1843.
- [23] V. LANCHARES, T. LÓPEZ MORATALLA Y D. FARRELLY, Lyapunov stability for Lagrange equilibria of orbiting dust, *Dynamics of Natural and Artificial Celestial Bodies* (Pretke-Ziomek et al., ed.), Kluwer Academic Publishers, 247–252, 2001.
- [24] E. LEE, A. BRUNELLO Y D. FARRELLY, Single-atom quasi-Penning trap, *Physical Review Letters* **75** (1995), 3641–3644.
- [25] C. D. MURRAY Y S. F. DERMOTT, *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [26] P. NORDLANDER, Energies and lifetimes of atomic Rydberg states near metal surfaces, *Physical Review B* **53** (1996), 4125–4132.
- [27] P. NORDLANDER Y F. B. DUNNING, Interaction of Rydberg atoms with a metal surface in the presence of an external electric field, *Physical Review B* **53** (1996), 8083–8089.
- [28] C. OUBRE, P. NORDLANDER Y F. B. DUNNING, Avoided crossings in the interaction of a Xe Rydberg atom with a metal surface, *The Journal of Physical Chemistry B* **106** (2002), 8338–8341.
- [29] J. P. SALAS, A. DEPRIT, S. FERRER, V. LANCHARES Y J. PALACIÁN, Two pitchfork bifurcations in the polar quadratic Zeeman-Stark effect, *Physical Review A* **242** (1998), 83–93.
- [30] J. P. SALAS Y V. LANCHARES, Saddle node bifurcation for Rydberg atoms in parallel electric and magnetic fields, *Physical Review A* **58** (1998), 434–439.
- [31] C. STØRMER, Sur les trajectoires des corpuscules electriques, *Archives des Sciences Physiques et Naturelles* **24** (1907), 5–18, 113–158, 221–247.
- [32] C. STØRMER, *The polar Aurora*, Clarendon Press, Oxford, 1955.
- [33] T. UZER, D. FARRELLY, J. MILLIGAN, P. E. RAINES Y J. P. SKELTON, Celestial Mechanics on a Microscopic Scale, *Science* **253** (1991), 42–48.
- [34] T. UZER, C. JEFFÉ, J. PALACIÁN, P. YANGUAS Y S. WIGGINS, The geometry of reaction dynamics, *Nonlinearity* **15** (2002), 957–992.