Derivaciones discretas y homología

J.I. Extremiana, L.J. Hernández, M.T. Rivas y E. Sáenz de Cabezón.
Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja.

Sea R un anillo conmutativo y unitario. Para un conjunto X , $M(X;R)$ denotará el anillo de las aplicaciones de X en R .

La estructura cúbica de $\mathbb{R}^n$ determinada por los vértices que tienen coordenadas enteras puede codificarse a través de $\mathbb{Z}^n \times (\mathbb{Z}/2)^n$, lo que motiva el estudio de los anillos de funciones $M(\mathbb{Z}^n \times (\mathbb{Z}/2)^n; R)$, $M(\mathbb{Z}^n; R)$ y $M((\mathbb{Z}/2)^n; R)$. En este trabajo definimos diferentes operadores derivación y coderivación en estos anillos. Por un lado, se obtienen desarrollos en serie polinómica para este tipo de funciones en los que los coeficientes se calculan mediante sucesivas derivadas iteradas de la función en un punto. Por otro, utilizamos algunos de los operadores derivación y coderivación para definir operadores borde y coborde en $M(\mathbb{Z}^n \times (\mathbb{Z}/2)^n; R)$, en términos de los cuales se expresan homologías y cohomologías habituales de los subcomplejos de esta estructura cúbica de $\mathbb{R}^n$.

La recta real $\mathbb{R}$ admite una estructura de CW-complejo tomando como conjunto de 0-celdas $c^0(\mathbb{R}) = \{e^0_z | z \in \mathbb{Z}\}$, donde $e^0_z = \{z\}$, y como conjunto de 1-celdas $c^1(\mathbb{R}) = \{e^1_z | z \in \mathbb{Z}\}$, donde $e^1_z = (z, z+1)$. El espacio $\mathbb{R}^n$ hereda una estructura cúbica producto tomando $c^q(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{l_1+\cdots+l_n=q} c^{l_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times c^{l_n}(\mathbb{R})$, con $l_i \in \{0.1\}$.

Notemos que un q-cubo $e^{l_1}_{z_1} \times \cdots \times e^{l_n}_{z_n}$ puede codificarse mediante $((z_1, \cdots, z_n), (l_1, \cdots, l_n))$. Si denotamos $z = (z_1, \cdots, z_n)$ y $l = (l_1, \cdots, l_n)$, tenemos entonces el q-cubo codificado por el elemento $(z, l) \in \mathbb{Z}^n \times (\mathbb{Z}/2)^n$. Por tanto, esta estructura cúbica de $\mathbb{R}^n$ puede darse como el conjunto cúbico

$$\mathbb{E}^n = \mathbb{Z}^n \times (\mathbb{Z}/2)^n$$

La aplicación $\dim\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{Z}$, dada por $\dim(z,l) = \sum_1^n l_k$, proporciona una estructura graduada a $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{E}^n = \bigcup_{q\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}^n_q = \bigcup_{q=0}^n \mathbb{E}^n_q$, donde $\mathbb{E}^n_q = \{(z,l) | \dim(z,l) = q\}$.

Sea R un anillo conmutativo unitario. Dado un conjunto X , denotaremos $M(X;R) = \{f\colon X \to R | f \text{ es una aplicación}\}$.

Como $\mathbb{E}^n = \bigcup_{q\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}^n_q$, el anillo $M(\mathbb{E}^n;R)$ tiene una estructura graduada $M(\mathbb{E}^n;R) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} M(\mathbb{E}^n_q;R)$.

Teniendo en cuenta que $\mathbb{E}^n_q = \bigcup_{\{l|\sum l_k=q\}} Z^n\times\{l\}$ se obtienen en $M(\mathbb{E}^n_q;R) \cong \sum_{\{l|\sum l_k=q\}} M(\mathbb{Z}^n;R)$ y en $M(\mathbb{E}^n;R) \cong \sum_{(\mathbb{Z}/2)^n} M(\mathbb{Z}^n;R)$ estructuras de módulos libres sobre el anillo $M(\mathbb{Z}^n;R)$.

Por otro lado, si consideramos $\mathbb{E}^n = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}^n}\{z\}\times(\mathbb{Z}/2)^n$, entonces $M(\mathbb{E}^n;R) \cong \prod_{\mathbb{Z}^n} M((\mathbb{Z}/2)^n;R)$.

A continuación vamos a definir operadores derivación en estos anillos:

Dado $y\in\mathbb{Z}$, sea $\bar{y}\in\mathbb{Z}/2$ la clase de y módulo 2. Para cada $1\le i\le n$, sean $\mathrm{s_i},\mathrm{m_i}\colon \mathrm{\mathbb{Z}^n}\to\mathrm{\mathbb{Z}^n}$, y $\bar{\mathrm{s}}_i,\bar{\mathrm{m}}_i\colon(\mathbb{Z}/2)^n\to(\mathbb{Z}/2)^n$ las aplicaciones dadas por

$$\begin{array}{l}
\mathrm{s_i(z_1,\cdots,z_i,\cdots,z_n)=(z_1,\cdots,z_i+1,\cdots,z_n)}\\
\mathrm{m_i(z_1,\cdots,z_i,\cdots,z_n)=(z_1,\cdots,z_i-1,\cdots,z_n)}\\
\bar{\mathrm{s}}_i(\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_i,\cdots,\bar{z}_n)=(\bar{z}_1,\cdots,\overline{z_i+1},\cdots,\bar{z}_n)\\
\bar{\mathrm{m}}_i(\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_i,\cdots,\bar{z}_n)=(\bar{z}_1,\cdots,\overline{z_i-1},\cdots,\bar{z}_n)
\end{array}$$

Para cada $1\le i\le n$, definimos los operadores *i-ésima derivación a izquierda* d_i^- , δ_i^- e *i-ésima derivación a derecha* d_i , δ_i siguientes:

$$d_i^-\ ,\ d_i\colon M(\mathbb{Z}^n;R)\to M(\mathbb{Z}^n;R)\ ;\quad \delta_i^-\ ,\ \delta_i\colon M((\mathbb{Z}/2)^n;R)\to M((\mathbb{Z}/2)^n;R)$$

están dados por $d_i^- f = f - f\mathrm{m_i}$, $d_i f = f\mathrm{s_i} - f$, $\delta_i^- g = g - g\bar{\mathrm{m}}_i$, $\delta_i g = g\bar{\mathrm{s}}_i - g$.

Pueden considerarse también diferentes operadores en los anillos $M(\mathbb{Z}^n;R)$ y $M((\mathbb{Z}/2)^n;R)$ obtenidos mediante diversas iteraciones de los anteriores. Su estudio resulta interesante pues pueden utilizarse para obtener series polinómicas aplicables en procesos de extensión o aproximación de funciones. Por ejemplo, si para $k\in\{1,\cdots,n\}$, denotamos $d_k^{(0)} = \mathrm{id_{M(\mathbb{Z}^n;R)}}$, y para j entero >0 , $d_k^{(j)} = d_k \cdot\cdot^{j)}\cdots d_k^- d_k$ si j es impar y $d_k^{(j)} = d_k^- \cdot\cdot^{j)}\cdots d_k^- d_k$ si j es par, entonces obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 1 *Dada* $f\in M(\mathbb{Z}^n;R)$ *y* $x_0\in\mathbb{Z}^n$ *, entonces*

$$f(x_0+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j_1+\cdots+j_n=k} \frac{d_1^{(j_1)}\cdots d_n^{(j_n)} f(x_0)}{j_1!\cdots j_n!} p_{(j_1)}(x_1)\cdots p_{(j_n)}(x_n)$$

donde $p_{(0)}(t)=1$ *,* $p_{(1)}(t)=t$ *,* $p_{(2)}(t)=t(t-1)$ *,* $p_{(3)}(t)=(t+1)t(t-1)$ *,* $p_{(4)}(t)=(t+1)t(t-1)(t-2)$ *,* $\cdots$.

Los operadores i-ésima derivación a izquierda y a derecha anteriores pueden extenderse al anillo $M(\mathbb{E}^n;R)$ del modo siguiente:

Por un lado definimos los operadores de grado 0 .

$$d_i^-, d_i\colon M(\mathbb{E}^n;R) \to M(\mathbb{E}^n;R)$$

dados por $d_i^-(f) = f - f(\mathrm{m_i} \times \mathrm{id}_{(\mathbb{Z}/2)^n})$ y $d_i(f) = f(\mathrm{s}_i \times id_{(\mathbb{Z}/2)^n}) - f$.

Por otro, los operadores

$$\delta_i^-, \delta_i\colon M(\mathbb{E}^n;R) \to M(\mathbb{E}^n;R)$$

dados por $\delta_i^-(f) = f - f(\mathrm{id}_{\mathbb{Z}^n} \times \bar{\mathrm{m}}_\mathrm{i})$ y $\delta_i(f) = f(\mathrm{id}_{\mathbb{Z}^n} \times \bar{\mathrm{s}}_i) - f$.

Nótese que $d_i^- f(z,l) = d_i^- f_l(z)$, $d_i f(z,l) = d_i f_l(z)$ siendo $f_l\colon \mathbb{Z}^n \to R$ tal que $f_l(z) = f(z,l)$; y que $\delta_i^- f(z,l) = \delta_i^- f_z(l)$, $\delta_i f(z,l) = \delta_i f_z(l)$ siendo $f_z\colon (\mathbb{Z}/2)^n \to R$ tal que $f_z(l) = f(z,l)$; donde los operadores que aparecen a la derecha de las cuatro igualdades son los considerados anteriormente en los anillos $M(\mathbb{Z}^n;R)$ y $M((\mathbb{Z}/2)^n;R)$.

Con el objetivo de definir derivaciones parciales y operadores borde de grado -1 y coderivaciones y cobordes de grado $+1$ en $M(\mathbb{E}^n;R)$, consideraremos, para $1 \le i \le n$, las aplicaciones $\mathrm{sig_i}$, $\mathrm{na_i}$, $\widetilde{\mathrm{na}}_\mathrm{i}\colon\colon \mathbb{Z}^\mathrm{n} \times (\mathbb{Z}/2)^\mathrm{n} \to \mathbb{Z}$ dadas por

$$\mathrm{sig_i(z,l)} = (-1)^{\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{i}} \mathrm{l_k}}\,, \quad \mathrm{na_i(z,l)} = (\mathrm{l_i} - 1)\,, \quad \widetilde{\mathrm{na}}_\mathrm{i}(\mathrm{z,l}) = \mathrm{l_i}\ .$$

Denotaremos $\mathrm{signa_i} = \mathrm{sig_i}\,\mathrm{na_i}$ y $\widetilde{\mathrm{signa}}_\mathrm{i} = \mathrm{sig_i}\,\widetilde{\mathrm{na}}_\mathrm{i}$.

Ahora, para cada $1 \le i \le n$, definimos el operador *i-ésima derivada parcial* ∂_i^- y el operador *i-ésima coderivada parcial* ∂_i

$$\partial_i^-, \partial_i\colon M(\mathbb{E}^n;R) \to M(\mathbb{E}^n;R)$$

por

$$\partial_i^- f = -\mathrm{na}_i\,(f(\mathrm{id} \times \overline{\mathrm{m}}_i) - f(\mathrm{m_i} \times \overline{\mathrm{m}}_\mathrm{i}))$$
$$\partial_i f = -\widetilde{\mathrm{na}}_i\,(f(\mathrm{id} \times \overline{\mathrm{s}}_i) - f(\mathrm{s}_i \times \overline{\mathrm{s}}_i))$$

y también el operador *borde* B^- y el operador *coborde* B

$$B^-, B\colon M(\mathbb{E}^n;R) \to M(\mathbb{E}^n;R)$$

por

$$B^- = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{sig}_i\, \partial_i^- \quad , \quad B = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{sig}_i\, \partial_i$$

Nótese que ∂_i^- , B^- tienen grado -1 y ∂_i , B tienen grado +1 .

Proposición 2 *Para el anillo $M(\mathbb{E}^n; R)$ se tiene:*

(a) *Los operadores ∂_i^-, d_i^-, δ_i^- verifican la siguiente relación*

$$\partial_i^- = -\mathrm{na}_i\, (d_i^- - d_i^- \delta_i^-)$$

(b) *Los operadores ∂_i , d_i , δ_i verifican la siguiente relación*

$$\partial_i = \widetilde{\mathrm{na}}_i (d_i + d_i \delta_i)$$

Si K es un subcomplejo de $\mathbb{E}^n$ notemos que

$$M(K; R) \cong \{f \in M(K; R) \,|\, f|_{\mathbb{E}^n \setminus K} = 0\}.$$

Denotemos por $M^{cs}(K; R) = \{f \in M(K; R) \,|\, \{(z, l) | f(z, l) \neq 0\}\text{es finito}\}$ y $M^{\infty}(K; R) = M(K; R)/M^{cs}(K; R)$.

Los operadores borde B^- y coborde B anteriores inducen estructuras de complejos de cadenas sobre estos anillos que dan lugar a las siguientes homologías:

$$H_*(M(K; R)) \cong H_*^{lf}(K; R)\,, \quad H_*(M^{cs}(K; R)) \cong H_*^{sing}(K; R)$$

$$H_*(M^{\infty}(K; R)) \cong H_*^{\infty}(K; R)$$

y a sus correspondientes cohomologías:

$$H^*(M(K; R)) \cong H^*_{sing}(K; R)\,, \quad H^*(M^{cs}(K; R)) \cong H^*_{cs}(K; R)$$

$$H^*(M^{\infty}(K; R)) \cong H^*_{\infty}(K; R)$$

que recuperan las homologías localmente finita, singular y del infinito y las cohomologías de soporte compacto, singular y del infinito como reflejan los isomorfismos señalados.