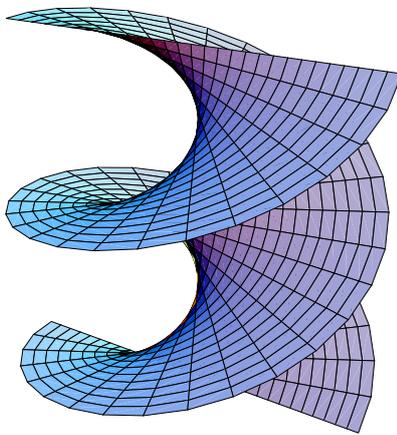


Luis Javier HERNÁNDEZ PARICIO

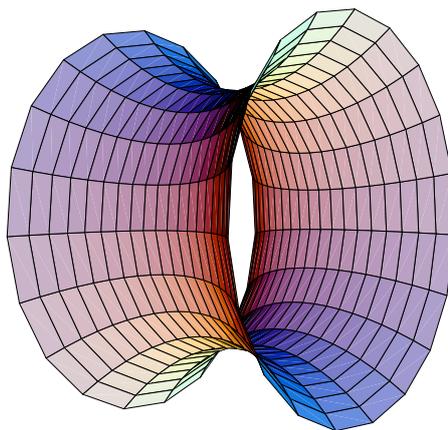
y

María Teresa RIVAS RODRÍGUEZ

**GRUPO FUNDAMENTAL,  
SUPERFICIES, NUDOS Y  
APLICACIONES RECUBRIDORAS**



Helicoide recubriendo al Catenoide



**UNIVERSIDAD DE LA RIOJA  
SERVICIO DE PUBLICACIONES**

**Hernández Paricio, Luis Javier**

**Rivas Rodríguez, María Teresa**

Basado en los apuntes realizados durante el curso 2002-2003 para la asignatura denominada Homotopía del tercer curso de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de la Rioja.

ISBN:

**2000 Mathematics Subject Classification:** Primary: 14F35, 14H30, 14E20, 57M10. Secondary: 20F29, 57M05.

**Key words and phrases:** Covering projection, fundamental group, fundamental groupoid, surface, knot, link, locally path-connected space, locally simply connected space,  $\pi$ -sets, continuous  $\pi$ -sets.

**Palabras y frases clave:** Aplicación recubridora, grupo fundamental, grupoide fundamental, superficie, nudo, enlace, espacio localmente conexo por caminos, espacio semilocalmente simplemente conexo,  $\pi$ -conjunto,  $\pi$ -conjunto continuo.

Reservados todos los derechos. No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, bajo ninguna forma, ni por ningún medio, electrónico o mecánico, ni por fotocopia ni por grabación, ni por ningún otro sistema de almacenamiento, sin permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

©Copyright by

Luis Javier Hernández Paricio y María Teresa Rivas Rodríguez

Logroño 2008

Universidad de La Rioja

Servicio de Publicaciones

ISBN:

Depósito Legal: LR

Maquetación e Impresión:

Portada:

## Índice general

INTRODUCCIÓN	1
1. Algunos aspectos históricos y actuales	1
2. Objetivos	2
3. Comentarios	3
4. Algunas aplicaciones científicas recientes	5
5. Notas y agradecimientos	7
Capítulo 1. RELACIÓN DE HOMOTOPÍA	9
1. Nociones y notaciones básicas	9
1.1. Espacios topológicos y aplicaciones continuas	9
1.2. Base de una topología	10
1.3. Propiedades topológicas	11
1.4. Construcciones	11
1.5. Algunos espacios	12
2. Homotopía y homotopía relativa	14
3. Tipo de homotopía y retractos por deformación	20
Capítulo 2. GRUPO FUNDAMENTAL	29
1. Producto de caminos	29
2. Grupoide y grupo fundamental	34
Capítulo 3. EL GRUPO FUNDAMENTAL DE LA 1-ESFERA	43
1. Homeomorfismos locales y aplicaciones recubridoras	43
2. Grupo fundamental de la circunferencia	51
Capítulo 4. TEOREMA DE SEIFERT VAN-KAMPEN	57
1. Preliminares sobre grupos	57
1.1. Presentaciones de grupos.	57
1.2. Presentaciones de grupos abelianos.	61
2. Teorema de Seifert-van Kampen	65
Capítulo 5. SUPERFICIES	79
1. Conjuntos semi-simpliciales	79
2. Complejos celulares	81
3. Clasificación de las superficies trianguladas	84
4. Clasificación de las superficies trianguladas con borde	97
Capítulo 6. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE NUDOS Y ENLACES	101

1. Nudos y enlaces	102
2. Presentación de Wirtinger de un nudo	107
3. Nudos tóricos	114
4. Nudos primos y alternantes	116
5. Superficie de Seifert de un nudo	120
6. Software sobre nudos	120
6.1. Knot Theory	121
6.2. Knotscape	121
6.3. KhoHo	121
6.4. Knot Plot	121
6.5. Knotlilus	121
7. Algunas páginas web sobre nudos y enlaces	122
Capítulo 7. ESPACIOS RECUBRIDORES	125
1. Propiedades de elevación	125
2. Acción del grupo fundamental de la base en la fibra	128
3. Clasificación de las aplicaciones recubridoras	135
4. Espacios localmente conexos por caminos	141
5. Espacios recubridores sobre espacios generales	145
Índice alfabético	151
Bibliografía	153
Referencias de artículos y monografías	155

# INTRODUCCIÓN

## 1. Algunos aspectos históricos y actuales

El estudio de poliedros mediante técnicas topológicas para dimensiones 1 y 2 data al menos de los tiempos de Euler. Parece ser que Listing, discípulo de Gauss, fue el primero en utilizar la palabra “topología”. En su libro “Vorstudien zur Topologie” (Estudios previos de Topología), de 1847, aludía a la Topología como la doctrina que describe el modo en el que están compuestos los objetos a base de puntos, líneas, superficies, cuerpos y otros agregados, siempre sin mirar medidas ni cantidades.

La palabra homotopía fue utilizada por primera vez por Dehn y Heegard en 1907, aunque el concepto de homotopía, como deformación continua de aplicaciones, ya había sido utilizado por Jordan en 1866.

La noción de grupo fundamental de un espacio fue introducida por Poincaré en 1895, veáse figura 1. A él también le debemos una de las más famosas conjeturas en Topología: “*Si una 3-variedad compacta y conexa tiene el mismo tipo de homotopía que una 3-esfera, entonces también tiene el mismo tipo de homeomorfía.*”



FIGURA 1. Jules Henry Poincaré

Esta conjetura ha sido seleccionada como uno de los siete principales problemas matemáticos más importantes del siglo XXI por el Instituto Matemático Clay. Su resolución lleva asociado un premio de un millón de dólares y son muy frecuentes los intentos de su demostración.

El 11 de noviembre de 2002, el matemático ruso Dr. Grigori (Gris-ha) Perelman, veáse figura 2, del Instituto Matemático Steklov, que forma parte de la Academia Rusa de las Ciencias de San Petersburgo, puso a disposición de la comunidad matemática su preprint “The entropy formula for the Ricci Flow and its geometric implications”. Éste contiene una demostración de la Conjetura de Geometrización de Thurston que plantea una clasificación precisa de 3-variedades y como caso particular quedaría probada la conjetura de Poincare.



FIGURA 2. Grigory Perelman

En Abril de 2003, Perelman ofreció un ciclo de conferencias en el prestigioso “Massachusetts Institute of Technology” sobre los resultados obtenidos acerca de las conjeturas de Thurston y de Poincare.

Puesto que en el momento de redactar estos apuntes el Instituto Matemático Clay no ha confirmado la verosimilitud de los intentos de demostración existentes, el animoso lector puede encontrar motivador el hecho de que después de la lectura de éstos, ya estará en condiciones de iniciar sus propios caminos de investigación para intentar resolver uno de los siete principales problemas matemáticos del siglo XXI. Sin embargo le aconsejamos que consulte previamente si el Instituto Matemático Clay ha emitido un veredicto definitivo sobre la demostración de Perelman o de otras posteriores que hayan podido aparecer.

## 2. Objetivos

A través de este texto se pretenden alcanzar los siguientes objetivos:

1) Que se conozcan los métodos básicos para transformar problemas topológicos en problemas algebraicos e ilustrar cómo esta técnica aporta buenos resultados en muchos casos importantes.

2) Una primera familiarización con espacios tan notables como las superficies (o más generalmente las variedades topológicas), los complementos de nudos y enlaces y los poliedros.

3) La introducción del grupo fundamental como una primera herramienta algebraica que resuelve determinados problemas, dando además adecuados algoritmos que permitan encontrar alguna de sus presentaciones.

4) Dar aplicaciones concretas que prueben la efectividad resolutoria de los invariantes analizados, tales como la clasificación de cubiertas y superficies compactas y algunas familias de nudos.

5) Dar una visión del potencial de las aplicaciones que el grupo fundamental tiene en otros campos científicos, tecnológicos y artísticos.

### 3. Comentarios

Este texto está basado en los apuntes que se elaboraron mientras se impartía una asignatura denominada “Homotopía” en la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de La Rioja en el curso 2002-2003. En la selección de los contenidos fue determinante el factor del tiempo disponible que era de tres horas durante nueve semanas, es decir de unas 27 horas. Es ésta la razón que hace que sólo se hayan incluido algunas de las numerosas e importantes aplicaciones que tiene el grupo fundamental. Sin embargo, los contenidos de aquel curso se han ampliado con la clasificación de las aplicaciones recubridoras de espacios localmente conexos.

Aunque se supone que el lector está familiarizado con la topología, hemos incluido en la primera sección del primer capítulo las definiciones de espacio y aplicación continua, las propiedades topológicas que se utilizan en este texto y los métodos de construcción básicos: subespacios, sumas disjuntas, productos y cocientes.

En el primer capítulo se introduce la relación de homotopía y homotopía relativas y se establece la noción de tipo de homotopía. Se intenta que el lector construya homotopías utilizando argumentos de geometría elemental. Para facilitar la comprensión la noción de tipo de homotopía será de gran ayuda la noción de retracts por deformación fuerte. Se proponen diversos problemas para desarrollar habilidades en el uso de homotopías y deformaciones fuertes. Normalmente se incluye la solución de muchos de los problemas propuestos. Sin embargo el alumno debe intentar previamente encontrar su propia solución. Hay que aclarar que un problema puede tener soluciones correctas que sean muy diferentes entre sí.

El capítulo segundo se dedica al estudio del grupo fundamental de un espacio. Hemos preferido introducir la noción de grupoide fundamental ya que lleva exactamente el mismo esfuerzo que la de grupo fundamental. Utilizando la noción de grupoide fundamental se puede probar más fácilmente que dos puntos base de un espacio arco-conexo determinan grupos fundamentales isomorfos y también facilita el estudio posterior de acciones en cubiertas. Hemos utilizado reiteradamente el truco que asegura que un camino es homótopo a sus reparametrizaciones. Sin embargo aconsejamos al lector que mire también las demostraciones que aparecen en otros textos que construyen homotopías definiéndolas a trozos y utilizando argumentos geométricos muy básicos.

Dedicamos el tercer capítulo al estudio de la noción de grado de un lazo. Ello lo hacemos a través de la aplicación recubridora universal de la circunferencia. Después de probar los teoremas de elevación de caminos y homotopías para cualquier aplicación recubridora, probamos que el grupo de la 1-esfera es isomorfo al grupo cíclico infinito. El lector se puede sorprender del gran esfuerzo que lleva el cálculo de grupo fundamental de la circunferencia. Sin embargo una vez establecido el resultado y utilizando las técnicas que desarrollamos en el capítulo siguiente se puede abordar el cálculo de presentaciones de grupos fundamentales de importantes espacios. Un método alternativo para calcular el grupo fundamental de la circunferencia hubiera consistido en el uso de técnicas simpliciales que aproximan una aplicación continua por una simplicial y el uso de grupos generados por caminos de aristas.

Antes de dar métodos de cálculo del grupo fundamental, considerando que algunos lectores pueden no estar familiarizados con las presentaciones de grupos, hemos estimado oportuno introducir algunos mínimos necesarios sobre grupos libres y presentaciones de grupos. Es interesante mencionar el problema de las palabras y destacar las dificultades que surgen al intentar probar que dos presentaciones determinan grupos isomorfos.

Para poder realizar el cálculo de presentaciones del grupo fundamental se incluye el teorema de Seifert-van Kampen. Ello permite que bajo algunas condiciones se pueda calcular la presentación de un espacio que es la reunión de dos subespacios a partir de las presentaciones de los subespacios y algunas propiedades de los generadores del grupo fundamental de la intersección. En algunos ejemplos, es más fácil obtener un espacio mediante un proceso de adjunción de celdas. Por este motivo es interesante utilizar el teorema de Seifert-van Kampen para obtener una presentación del grupo fundamental del espacio resultante al adjuntar una  $n$ -celda cualquiera,  $n \geq 2$ , en función de la presentación del espacio inicial y de las propiedades de la aplicación amalgamadora. Este método suele determinar presentaciones más sencillas y es aplicable para calcular el grupo fundamental de cualquier complejo de celdas.

La definición de aplicación recubridora se ilustra convenientemente con algunos ejemplos como la cubierta universal de la circunferencia, del toro y del plano proyectivo. Una de las aplicaciones más notable de grupo fundamental es la clasificación de aplicaciones recubridoras (cubiertas). A continuación, clasificamos mediante representaciones del grupo fundamental, las aplicaciones recubridoras de un espacio que verifique buenas condiciones de conectividad local.

Entre los diversos resultados sobre aplicaciones recubridoras y aplicaciones entre cubiertas resaltaremos la estructura de  $\pi$ -conjunto que tiene la fibra de una cubierta y el hecho que el grupo de superposiciones de una cubierta es isomorfo al grupo de automorfismos de la estructura

de  $\pi$ -conjunto que tiene la fibra. Este resultado nos indica la estrecha relación existente entre la categoría de las cubiertas de un espacio con grupo fundamental  $\pi$  y la categoría de  $\pi$ -conjuntos.

Destacaremos también el caso de cubiertas regulares y su relación con grupos propiamente discontinuos de homeomorfismos. Este caso, en mi opinión, es muy interesante y tiene importantes aplicaciones en geometría diferencial y riemanniana.

Finalizamos el estudio de cubiertas con los teoremas de clasificación. Introducimos la noción de espacio localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Para estos espacios se prueba la existencia de una cubierta universal y en este caso se pueden clasificar las cubiertas del espacio en términos de clases de conjugación de los subgrupos del grupo fundamental. En estas notas desarrollamos la versión alternativa en términos de clases de isomorfismo de  $\pi$ -conjuntos (transitivos) que en el caso de cubiertas de  $n$  hojas se puede formular en base a las representaciones transitivas del grupo fundamental en el grupo simétrico de  $n$  cifras, módulo conjugación.

Terminamos el último capítulo, estudiando y clasificando las aplicaciones recubridoras sobre un espacio localmente conexo por caminos, para el que ya no se supone que satisface la condición de ser semilocalmente simplemente conexo. Para ello utilizamos dotamos al grupo fundamente una estructura adicional de grupo topológico y utilizamos representaciones continuas de dicho grupo fundamental topológico.

#### 4. Algunas aplicaciones científicas recientes

Los métodos topológicos están siendo utilizados por diversos investigadores en algunas áreas científicas. Señalaremos brevemente algunas aplicaciones del grupo fundamental en las áreas de Virología y de la Química de los Fullerenos.

**Virología:** En esta ciencia además de estudiar la estructura poliedral de la envoltura del virus que se denomina cápside en cuyo estudio juega un papel interesante su estructura poliedral y el grupo de sus simetrías tiene también gran importancia el ácido envuelto por la cápside de los virus, que se presenta como una madeja filamentosa de una o más hebras. La estructura de éstos ácidos es susceptible de ser analizada con técnicas topológico-geométricas, fundamentalmente teoría de nudos. Véase la Figura 3. Existen actualmente trabajos en este sentido encaminados al análisis de los anudamientos o enlaces topológicos que presenta un ácido viral (u otro tipo de ácido genético) y sus posibles modificaciones en fenómenos de replicación o en experimentos de manipulación genética. En estos apuntes se va a introducir el grupo fundamental, una de las herramientas matemáticas más utilizada en el estudio de estos anudamientos y enlaces. Se denomina grupo fundamental de un nudo el grupo fundametal de su complemento en el

espacio euclidio (si se prefiere el complemento se puede tomar en la 3-esfera).

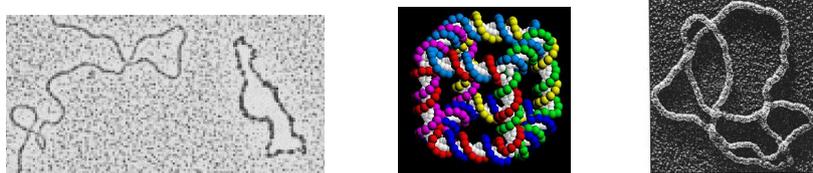


FIGURA 3. Anudamientos del ADN

**Química:** Una reciente rama de la química, especialmente rica en investigación y en la que el uso de técnicas poliedrales es muy amplio, es la de los fullerenos. Este campo se inició con el descubrimiento en 1985 de la molécula  $C_{60}$ , que fue bautizada con el nombre de buckminsterfullereno, y abreviadamente se le llama fullereno, en honor del arquitecto R. B. Fuller. Véase la Figura 4. Esta molécula consiste en 60 átomos de carbono unidos mediante doce pentágonos y veinte hexágonos. Su forma es la misma que la de un balón de fútbol y aproximadamente su tamaño es al del balón como el de éste es al de la Tierra; en este caso la estructura poliedral es muy simple, en el sentido de que consta de un solo poliedro que es un icosaedro truncado.

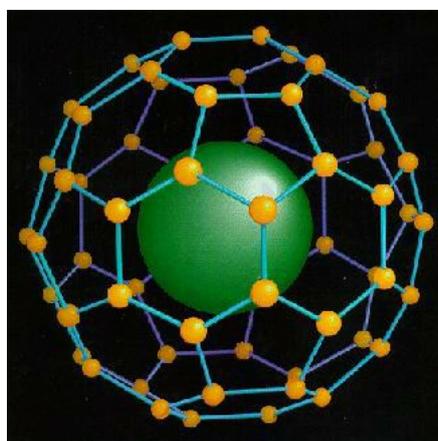


FIGURA 4. Fullereno  $C_{60}$

Del carácter tetravalente del carbono  $C$  resultan cuatro posibles situaciones de un vértice que denotaremos por 31, 22, 211 y 1111. En la mayoría de los fullerenos todos los enlaces son del tipo 211; en consecuencia, sus grafos asociados tienen la propiedad de que cada vértice incide con tres aristas (grafos 3-regulares). En estos grafos se pueden distinguir los enlaces dobles coloreando la familia de aristas que se corresponden con los mismos.

Es interesante señalar que a cada grafo 3-regular se le puede asociar su grupo de isometrías y, si se tienen aristas coloreadas (enlaces dobles), tomar entonces el subgrupo de aquéllas que las preservan. De este modo a cada grafo con aristas coloreadas le hemos asociado una pareja de grupos. Observemos que si en el mismo grafo 3-regular cambiamos de familia de aristas coloreadas (es decir, consideramos dos isómeros) puede suceder que el subgrupo asociado sea distinto. Sin embargo, existen ejemplos de grafos 3-regulares con aristas coloreadas que son distintos y tienen asociada la misma pareja de grupos de simetría; en este caso, se puede diseñar una herramienta matemática más fina capaz de distinguir estos isómeros. Se procede del modo siguiente: cambiando cada enlace doble por un cruce de caminos a distinto nivel, podemos asociar a cada fullereno con enlaces químicos dobles un enlace o nudo topológico susceptible de ser estudiado con técnicas homotópicas. Véase la Figura 5. Las diferentes posibles posiciones de los dobles enlaces químicos determinan enlaces topológicos distintos y la clasificación de estos isómeros se aborda a través de los invariantes homotópicos del enlace o nudo topológico asociado. Utilizando el grupo fundamental del complemento del enlace o sus invariantes de tipo polinómico se pueden distinguir isómeros que no han podido diferenciarse a través de los grupos de simetría.

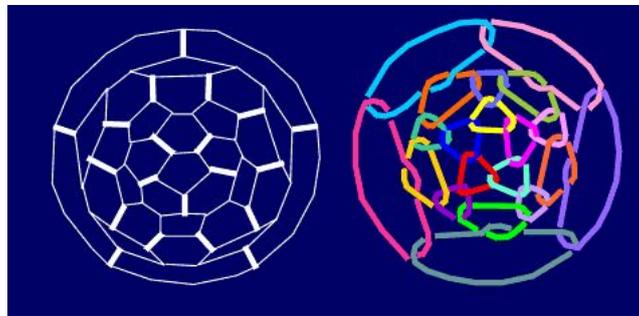


FIGURA 5. Enlace topológico de un fullereno

## 5. Notas y agradecimientos

Por ser la primera edición, el texto puede contener algunas erratas, rogamos al lector que disculpe estos posibles fallos. También le pedimos que utilice el siguiente correo electrónico para remitirnos los errores que encuentre y, por supuesto, para enviar cualquier tipo de comentario o sugerión.

`luis-javier.hernandez@dmc.unirioja.es`

El que desee más información sobre el autor o sobre otros materiales didácticos para la docencia sobre temas de homotopía y geometría puede encontrarla en la página web:

<http://www.unirioja.es/dptos/dmc/luhernan>

Para la elaboración de este libro, he utilizado diversos materiales, especialmente los apuntes, junto con una colección de problemas, realizados por los Profesores, compañeros de la Universidad de La Rioja, José Ignacio Extremiana Aldana y María Teresa Rivas Rodríguez. Quiero agradecerles su colaboración, las sugerencias recibidas y la corrección de algunos errores. Su ayuda desinteresada ha contribuido en gran medida, sin duda alguna, a mejorar la redacción de estas notas.

También resultó motivador un seminario sobre “Topología y Categorías” que se realizó en Septiembre de 2003, en La Rioja, en el que, además de los Profesores mencionados, participaron: Eduardo Dubuc, Luis Español, Vlasta Matijević y María del Carmen Mínguez.

## CAPÍTULO 1

# RELACIÓN DE HOMOTOPÍA

En este primer capítulo analizamos las relaciones de homotopía y homotopía relativa e introducimos la noción de tipo de homotopía. También estudiamos las nociones de retracto, retracto por deformación y retracto por deformación fuerte que son muy útiles en el estudio de los tipos de homotopía.

### 1. Nociones y notaciones básicas

En esta primera sección se introducen algunos conceptos básicos de Topología, no obstante, señalaremos que para poder seguir sin dificultades estas notas, es conveniente que el lector conozca las nociones y propiedades básicas de los espacios topológicos.

#### 1.1. Espacios topológicos y aplicaciones continuas.

DEFINITION 1.1. Sea  $X$  un conjunto y sea  $\tau$  una familia no vacía de subconjuntos de  $X$ . Se dice que  $\tau$  es una *topología* si  $\tau$  es cerrada por uniones de subfamilias arbitrarias (la unión de la subfamilia vacía es el subconjunto vacío) y por intersección de subfamilias finitas (la intersección de la subfamilia vacía es el conjunto total  $X$ ). Llamaremos *espacio topológico* a un par  $(X, \tau)$  donde  $\tau$  es una topología en el conjunto  $X$ . Normalmente acortaremos la notación de modo que  $X$  denotará tanto al par  $(X, \tau)$  como al conjunto subyacente. Los miembros de la topología  $\tau$  diremos que son los *abiertos* del espacio  $X$ .

Notemos que dado un espacio topológico el propio  $X$  y el subconjunto vacío  $\emptyset$  son abiertos.

EJEMPLO 1.1. Dado un conjunto  $X$  se puede considerar la topología trivial  $\tau_{\text{tri}} = \{X, \emptyset\}$  y la topología discreta  $\tau_{\text{dis}}$  formada por todos los subconjuntos de  $X$ .

DEFINITION 1.2. Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Se dice que una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es *continua* si para todo abierto  $V$  de  $Y$  se tiene que  $f^{-1}V$  es abierto en  $X$ . Diremos que  $X, Y$  son *homeomorfos* si existen aplicaciones continuas  $\varphi: X \rightarrow Y$  y  $\psi: Y \rightarrow X$  tales que  $\psi\varphi = \text{id}_X$ ,  $\varphi\psi = \text{id}_Y$ , donde  $\text{id}_X, \text{id}_Y$  son las aplicaciones identidad.

EJEMPLO 1.2. Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $A \subset X$  un subconjunto de  $X$ . La familia  $\tau/A = \{A \cap U | U \in \tau\}$  es una topología sobre

el conjunto  $A$  que se llama la *topología relativa* de  $X$  en  $A$ . Es fácil comprobar que la inclusión  $\text{in}: A \rightarrow X$  es una aplicación continua.

DEFINITION 1.3. Sea  $X$  un espacio topológico. Diremos que  $F$  es un *cerrado* si  $X \setminus F$  es un abierto de  $X$ . Sea  $N$  un subconjunto de  $X$  y  $p \in N$ . Se dice que  $N$  es un *entorno* de  $p$  si existe un abierto  $U$  tal que  $p \in U \subset N$ . Dado un subconjunto  $A$  de  $X$  llamaremos *interior* de  $A$ , y lo denotamos por  $\text{Int}A$ , a la reunión de los abiertos contenidos en  $A$ . Llamaremos *clausura* de  $A$  que denotaremos por  $\text{cl}A$  a la intersección de los cerrados que contienen a  $A$ .

## 1.2. Base de una topología.

DEFINITION 1.4. Sea  $\tau$  la topología de un espacio topológico  $X$ . Se dice que una subfamilia  $\mathcal{B} \subset \tau$  es una *base de la topología*  $\tau$  si para cada abierto  $U$  existe una subfamilia  $\mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}$  tal que  $U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B$ .

PROPOSICIÓN 1.1. Sea  $X$  un conjunto y sea  $\mathcal{B}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Si la familia de subconjuntos  $\mathcal{B}$  verifica las siguientes propiedades

- (i)  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ ,
- (ii) Si  $p \in B \cap B'$ ,  $B, B' \in \mathcal{B}$ , entonces existe  $B'' \in \mathcal{B}$  tal que  $p \in B'' \subset B \cap B'$ ,

entonces existe una única topología  $\tau$  tal que  $\mathcal{B}$  es una base de  $\tau$ .

DEFINITION 1.5. Sea  $X$  un espacio topológico y  $p \in X$ . Una familia de entornos  $\mathcal{B}_p$  es una *base de entornos* de  $p$  si para cada entorno  $N$  de  $p$  existe  $B \in \mathcal{B}_p$  tal que  $p \in B \subset N$ .

En estos apuntes diremos que un conjunto es contable si su cardinalidad es finita o es la del conjunto de los números naturales. Otros autores utilizan para este concepto la palabra numerable.

DEFINITION 1.6. Sea  $X$  un espacio topológico. Diremos que  $X$  es *primero contable* si para cada punto  $p \in X$  existe una base de entornos contable. Se dice que  $X$  es *segundo contable* la topología tiene una base contable.

EJEMPLO 1.3. Denotemos por  $\mathbb{R}$  el conjunto ordenado de los números reales y consideremos la familia de los intervalos abiertos acotados  $\mathcal{B} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ , donde  $(a, b) = \{r \in \mathbb{R} | a < r < b\}$ . Entonces  $\mathcal{B}$  satisface las propiedades (i) y (ii) de la proposición anterior y determina una única topología en  $\mathbb{R}$ , que diremos que es la topología habitual o usual. Consideraremos también con frecuencia el subespacio que llamaremos intervalo unidad  $I = \{r \in \mathbb{R} | 0 \leq r \leq 1\}$  con la topología relativa inducida por la topología usual de  $\mathbb{R}$ .

EJEMPLO 1.4. Denotemos por  $\mathbb{C}$  el conjunto de los números complejos. Dado un número complejo  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , su conjugado

se denota por  $\bar{z} = a - bi$  y su módulo por  $|z| = (z\bar{z})^{\frac{1}{2}}$ . Consideremos la familia bolas  $\mathcal{B} = \{B(a, r) | a \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ , donde  $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} | |z - a| < r\}$ . Entonces  $\mathcal{B}$  satisface las propiedades (i) y (ii) de la proposición anterior y determina una única topología en  $\mathbb{C}$ , que será la que usaremos de modo habitual en este conjunto.

**1.3. Propiedades topológicas.** Además de las propiedades de primero contable y segundo contable es muy frecuente el uso de las siguientes propiedades topológicas.

**DEFINITION 1.7.** Se dice que un espacio topológico  $X$  es  $T_0$  si para cada pareja de puntos  $p, q \in X$ ,  $p \neq q$  existe  $U$  entorno de  $p$  tal que  $q \notin U$  o existe  $V$  entorno de  $q$  tal que  $p \notin V$ . Diremos que  $X$  es  $T_1$  si para cada pareja de puntos  $p, q \in X$ ,  $p \neq q$  existe  $U$  entorno de  $p$  tal que  $q \notin U$ . Se dice que un espacio topológico  $X$  es  $T_2$  o *Hausdorff* si para cada pareja de puntos  $p, q \in X$ ,  $p \neq q$  existe  $U$  entorno de  $p$  y existe  $V$  entorno de  $q$  tal que  $U \cap V = \emptyset$ .

Es fácil ver que si  $X$  es  $T_2$  entonces es  $T_1$  y que si  $X$  es  $T_1$  entonces es  $T_0$ .

**DEFINITION 1.8.** Se dice que espacio topológico  $X$  es *conexo* si siempre que  $X = U \cup V$  con  $U \cap V = \emptyset$ , entonces  $U = \emptyset$  o  $V = \emptyset$ . Diremos que un espacio topológico  $X$  es *localmente conexo* si cada punto del espacio tiene una base entornos conexos.

**DEFINITION 1.9.** Se dice que espacio topológico  $X$  es *conexo por caminos* (también decimos *arco-conexo*) si siempre que  $x, y \in X$ , entonces existe una aplicación continua  $f: I \rightarrow X$  tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$ . Diremos que un espacio topológico  $X$  es *localmente conexo por caminos* (*localmente arco-conexo*) si cada punto del espacio tiene una base entornos conexos por caminos.

Es bien conocido que la conectividad por caminos implica conectividad.

**1.4. Construcciones.** Dada una familia de espacios  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$  consideraremos la *suma disjunta* (coproducto)  $\sum_{\alpha \in A} X_\alpha$  formada por el conjunto  $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \times \{\alpha\}$  con la topología inducida por la base

$$\mathcal{B} = \{U \times \{\alpha\} | U \text{ es abierto en } X_\alpha, \alpha \in A\}$$

En el caso que la familia verifique que estos espacios sean disjuntos dos a dos, para tener una mayor facilidad en la notación, en vez de tomar la reunión anterior se suele tomar directamente la reunión  $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$  y consecuentemente la base  $\mathcal{B} = \{U | U \text{ es abierto en } X_\alpha, \alpha \in A\}$ . En el caso de familias finitas, por ejemplo para dos espacios  $X_1, X_2$ , es frecuente usar las notaciones  $\bigsqcup_{i \in \{1,2\}} X_i$  o  $X_1 \sqcup X_2$ .

Otra construcción frecuente asociada a una familia de espacios  $X_\alpha$   $\alpha \in A$  es el *producto*  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  que tiene como conjunto soporte el producto cartesiano usual y si  $\text{pr}_\alpha$  denota la proyección canónica asociada a  $\alpha \in A$ , se considera la topología producto inducida por la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} \text{pr}_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \mid U_{\alpha_i} \text{ es abierto en } X_{\alpha_i}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A \right\}$$

En el caso de familias finitas, por ejemplo para dos espacios  $X_1, X_2$  se suele usar la notación  $X_1 \times X_2$ .

Finalizamos el proceso de construcción de nuevos espacios topológicos a partir de otros dados con la topología cociente. Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación exhaustiva de  $X$  en un conjunto  $Y$ . La topología *cociente* en el conjunto  $Y$  es la formada por aquellos subconjuntos  $V$  de  $Y$  tales que  $f^{-1}V$  es un abierto de  $X$ . Es interesante recordar que si en  $Y$  se considera la topología cociente y  $g: Y \rightarrow Z$  es una aplicación entre espacios topológicos, entonces  $g$  es continua si y sólo si  $gf$  es continua. Nótese que además del término “exhaustiva” se utilizan para el mismo concepto las palabras: suprayectiva y sobreyectiva. A veces se utiliza “*sobre*” en expresiones del tipo, “sea  $f$  una aplicación de  $X$  *sobre*  $Y$ ”; equivale a decir que  $f$  es exhaustiva.

**1.5. Algunos espacios.** Los siguientes espacios serán utilizados con frecuencia en este texto.

**EJEMPLO 1.5.** Denotemos por  $\mathbb{R}^n$  el conjunto de  $n$ -tuplas de números reales  $(r_1, \dots, r_n)$ . Se considera en  $\mathbb{R}^n$  la topología producto que tiene las siguientes propiedades: Es segundo contable, Hausdorff, conexa por caminos y localmente conexa por caminos.

**EJEMPLO 1.6.** Para  $n \geq 0$ , la  $n$ -esfera unidad  $S^n$  se define como el subespacio

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

donde hemos considerado la topología relativa.

**EJEMPLO 1.7.** Para  $n \geq 0$ , el  $n$ -disco unidad  $D^n$  se define como el subespacio

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

con la topología relativa. La  $n$ -bola unidad la denotaremos por

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$$

**EJEMPLO 1.8.** Para  $n \geq 1$ , el semi- $n$ -disco unidad  $D_+^n$  se define como el subespacio

$$D_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1, \quad x_n \geq 0\}$$

con la topología relativa. La semi- $n$ -bola unidad la denotaremos por

$$B_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1, \quad x_n \geq 0\}$$

EJEMPLO 1.9. Para  $n \geq 0$ , el  $n$ -espacio proyectivo real  $P^n(\mathbb{R})$  se define como el cociente obtenido de la  $n$ -esfera  $S^n$  identificando puntos antípodos y considerando la topología cociente. Análogamente, se define el  $n$ -espacio proyectivo complejo  $P^n(\mathbb{C})$  y cuaterniónico  $P^n(\mathbb{H})$ . El caso  $P^n$  en el que no se indique el anillo de división, supondremos que se trata del  $n$ -espacio proyectivo real.

EJEMPLO 1.10. Una *métrica* en un conjunto  $X$  es una aplicación  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que satisface las siguientes propiedades:

(M1) Para  $x, y \in X$   $d(x, y) \geq 0$ , además  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ .

(M2) Si  $x, y \in X$ , se tiene que  $d(x, y) = d(y, x)$ .

(M3) Sean  $x, y, z \in X$ . Entonces  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

La bola de centro  $a \in X$  y radio  $r > 0$  se define como el subconjunto

$$B_d(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

y el disco

$$D_d(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

Un *espacio métrico* consiste en un conjunto  $X$  junto con una métrica  $d$ . En un espacio métrico  $(X, d)$  se puede considerar la siguiente familia de subconjuntos:

$$\tau = \{U \subset X \mid \text{Si } x \in U, \text{ existe } \epsilon > 0 \text{ tal que } B(x, \epsilon) \subset U\}$$

Se prueba que  $\tau$  es una topología, que diremos que está inducida por la métrica  $d$ . Un espacio topológico  $X$  se dice *metrizable* si su topología  $\tau_X$  está inducida por una métrica.

EJEMPLO 1.11. En  $\mathbb{R}^n$  se pueden considerar la *métrica euclidiana*, de modo que si  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  la aplicación  $d$  viene dada por

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

La topología inducida por la métrica euclidiana, es precisamente la hemos considerado en el ejemplo 1.5. Por ser la métrica más usual en la notación suprimiremos el subíndice

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \left( \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < r\}$$

y el disco

$$D(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \left( \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq r\}$$

También es frecuente la *métrica cartesiana*,  $\rho$ , dada por

$$\rho(x, y) = \text{máx}\{|x_i - y_i| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$

La topología inducida es también la del ejemplo 1.5 . Las bolas y discos se denotaran por  $B_\rho(a, r), D_\rho(a, r)$  .

EJEMPLO 1.12. Sea  $A$  un conjunto de índices, para cada  $\alpha \in A$  tomemos una copia  $I_\alpha$  del intervalo unidad y consideremos su borde  $\partial I_\alpha$  que está formado por una copia de los puntos de  $\partial I = \{0, 1\}$  . Sea ahora una relación  $r$  definida en la suma disjunta  $\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$  que tiene la propiedad que si dos puntos  $p, q$  de la suma están relacionados,  $p \sim_r q$  , entonces  $p, q \in \bigcup_{\alpha \in A} \partial I_\alpha$  . Denotemos por  $R$  la relación de equivalencia generada por  $r$  . Llamaremos grafo a un espacio topológico que sea homeomorfo a un espacio cociente de la forma  $(\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha) / R$  .

## 2. Homotopía y homotopía relativa

Dado un espacio topológico  $X$  , consideramos el producto  $X \times I$  , donde recordemos que  $I = [0, 1]$  denota el intervalo unidad.

DEFINICIÓN 2.1. Una aplicación continua de la forma  $F: X \times I \rightarrow Y$  se denomina *homotopía* . Diremos que dos aplicaciones  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  son *homótopas* y se denotará por  $f_0 \simeq f_1$  si existe una homotopía  $F: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = f_0(x), F(x, 1) = f_1(x)$  para todo  $x \in X$  . También diremos que  $F$  es una homotopía de  $f_0$  a  $f_1$  .

Llamaremos *cilindro* de  $X$  al espacio  $X \times I$  junto con las aplicaciones continuas  $\partial_0, \partial_1: X \rightarrow X \times I$  definidas por  $\partial_0(x) = (x, 0)$  y  $\partial_1(x) = (x, 1)$  . En el caso que trabajemos con varios espacios utilizaremos los superíndices  $\partial_1^X, \partial_1^X$  para las “tapas” asociadas con el espacio  $X$  . Utilizando las tapas  $\partial_0, \partial_1$  del cilindro se tiene que  $f_0 \simeq f_1$  si existe una homotopía  $F$  tal que  $F\partial_0 = f_0$  y  $F\partial_1 = f_1$  . Es decir si los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_0} & Y \\ \partial_0 \downarrow & \nearrow F & \\ X \times I & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y \\ \partial_1 \downarrow & \nearrow F & \\ X \times I & & \end{array}$$

o equivalentemente, si el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{f_0+f_1} & Y \\ \partial_0+\partial_1 \downarrow & \nearrow F & \\ X \times I & & \end{array}$$

donde  $X \sqcup X$  denota la reunión disjunta, ver 1.4, de dos copias del espacio  $X$  .

DEFINICIÓN 2.2. Sea  $\alpha: A \rightarrow X$  una aplicación continua. Diremos que dos aplicaciones  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  son *homótopas relativamente* a  $A$  y se denotará por  $f_0 \simeq_A f_1$  si existe una homotopía  $F: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = f_0(x), F(x, 1) = f_1(x)$  para todo  $x \in X$  y  $F(\alpha(a), t) =$

$f_0(\alpha(a))$  para todos  $a \in A$  y  $t \in I$ . En el caso que simultáneamente se consideren diferentes aplicaciones  $\alpha: A \rightarrow X$  utilizaremos la notación  $f_0 \simeq_\alpha f_1$  y diremos que  $f_0$  es homótopa a  $f_1$  relativamente a  $\alpha$ .

Notemos que  $f_0 \simeq_A f_1$  si existe una homotopía  $F$  tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_0} & Y \\ \partial_0 \downarrow & \nearrow F & \\ X \times I & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_1} & Y \\ \partial_1 \downarrow & \nearrow F & \\ X \times I & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow F & \uparrow f_0 \alpha \text{pr}_A \\ X \times I & \xleftarrow{\alpha \times \text{id}_I} & A \times I \end{array}$$

donde  $\text{pr}_A: A \times I \rightarrow A$  está definida por  $\text{pr}_A(a, t) = a$ .

Dados dos espacios  $X, Y$ , sea  $X \sqcup Y$  la suma disjunta, si  $f: X \rightarrow Z$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  son aplicaciones continuas denotemos por  $f+g: X \sqcup Y \rightarrow Z$  la única aplicación continua determinada por  $f$  y  $g$ . Si  $\phi: X \rightarrow X'$  y  $\psi: Y \rightarrow Y'$  son aplicaciones continuas de modo natural inducen una aplicación continua  $\phi \sqcup \psi: X \sqcup Y \rightarrow X' \sqcup Y'$ .

Utilizando estas notaciones, la conmutatividad de los diagramas anteriores es equivalente a la del siguiente:

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{f_0+f_1} & Y \\ \partial_0+\partial_1 \downarrow & \nearrow F & \uparrow f_0 \alpha \text{pr}_A \\ X \times I & \xleftarrow{\alpha \times \text{id}_I} & A \times I \end{array}$$

**OBSERVACIÓN 2.1.** En primer lugar, notemos que si  $A = \emptyset$ , entonces la relación de homotopía relativa a  $A$  ( $\alpha$ ) coincide con la relación de homotopía. En segundo lugar, nótese que si para un cierto  $a \in A$  se tiene que  $f_0(\alpha(a)) \neq f_1(\alpha(a))$ , entonces  $f_0$  y  $f_1$  no son homótopas relativamente a  $A$ . Observemos que siempre se verifica que  $f_0 \simeq_A f_1$  ( $f_0 \simeq_\alpha f_1$ ) implica que  $f_0 \alpha = f_1 \alpha$ .

Puesto que la relación de homotopía es un caso particular de la de homotopía relativa, las propiedades de la homotopía relativa que mencionamos a continuación son también válidas para la relación de homotopía.

**LEMA 2.1.** La relación de homotopía relativa es una relación de equivalencia.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\alpha: A \rightarrow X$  una aplicación continua. Para ver que la relación es reflexiva tomemos  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Es fácil ver que  $f \text{pr}_X$  es una homotopía de  $f$  a  $f$  que es relativa a  $A$ . Sean ahora  $f, g: X \rightarrow Y$  y  $F$  una homotopía de  $f$  a  $g$ . Definamos la homotopía  $\bar{F}$  por la fórmula  $\bar{F}(x, t) = F(x, 1-t)$ . Entonces se tiene que  $\bar{F}$  es una homotopía de  $g$  a  $f$  relativa a  $A$ . Supongamos ahora que

$F$  es una homotopía de  $f$  a  $g$  y que  $G$  es una homotopía de  $g$  a  $h$ , ambas relativas a  $A$ . Definamos la homotopía  $H$  por la fórmula

$$H(x, s) = \begin{cases} F(x, 2s) & \text{if } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ G(x, 2s - 1) & \text{if } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Nótese que  $H$  está bien definida y que sus restricciones a los cerrados  $X \times [0, \frac{1}{2}]$  y  $X \times [\frac{1}{2}, 1]$  son continuas. Para obtener la continuidad de  $H$  basta aplicar un lema básico sobre continuidad “a trozos” que asegura que si  $\varphi: P \rightarrow Q$  es una aplicación entre espacios topológicos tal que  $P = F \cup F'$  es la reunión de subespacios cerrados  $F, F'$  y las restricciones  $\varphi|_F, \varphi|_{F'}$  son continuas, entonces  $\varphi$  es continua. Finalmente, es fácil comprobar que  $H$  es una homotopía de  $f$  a  $h$  relativa a  $A$ .  $\square$

Sean  $A$  un subconjunto de  $X$  y  $B$  un subconjunto de  $Y$ , denotemos por  $C(X, Y)$  el conjunto de aplicaciones continuas de  $X$  a  $Y$  y por  $C((X, A), (Y, B)) = \{f \in C(X, Y) \mid f(A) \subset B\}$ . En el caso particular que  $B = \{y_0\}$  utilizaremos la notación más sencilla  $(Y, y_0)$ . El conjunto cociente de  $C((X, A), (Y, y_0))$  inducido por la relación  $\simeq_A$  diremos que es el *conjunto de clases de homotopía* y lo denotaremos por

$$[(X, A), (Y, y_0)] = C((X, A), (Y, y_0)) / \simeq_A$$

Si  $A, B$  son vacíos utilizaremos las notaciones más simples  $C((X, Y)$  y  $[X, Y]$ , respectivamente.

En el caso que  $A = \{x_0\}, B = \{y_0\}$  sean unipuntuales normalmente usaremos la notación  $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ . Las parejas  $(X, x_0)$  se llaman *espacios basados* (a veces decimos *punteados*) y  $x_0$  se dice que es el punto base. Una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $f(x_0) = y_0$  diremos que es *basada* y una homotopía relativa al punto base diremos que es una *homotopía basada*.

**PROPOSICIÓN 2.1.** Sean  $A, X, Y$  y  $Z$  espacios y consideremos aplicaciones continuas  $\alpha: A \rightarrow X, \beta: A \rightarrow Y, f_0, f_1: X \rightarrow Y, g_0, g_1: Y \rightarrow Z$  tales que  $f_0\alpha = \beta = f_1\alpha, g_0\beta = g_1\beta$ . Si  $f_0 \simeq_A f_1$  y  $g_0 \simeq_A g_1$ , entonces  $g_0f_0 \simeq_A g_1f_1$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $F: X \times I \rightarrow Y$  una homotopía relativa a  $A$  de  $f_0$  a  $f_1$ . Entonces se tiene que  $F(\partial_0^X + \partial_1^X) = f_0 + f_1$  y  $F(\alpha \times \text{id}_I) = f_0\alpha \text{ pr}_A$ . Si componemos con  $g_0$  se obtiene que  $g_0F(\partial_0^X + \partial_1^X) = g_0f_0 + g_0f_1$  y  $g_0F(\alpha \times \text{id}_I) = g_0f_0\alpha \text{ pr}_A$ . Por lo tanto  $g_0f_0 \simeq_A g_0f_1$ . Por otra parte si  $G$  es una homotopía relativa a  $A$  ( $\beta$ ) de  $g_0$  a  $g_1$  se tiene que  $G(\partial_0^Y + \partial_1^Y) = g_0 + g_1$  y  $G(\beta \times \text{id}_I) = g_0\beta \text{ pr}_A$ . Componiendo con  $f_1 \times \text{id}_I: X \times I \rightarrow Y \times I$  se obtiene  $G(f_1 \times \text{id}_I)(\partial_0^X + \partial_1^X) = G(\partial_0^Y + \partial_1^Y)(f_1 \sqcup f_1) = (g_0 + g_1)(f_1 \sqcup f_1) = g_0f_1 + g_1f_1$  y  $G(f_1 \times \text{id}_I)(\alpha \times \text{id}_I) = G(f_1\alpha \times \text{id}_I) = G(\beta \times \text{id}_I) = g_0\beta \text{ pr}_A = g_0f_1\alpha \text{ pr}_A$ . Por lo tanto  $g_0f_1 \simeq_A g_1f_1$ . Aplicando el lema anterior y puesto que la relación de homotopía relativa es transitiva se concluye que  $g_0f_0 \simeq_A g_1f_1$ .  $\square$

EJEMPLO 2.1. Se dice que un subconjunto  $C$  de un espacio vectorial real es convexo si verifica que si  $p, q \in C$  entonces  $\text{seg}(p, q) \subset C$ , donde  $\text{seg}(p, q) = \{(1-t)p + tq | t \in I\}$ . Si  $X$  un espacio topológico y  $f, g: X \rightarrow C$  dos aplicaciones continuas con valores en un subconjunto convexo  $C$  de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $f$  es homótopa a  $g$ . En efecto, definamos  $F(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ . Se tiene que  $F$  es continua ya que  $f, g$  también lo son. Además

$$F(x, 0) = f(x) \quad , \quad F(x, 1) = g(x) \quad .$$

Por lo tanto  $f \simeq g$ . En este caso  $[X, C]$  es unipuntual ya que únicamente hay una clase de homotopía.

### PROBLEMAS

2.1. Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y  $e_y, e_{y'}: X \rightarrow Y$  aplicaciones constantes,  $e_y(x) = y$ ,  $e_{y'}(x) = y'$  para todo  $x \in X$ . Demostrar que  $e_y$  es homótopa a  $e_{y'}$  si y sólo si  $y$  e  $y'$  están en la misma componente por caminos de  $Y$ .

Solución: Supongamos que  $e_y \simeq e_{y'}$ , entonces existe  $F: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = e_y(x) = y$ ,  $F(x, 1) = e_{y'}(x) = y'$ . Para un  $x \in X$  definamos el camino  $f: I \rightarrow Y$  por  $f(s) = F(x, s)$ . Puesto que  $f(0) = y$ ,  $f(1) = y'$  se tiene que  $y, y'$  están en la misma componente conexa.

Recíprocamente, si  $y, y'$  están en la misma componente conexa por caminos, entonces existe  $f: I \rightarrow Y$  tal que  $f(0) = y$ ,  $f(1) = y'$ . Definamos  $F: X \times I \rightarrow Y$  por  $F = f \text{ pr}_I$ , donde  $\text{pr}_I$  es la proyección canónica. Entonces

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= f \text{ pr}_I(x, 0) = f(0) = y = e_y(x) \\ F(x, 1) &= f \text{ pr}_I(x, 1) = f(1) = y' = e_{y'}(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $e_y \simeq e_{y'}$ .

2.2. Sea  $X$  un espacio topológico y  $f, g: X \rightarrow S^n$  dos aplicaciones continuas tales que  $-f(x) \neq g(x)$  para todo  $x \in X$ . Probar que  $f$  es homótopa a  $g$ .

Solución: Recordemos que la  $n$ -esfera es el espacio dado por  $S^n = \{y | |y| = 1\}$ , donde  $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$  y  $|y| = (y_1^2 + \dots + y_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}$ . Definamos la homotopía  $F: X \times I \rightarrow S^n$  por

$$F(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{|(1-t)f(x) + tg(x)|}$$

Notemos que el denominador es no nulo, en caso contrario, si  $(1-t)f(x) + tg(x) = 0$ , entonces  $(1-t)f(x) = -g(x)$ . Por lo tanto  $(1-t)|f(x)| = t|g(x)|$ . Entonces  $1-t = t$ . Luego  $t = \frac{1}{2}$ . Esto implica que

$\frac{1}{2}f(x) = -\frac{1}{2}g(x)$ . En consecuencia  $f(x) = -g(x)$ , pero esta igualdad contradice las hipótesis del enunciado. Es inmediato comprobar que para todo  $x$  se tiene que  $F(x,0) = f(x)$ ,  $F(x,1) = g(x)$ . Por lo tanto  $f \simeq g$ .

2.3. Demostrar que si la aplicación continua  $f: X \rightarrow S^n$  no es exhaustiva, entonces  $f$  es homótopa a una aplicación constante.

Solución: Si  $f$  no es exhaustiva, entonces existe  $y \in S^n$  tal que  $y \neq f(x)$  para todo  $x \in X$ . Consideremos la aplicación constante  $-y$ . Notemos que se verifica que  $-(-y) \neq f(x)$  para todo  $x \in X$ . Por el ejercicio 2.2 se tiene que  $-y \simeq f$ .

2.4. Sea  $f$  es un camino en un espacio  $X$  y definamos  $\bar{f}: I \rightarrow X$  mediante la fórmula  $\bar{f}(t) = f(1-t)$ . Probar que  $f$  es homótopo a un camino  $g$  si y sólo si  $\bar{f}$  es homótopo a  $\bar{g}$ .

2.5. Sean  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(t) = t$ ,  $g(t) = 2t$ . Probar

- el camino  $f$  es homótopo  $g$ ,
- $f$  es homótopo a  $g$  relativamente a  $\{0\}$ ,
- $f$  no es homótopo a  $g$  relativamente a  $\{0,1\}$ .

Solución: Sea la homotopía  $F: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(t, \lambda) = (1-\lambda)t + \lambda 2t$ . Notemos que

$$F(t, 0) = t = f(t)$$

$$F(t, 1) = 2t = g(t)$$

Entonces  $f \simeq g$ .

b) En este caso la aplicación  $\alpha: A \rightarrow X$  es la inclusión  $\text{in}: \{0\} \rightarrow I$ ,  $\text{in}(0) = 0$ . Además de lo probado en a) se tiene que para todo  $\lambda$  se verifica

$$F(\alpha(a), \lambda) = F(\text{in}(0), \lambda) = 0 = f \text{ in}(0).$$

Por lo tanto  $f \simeq_{\{0\}} g$ .

c) En este caso  $\alpha: A \rightarrow X$  es la inclusión  $\text{in}: \{0,1\} \rightarrow I$ ,  $\text{in}(0) = 0$ ,  $\text{in}(1) = 1$ . Notemos que  $f(1) = 1 \neq 2 = g(1)$ . Ahora basta aplicar la observación 2.1 para concluir que  $f \not\simeq_{\{0,1\}} g$ .

2.6. Sean  $f', g': I \rightarrow \mathbb{R}^3$  definidas por

$$f'(t) = (\text{sen } \pi t, 0, \text{cos } \pi t)$$

$$g'(t) = (0, \text{sen } \pi t, \text{cos } \pi t)$$

- Consideremos la 2-esfera unidad  $S^2$  y la inclusión canónica  $i: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Probar que existen dos únicas aplicaciones continuas  $f, g: I \rightarrow S^2$  tales que  $fi = f'$  y  $gi = g'$ .
- Probar  $f$  no es homótopo a  $g$  relativamente a  $\{\frac{1}{2}\}$ ,
- Demuéstrese que  $f$  es homótopo a  $g$  relativamente a  $\{0,1\}$ ,
- Encontrar dos homotopías distintas relativas a  $\{0,1\}$  entre  $f$  y  $g$ .

Solución: a) Sea  $i: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la inclusión canónica. Para  $t \in I$ , se tiene que  $|f'(t)| = \text{sen}^2 \pi t + \text{cos}^2 \pi t = 1$ . Luego  $f'(t) \in S^2$ . Si definimos  $f: I \rightarrow S^2$  por  $f(t) = (\text{sen } \pi t, 0, \text{cos } \pi t)$ . Es obvio que  $if = f'$ . Análogamente  $ig = g'$ . La continuidad de  $f$  y  $g$  se obtiene a partir de la continuidad de  $f'$  y  $g'$  y las propiedades de la continuidad en relación con las restricciones admisibles del conjunto final.

b) En este caso  $\alpha: A \rightarrow X$  es la inclusión  $\{\frac{1}{2}\} \rightarrow I$ . Si  $f \simeq_{\{\frac{1}{2}\}} g$ , entonces se tendría que  $f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2})$ . Nótese que  $f(\frac{1}{2}) = (1, 0, 0) \neq (0, 1, 0) = g(\frac{1}{2})$ . Por lo tanto  $f \not\simeq_{\{\frac{1}{2}\}} g$ .

c) Notemos que  $f$  es un camino que recorre un meridiano desde el polo Norte al polo Sur. El camino  $g$  también va del Norte al Sur pero a través de otro meridiano. Si vamos girando el camino  $f$  de cero a noventa grados obtendremos la homotopía deseada. Tomemos  $F: I \times I \rightarrow S^2$  definida por

$$F(t, \lambda) = (\cos \frac{\lambda\pi}{2} \text{sen } \pi t, \text{sen } \frac{\lambda\pi}{2} \text{sen } \pi t, \text{cos } \pi t)$$

Se tiene que  $F$  está bien definida  $|F(t, \lambda)| = 1$ . Además

$$F(t, 0) = (\text{sen } \pi t, 0, \text{cos } \pi t) = f(t)$$

$$F(t, 1) = (0, \text{sen } \pi t, \text{cos } \pi t) = g(t)$$

$$F(0, \lambda) = (0, 0, 1) = f(0)$$

$$F(1, \lambda) = (0, 0, -1) = f(1)$$

Luego  $f \simeq_{\partial I} g$ , donde  $\partial I = \{0, 1\}$ .

d) Se puede obtener otra homotopía girando en sentido contrario 270 grados. Tomemos  $G: I \times I \rightarrow S^2$  definida por

$$G(t, \lambda) = (\cos \frac{-3\lambda\pi}{2} \text{sen } \pi t, \text{sen } \frac{-3\lambda\pi}{2} \text{sen } \pi t, \text{cos } \pi t)$$

Como antes de comprueba que  $G$  es una homotopía relativa a  $\{0, 1\}$  de  $f$  a  $g$ . Puesto que por ejemplo

$$F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \neq (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

evidentemente se tiene que  $F \neq G$ .

2.7. Sea  $f: S^2 \rightarrow S^2$  definida por  $f(x, y, z) = (-y, x, z)$  y consideremos la aplicación identidad  $\text{id}(x, y, z) = (x, y, z)$ . Demuéstrese que  $f$  es homótopa a  $\text{id}$  relativamente a  $\{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ .

2.8. Sean  $(X, x_0)$  e  $(Y, y_0)$  espacios basados y dada  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  denotemos por  $[f]^*$  su clase de homotopía basada y por  $[f]$  su clase de homotopía. Comprobar que que la aplicación natural

$$\theta: [(X, x_0), (Y, y_0)] \rightarrow [X, Y], \quad \theta[f]^* = [f],$$

está bien definida. Encontrar espacios basados para los cuales  $\theta$  no es exhaustiva.

Solución:  $\theta$  está bien definida ya que si  $f \simeq_{\{x_0\}} g$ , entonces  $f \simeq g$ . Sea  $X = \{a\}$ ,  $Y = \{b, c\}$  con las topologías discretas. Tomemos  $(X, x_0) = (\{a\}, a)$ ,  $(Y, y_0) = (\{b, c\}, b)$ . Entonces

$$[(X, x_0), (Y, y_0)] = \{[e_b]^*\}, \quad e_b(a) = b$$

$$[X, Y] = \{[e_b], [e_c]\}, \quad e_b(a) = b, \quad e_c(a) = c$$

Por lo tanto  $\theta: \{[e_b]^*\} \rightarrow \{[e_b], [e_c]\}$  es la aplicación  $\theta([e_b]^*) = [e_b]$  que no es exhaustiva.

### 3. Tipo de homotopía y retracts por deformación

Recordemos que dos espacios  $X, Y$  son *homeomorfos* si existen aplicaciones continuas  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$  tal que  $gf = \text{id}_X$  y  $fg = \text{id}_Y$ . Esta relación divide a los espacios en clases de homeomorfía. El problema de clasificar espacios módulo homeomorfía es un problema complejo y una forma de abordarlo es debilitar las condiciones necesarias para que dos espacios sean equivalentes. Un ejemplo de este método es la clasificación módulo equivalencia de homotopía.

**DEFINICIÓN 3.1.** Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Se dice que una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  es una *equivalencia de homotopía* si existe una aplicación continua  $g: Y \rightarrow X$  tal que  $gf \simeq \text{id}_X$  y  $fg \simeq \text{id}_Y$ . Se dice que  $X, Y$  tienen el *mismo tipo de homotopía*, y se denota  $X \simeq Y$ , si existe una equivalencia de homotopía de  $X$  a  $Y$ , en este caso, también diremos que  $X$  e  $Y$  son *homotópicamente equivalentes*. Un espacio  $X$  se dice que es *contráctil* (o contractible) si tiene el mismo tipo de homotopía que el espacio unipuntual.

Es importante observar que un homeomorfismo es una equivalencia de homotopía, por lo que si dos espacios son homeomorfos tienen el mismo tipo de homotopía pero en general el recíproco no es cierto.

**DEFINICIÓN 3.2.** Sean  $(X, x_0), (Y, y_0)$  espacios topológicos basados. Se dice que una aplicación continua basada  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  es una *equivalencia de homotopía basada* si existe una aplicación continua basada  $g: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  tal que  $gf \simeq_{\{x_0\}} \text{id}_X$  y  $fg \simeq_{\{y_0\}} \text{id}_Y$ . Se dice que  $X, Y$  tienen el *mismo tipo de homotopía basada*, y se denota  $X \simeq_* Y$ , si existe una equivalencia de homotopía basada de  $(X, x_0)$  a  $(Y, y_0)$ .

**DEFINICIÓN 3.3.** Sea  $A$  un subespacio de  $X$  y denotemos por  $i: A \rightarrow X$  la inclusión canónica. Se dice que  $A$  es un *retracto* de  $X$  si existe una aplicación continua  $r: X \rightarrow A$  tal que  $ri = \text{id}_A$ . Una aplicación  $r$  que verifique esta propiedad se llama *retracción*.

**DEFINICIÓN 3.4.** Se dice que  $A$  es un *retracto por deformación* de  $X$  (o que  $X$  se deforma en  $A$ ) si existe una retracción  $r: X \rightarrow A$  tal que  $ir \simeq \text{id}_X$ . Una homotopía  $F: X \times I \rightarrow X$  de  $ir$  a  $\text{id}_X$  o viceversa la llamaremos una *deformación*.

Nótese que si  $A$  es un retracto por deformación de  $X$ , entonces  $A$  es un retracto de  $X$ .

**DEFINICIÓN 3.5.** Se dice que  $A$  es un *retracto por deformación fuerte* de  $X$  (o que  $X$  se deforma fuertemente en  $A$ ) si existe una retracción  $r: X \rightarrow A$  tal que  $ir \simeq_A \text{id}_X$ . Una homotopía  $F: X \times I \rightarrow X$  de  $ir$  a  $\text{id}_X$  relativa a  $A$  (o viceversa) la llamaremos una *deformación fuerte*.

En la práctica, para comprobar que un subconjunto  $A$  de un espacio  $X$  es un retracto por deformación fuerte se suele construir una deformación fuerte.

**PROPOSICIÓN 3.1.** Sea  $A$  un subconjunto de un espacio  $X$ . Entonces  $A$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$  si y sólo si existe una homotopía  $F: X \times I \rightarrow X$  tal que

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= x, & x \in X, \\ F(x, 1) &\in A, & x \in X, \\ F(a, t) &= a, & a \in A, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Notemos que un retracto por deformación fuerte es siempre un retracto por deformación. Es importante observar que si  $A$  es un retracto por deformación de  $X$  entonces  $A$  y  $X$  tienen el mismo tipo de homotopía.

### PROBLEMAS

3.1. Encontrar un subespacio  $A$  del intervalo unidad  $I$  tal que  $A$  no sea un retracto de  $I$ .

Solución: Basta tomar  $A = \partial I$ . Se verifica que  $A$  tiene dos componentes conexas. Si  $A$  fuera un retracto de  $I$ , entonces existiría una retracción  $\rho: I \rightarrow \partial I$ . Puesto que las retracciones son exhaustivas y el intervalo  $I$  es conexo obtendríamos que  $\partial I$  tendría una sola componente conexa. Como resulta que  $\partial I$  tiene dos componentes, es imposible que exista dicha retracción. Entonces  $\partial I$  no es un retracto de  $I$ .

3.2. Sea  $r_0$  un punto de  $\mathbb{R}^2$ . Encontrar una circunferencia en  $\mathbb{R}^2$  que sea un retracto por deformación fuerte de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{r_0\}$ .

Solución: Sea  $C = \{c \in \mathbb{R}^2 \mid |c - r_0| = 1\}$  y sea  $\iota: C \rightarrow \mathbb{R}^2$  la inclusión canónica. Sea  $\rho: \mathbb{R}^2 \setminus \{r_0\} \rightarrow C$  la aplicación continua definida por

$$\rho(r) = r_0 + \frac{r - r_0}{|r - r_0|}.$$

Notemos que para  $c \in C$  se tiene que  $\rho\iota(c) = \rho(c) = r_0 + \frac{c - r_0}{|c - r_0|} = c = \text{id}_C(c)$ . Por lo tanto  $\rho\iota = \text{id}_C$ .

Consideremos la homotopía  $F: (\mathbb{R}^2 \setminus \{r_0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{r_0\}$  definida por  $F(r, t) = (1 - t)r + t\rho(r)$ . Para ver que está bien definida,

supongamos que  $(1-t)r + t(r_0 + \frac{r-r_0}{|r-r_0|}) = r_0$  que es equivalente a que  $(1-t)(r-r_0) + t\frac{r-r_0}{|r-r_0|} = 0$  si y sólo si  $(1-t) + \frac{t}{|r-r_0|} = 0$  si y sólo si  $t = 1$  y  $t = 0$ . Esta contradicción viene de suponer que  $F$  toma el valor  $r_0$ . Así que la homotopía está bien definida y es continua, además  $F$  verifica

$$F(r, 0) = r = \text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{r_0\}}(r)$$

$$F(r, 1) = \iota\rho(r)$$

$$F(c, t) = (1-t)c + t\iota\rho(c) = c = \text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{r_0\}} \iota(c)$$

Entonces  $\text{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{r_0\}} \simeq_C \iota\rho$ . Por lo tanto  $C$  es un retracto por deformación fuerte de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{r_0\}$ .

3.3. Sea  $p$  un punto del interior de un disco  $D^2$ . Probar que la circunferencia borde  $S^1 = \partial D^2$  es un retracto por deformación fuerte de  $D^2 \setminus \{p\}$ .

Solución: Supondremos que se trata del disco unidad centrado en origen. La semirecta que arranca en  $p$  y pasa por un punto  $x \in D^2 \setminus \{p\}$  es tal que corta a la circunferencia en el punto

$$p + \frac{-\langle x-p, p \rangle + \sqrt{\langle x-p, p \rangle^2 - (-1 + \langle p, p \rangle) \langle x-p, x-p \rangle}}{\langle x-p, x-p \rangle} (x-p)$$

En consecuencia podemos considerar la deformación fuerte  $F: D^2 \setminus \{p\} \times I \rightarrow D^2 \setminus \{p\}$  dada por

$$F(x, t) = (1-t)x + t \left( p + \frac{-\langle x-p, p \rangle + \sqrt{\langle x-p, p \rangle^2 - (-1 + \langle p, p \rangle) \langle x-p, x-p \rangle}}{\langle x-p, x-p \rangle} (x-p) \right)$$

Esta homotopía está bien definida y verifica que  $F(x, 0) = x$ ,  $F(x, 1) \in S^1$  y si  $a \in S^1$  entonces  $F(a, t) = a$ . Por lo tanto, aplicando la proposición 3.1, se tiene que  $S^1$  es un retracto por deformación fuerte de  $D^2 \setminus \{p\}$ .

3.4. Demostrar que un espacio unipuntual  $*$  y  $\mathbb{R}^2$  tienen el mismo tipo de homotopía pero no tienen el mismo tipo de homeomorfía.

3.5. Demostrar que un retracto de un espacio contractible es contractible.

3.6. Demostrar que un espacio  $X$  es contractible si y sólo si toda aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  es nulhomótota.

3.7. Demostrar que  $S^n$  es un retracto por deformación fuerte de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

3.8. Sea  $M$  la banda de Möbius cerrada. Probar que existe una circunferencia en  $M$  que es un retracto por deformación fuerte de  $M$ .

Solución: La banda de Möbius se puede definir tomando el cuadrado  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  e identificando un punto de la forma  $(-1, y)$  con el punto  $(1, -y)$ . Denotaremos por

$$M = [-1, 1] \times [-1, 1] / (-1, y) \sim (1, -y)$$

al espacio cociente y por  $[(x, y)]$  la clase de equivalencia del punto  $(x, y)$ . Es fácil de comprobar que el subespacio  $\Sigma = \{[(x, 0)] \mid -1 \leq x \leq 1\}$  es una circunferencia (más exactamente homeomorfa a una circunferencia). Sea  $\iota: \Sigma \rightarrow M$  la inclusión canónica y sea  $\rho: M \rightarrow \Sigma$  la aplicación definida por  $\rho[(x, y)] = [(x, 0)]$ . Notemos que está bien definida

$$\rho[(-1, y)] = [(-1, 0)] = [(1, 0)] = \rho[(1, -y)].$$

Se tiene que  $\rho\iota[(x, 0)] = \rho[(x, 0)] = [(x, 0)] = \text{id}_\Sigma[(x, 0)]$ . Luego  $\rho\iota = \text{id}_\Sigma$ . Consideremos la homotopía  $F: M \times I \rightarrow M$  dada por  $F([(x, y)], t) = [(1-t)(x, y) + t(x, 0)]$ . Comprobemos que está bien definida

$$\begin{aligned} F([(-1, y)], t) &= [(1-t)(-1, y) + t(-1, 0)] \\ &= [(-1, (1-t)y)] \\ &= [(1, -(1-t)y)] \\ &= [(1-t)(1, -y) + t(1, 0)] \\ &= F([(1, -y)], t) \end{aligned}$$

En las tapas del cilindro la homotopía verifica:

$$\begin{aligned} F([(x, y)], 0) &= [(x, y)] = \text{id}_M([(x, y)]) \\ F([(x, y)], 1) &= [(x, 0)] = \iota\rho([(x, y)]) \end{aligned}$$

Además para los puntos de  $\Sigma$  se tiene

$$\begin{aligned} F([(x, 0)], t) &= [(1-t)(x, 0) + t(x, 0)] \\ &= [(x, 0)] \\ &= \text{id}_M \iota([(x, 0)]) \end{aligned}$$

Luego  $\text{id}_M \simeq_\Sigma \iota\rho$ . Por lo tanto  $\Sigma$  es un retracto por deformación fuerte de  $M$ .

3.9. Sea  $M$  la banda de Möbius cerrada. Probar que la circunferencia borde de  $M$  es un retracto por deformación fuerte de  $M$  menos la circunferencia “central”.

Solución: Utilizaremos la misma notación que en el ejercicio anterior. Como antes  $\Sigma = \{[(x, 0)] \mid -1 \leq x \leq 1\}$  es la circunferencia central. Denotemos por  $\Gamma = \{[(x, l)] \mid -1 \leq x \leq 1, l \in \{-1, 1\}\}$  Sea ahora  $j: \Gamma \rightarrow M$  la inclusión canónica y sea  $\tau: M \setminus \Sigma \rightarrow \Gamma$  la aplicación definida por  $\tau[(x, y)] = [(x, \frac{y}{|y|})]$ . Notemos que esta bien definida

$$\tau[(-1, y)] = [(-1, \frac{y}{|y|})] = [(1, \frac{-y}{|y|})] = \tau[(1, -y)].$$

Se tiene que  $\tau j[(x, l)] = \tau[(x, l)] = [(x, l)] = \text{id}_\Gamma[(x, l)]$ , para  $l \in \{-1, 1\}$ . Luego  $\tau j = \text{id}_\Gamma$ . Consideremos la homotopía  $F: (M \setminus \Sigma) \times I \rightarrow$

$M \setminus \Sigma$  dada por  $F([(x, y)], t) = [(1-t)(x, y) + t(x, \frac{y}{|y|})]$ . Comprobemos que está bien definida

$$\begin{aligned} F([(-1, y)], t) &= [(1-t)(-1, y) + t(-1, \frac{y}{|y|})] \\ &= [(-1, (1-t)y + t\frac{y}{|y|})] \\ &= [(1, -(1-t)y - t\frac{y}{|y|})] \\ &= [(1-t)(1, -y) + t(1, \frac{-y}{|-y|})] \\ &= F([(1, -y)], t) \end{aligned}$$

En las tapas del cilindro se tiene que:

$$\begin{aligned} F([(x, y)], 0) &= [(x, y)] = \text{id}_{M \setminus \Sigma}([(x, y)]) \\ F([(x, y)], 1) &= [(x, \frac{y}{|y|})] = j\tau([(x, y)]) \end{aligned}$$

Además para los puntos de  $\Gamma$  se tiene

$$\begin{aligned} F([(x, l)], t) &= [(1-t)(x, l) + t(x, l)] \\ &= [(x, l)] \\ &= \text{id}_M j([(x, l)]) \end{aligned}$$

Luego  $\text{id}_{M \setminus \Sigma} \simeq_{\Gamma} j\tau$ . Por lo tanto  $\Gamma$  es un retracto por deformación fuerte de  $M \setminus \Sigma$ .

3.10. Probar que el toro menos un punto retracta por deformación fuerte a un grafo consistente en dos circunferencias con un punto común.

Solución: A partir del cuadrado  $[-1, 1]^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$  consideremos el toro  $T$  como el cociente

$$T = [-1, 1]^2 / (-1, x_2) \sim (1, x_2), (x_1, -1) \sim (x_1, 1)$$

Utilicemos la norma del máximo que para  $x = (x_1, x_2)$  viene dada por  $|x|_{\text{máx}} = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\}$ . Sea  $X = T \setminus \{[0]\}$  el toro menos un punto.

Consideremos el subespacio  $S = \{[x] \mid |x|_{\text{máx}} = 1\}$  del toro menos un punto que es homeomorfo a un grafo de dos circunferencias con un punto común.

Sea la homotopía  $F: X \times I \rightarrow X$  dada por  $F([x], t) = [(1-t)x + t\frac{x}{|x|_{\text{máx}}}]$ . Comprobemos que está bien definida

$$\begin{aligned} F([(-1, y)], t) &= [(1-t)(-1, y) + t(-1, y)] \\ &= [(-1, y)] \\ &= [(1, y)] \\ &= [(1-t)(1, y) + t(1, y)] \\ &= F([(1, y)], t) \end{aligned}$$

y similarmente se procede en el caso de las clases de la forma  $[(x, -1)]$ .

En las tapas del cilindro la homotopía verifica:

$$F([x], 0) = [x]$$

$$F([x], 1) = \left[ \frac{x}{|x|_{\text{máx}}} \right] \in S$$

Además para los puntos de  $S$  se tiene

$$F([x], t) = [(1-t)x + tx] = [x]$$

Por lo tanto aplicando proposición 3.1 se obtiene que  $S$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ .

3.11. Probar que el toro menos dos puntos se deforma fuertemente en un grafo consistente en tres circunferencias con un punto común.

3.12. Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios homotópicamente equivalentes. Demostrar que  $X$  es conexo si y sólo si  $Y$  es conexo.

3.13. Sea  $A$  un subespacio de  $X$  y sea  $Y$  un espacio topológico no vacío. Demostrar que  $A \times Y$  es un retracto de  $X \times Y$  si y sólo si  $A$  es un retracto de  $X$ .

3.14. Probar que el toro macizo  $D^2 \times S^1$  se deforma fuertemente en su ánima. (Se llama ánima a la circunferencia central  $\{0\} \times S^1$ .)

3.15. Probar que el toro macizo  $D^2 \times S^1$  menos su ánima se deforma fuertemente en su borde.

Solución: El toro macizo menos su “ánima” es el espacio  $(D^2 \setminus \{0\}) \times S^1$  y su borde es  $\partial D^2 \times S^1$  donde  $\partial D^2 = \{x \mid |x| = 1\}$ . Sea  $\iota: \partial D^2 \times S^1 \rightarrow (D^2 \setminus \{0\}) \times S^1$  la inclusión canónica. Definamos  $\rho: (D^2 \setminus \{0\}) \times S^1 \rightarrow \partial D^2 \times S^1$  por  $\rho(x, y) = (\frac{x}{|x|}, y)$ . Consideremos la homotopía  $F: ((D^2 \setminus \{0\}) \times S^1) \times I \rightarrow (D^2 \setminus \{0\}) \times S^1$  dada por

$$F((x, y), t) = ((1-t)x + t\frac{x}{|x|}, y).$$

Está bien definida ya que  $(1-t)x + t\frac{x}{|x|} \neq 0$  si  $x \in D^2 \setminus \{0\}$ . Además

$$F((x, y), 0) = (x, y) = \text{id}(x, y)$$

$$F((x, y), 1) = (x, y) = \text{id}\left(\frac{x}{|x|}, y\right) = \iota\rho(x, y)$$

Para  $c \in \partial D^2$  se tiene que

$$F((c, y), t) = ((1-t)c + tc, y) = (c, y) = \text{id}\iota(c, y).$$

Entonces  $\text{id} \simeq_{\partial D^2 \times S^1} \iota\rho$ . Por lo tanto  $\partial D^2 \times S^1$  es un retracto por deformación fuerte de  $D^2 \setminus \{0\}$ .

3.16. Sea  $f: S^1 \rightarrow X$  una aplicación continua. Demostrar que  $f$  es nulhomótopa si y sólo si existe una aplicación continua  $g: D^2 \rightarrow X$  tal que  $g|_{S^1} = f$ .

Solución: Recordemos que una aplicación es nulhomótopa si  $f$  es homótopa a una aplicación constante.

En primer lugar veamos que el cociente  $(S^1 \times I)/(S^1 \times \{1\})$  es homeomorfo al disco unidad  $D^2$ . Sea  $S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$ . Sea la aplicación continua dada por  $\theta(z, t) = (1-t)z$ . Notemos que  $\theta(z, 1) = 0$  para todo  $z \in S^1$ . Luego  $\theta$  factoriza a través de la proyección  $\text{pr}: S^1 \times I \rightarrow (S^1 \times I)/(S^1 \times \{1\})$ . Es decir, existe  $\bar{\theta}: (S^1 \times I)/(S^1 \times \{1\}) \rightarrow D^2$  tal que  $\bar{\theta} \text{pr} = \theta$ . Es fácil ver que  $\bar{\theta}$  es un biyección continua de un compacto en un Hausdorff. Por lo tanto  $\bar{\theta}$  es un homeomorfismo.

Si  $f \simeq x_0$ , entonces existe una homotopía  $F: S^1 \times I \rightarrow X$  tal que  $F(z, 0) = f(z)$ ,  $F(z, 1) = x_0$ ,  $z \in S^1$ . Entonces existe  $\bar{F}: (S^1 \times I)/(S^1 \times \{1\}) \rightarrow X$  tal que  $\bar{F} \text{pr} = F$ . Sea  $g = \bar{F} \bar{\theta}^{-1}$ , se tiene que para  $z \in S^1 = \partial D^2$ ,

$$g(z) = \bar{F} \bar{\theta}^{-1}(z) = \bar{F} \text{pr}(z, 0) = F(z, 0) = f(z)$$

Luego  $g|_{\partial D^2} = f$ .

Recíprocamente, si existe  $g: D^2 \rightarrow X$  tal que  $g|_{\partial D^2} = f$ . Sea  $F = g\theta$ , entonces

$$F(z, 0) = g\theta(z, 0) = g(z) = f(z) \quad , \quad z \in S^1$$

$$F(z, 1) = g\theta(z, 1) = g(0) \quad , \quad z \in S^1$$

Tomando  $x_0 = g(0)$ , se tiene que  $f \simeq x_0$ .

3.17. Probar que existe una retracción  $r: D^{n+1} \rightarrow S^n$  si y sólo si  $S^n$  es contráctil.

3.18. Un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  se dice que es retracto débil de  $X$  si existe una aplicación continua  $r: X \rightarrow A$  tal que  $ri$  es homótopa a  $\text{id}_A$ , donde  $i$  es la aplicación inclusión. Dar un ejemplo de un subconjunto de un espacio que sea retracto débil pero que no sea retracto.

Sugerencia: Considerar el espacios  $X = I^2$  y el subespacio  $A = (\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\} \times I) \cup (\{0\} \times I \cup I \times \{0\})$ .

Solución: Sea  $\rho: I^2 \rightarrow A$  dada por  $\rho(x) = 0$ ,  $x \in I^2$  y sea  $f: A \rightarrow A$ ,  $f(a_1, a_2) = (a_1, 0)$ . Consideremos las homotopías  $F: A \times I \rightarrow A$ ,  $G: A \times I \rightarrow A$  dadas por  $F(a, t) = (1-t)a + tf(a)$ ,  $G(a, t) = (1-t)f(a)$ . Entonces

$$\text{id}_A = F\partial_0 \simeq F\partial_1 = f = G\partial_0 \simeq G\partial_1 = e_0$$

$$\rho i = e_0 \simeq \text{id}_A$$

Luego  $A$  es un retracto débil de  $I^2$ .

Supongamos que  $A$  es un retracto de  $I^2$ , entonces existe  $r: I^2 \rightarrow A$  tal que  $ri = \text{id}_A$ . Notemos que para  $\frac{1}{n+1} < a_n < \frac{1}{n}$ ,  $A \setminus \{(a_n, 0)\}$  no es conexo. Entonces existe  $a'_n$ ,  $\frac{1}{n+1} < a'_n < \frac{1}{n}$ , tal que  $r(a'_n, 1) = (a_n, 0)$ . Además se verifica que

$$\lim(a_n, 0) = (0, 0) \quad , \quad \lim(a'_n, 1) = (0, 1) .$$

Por ser  $r$  continua

$$\lim r(a'_n, 1) = r \lim(a'_n, 1) = r(0, 1) = (0, 1)$$

Pero  $r(a'_n, 0) = (a_n, 0)$ , luego

$$\lim r(a'_n, 1) = \lim(a_n, 0) = (0, 0).$$

Puesto que  $A$  es Hausdorff solamente hay un límite, entonces  $r$  no es continua. Esta contradicción viene de suponer que existe una retracción. Por lo tanto  $A$  no es un retracto de  $I^2$ .

3.19. Considerar el espacio:  $Z = (S^1 \times [0, 1]) \cup (D^2 \times \{0\})$  donde  $S^1$  es la circunferencia de radio 1 y  $D^2$  es el disco unidad. Consideremos  $S^1$  como el espacio de los complejos de módulo uno y  $D^2$  como los complejos de módulo menor o igual que uno.

Probar que

- $D^2 \times \{0\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $Z$ .
- $\{(0, 0)\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $Z$ .
- $S^1 \times \{0\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $Z \setminus \{(0, 0)\}$ .
- $Z$  es homeomorfo a  $Z' = (S^1 \times [0, 1]) \cup (D^2 \times \{1\})$ .

Solución: a) Considerar la deformación  $F: Z \times I \rightarrow Z$  dada por  $F(z, t, s) = (z, (1-s)t)$ . En primer lugar notemos que está bien definida si  $|z| = 1$  y  $|t| \leq 1$ , entonces  $|z| = 1$  y  $|(1-s)t| \leq 1$ , en el caso que  $|z| \leq 1$  y  $t = 0$  se tiene que  $|z| \leq 1$  y  $|(1-s)t| = 0$ . Además de verifica que

$$F(z, t, 0) = (z, t), F(z, t, 1) = (z, 0) \text{ y } F(z, 0, s) = (z, 0)$$

Por lo tanto  $D^2 \times \{0\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $Z$ .

b) El subespacio  $D^2 \times \{0\}$  se puede deformar fuertemente a  $\{(0, 0)\}$  mediante la deformación  $G: (D^2 \times \{0\}) \times I \rightarrow D^2 \times \{0\}$  dada por  $G(z, 0, s) = ((1-s)z, 0)$ . Aplicando una deformación y después la otra se obtiene

$$H(z, t, s) = \begin{cases} F(z, t, 2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ G(z, 0, 2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que  $H$  está bien definida  $F(z, t, 2\frac{1}{2}) = (z, 0)$  y por otro lado  $G(z, 0, 2\frac{1}{2} - 1) = G(z, 0, 0) = (z, 0)$ . Además  $H$  es continua ya que en cada uno de los cerrados en los que se ha dividido el cilindro es continua.

Para una demostración alternativa, se podría probar previamente que si  $A$  es un retracto por deformación fuerte de  $B$  y  $B$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ , entonces  $A$  es un retracto por deformación fuerte de  $X$ . Supongamos que  $i: A \rightarrow B$  y  $j: B \rightarrow X$  son inclusiones y  $r: X \rightarrow B$  y  $s: B \rightarrow A$  son retracciones tales que  $si = \text{id}_A$ ,  $is \simeq_A \text{id}_B$ ,  $rj = \text{id}_B$  y  $jr \simeq_B \text{id}_X$ . Entonces  $srji = si = \text{id}_A$  y  $jisr \simeq_A jr \simeq_A \text{id}_X$ .

Puesto que hemos visto que  $\{(0, 0)\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $D^2 \times \{0\}$  y que  $D^2 \times \{0\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $Z$ , se tiene que  $\{(0, 0)\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $Z$ .

c) Definamos  $r: Z \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow S^1 \times \{0\}$  por la fórmula  $r(z, t) = (\frac{z}{|z|}, 0)$ . Se tiene que si  $|z| = 1$  e  $i$  es la inclusión que  $ri(z, 0) = r(z, 0) = (z, 0)$ . Además podemos tomar la deformación fuerte  $F: (Z \setminus \{(0, 0)\}) \times I \rightarrow (Z \setminus \{(0, 0)\})$  dada por  $F((z, t), s) = (1 - s)r(z, t) + s(z, t)$ . Es importante notar que si  $|z| = 1$ , se tiene que  $F((z, t), s) = (z, st) \in (Z \setminus \{(0, 0)\})$  y que si  $t = 0$ ,  $F((z, t), s) = (1 - s)(\frac{z}{|z|}, 0) + s(z, 0) \in (Z \setminus \{(0, 0)\})$ . La homotopía  $F$  verifica que  $F((z, t), 0) = r(z, t) = ir(z, t)$ ,  $F((z, t), 1) = (z, t)$  y es relativa ya que si  $|z| = 1$  se tiene que  $F((z, 0), s) = (1 - s)(z, 0) + s(z, 0) = (z, 0)$ . Entonces  $S^1 \times \{0\}$  es un retracto por deformación fuerte de  $Z \setminus \{(0, 0)\}$ .

d) Considerar las aplicaciones  $\phi: Z \rightarrow Z'$  dada por  $\phi(z, t) = (z, 1 - t)$  y  $\psi: Z' \rightarrow Z$  dada por  $\psi(z', t') = (z', 1 - t')$ . Es importante notar que si  $|z| = 1$ ,  $(z, 1 - t) \in Z'$  y que  $\phi(z, 0) = (z, 1) \in Z'$  por lo que  $\phi$  está bien definida. Análogamente se comprueba que  $\psi$  está bien definida y se ve fácilmente que son continuas y que una es inversa de la otra.

## CAPÍTULO 2

# GRUPO FUNDAMENTAL

### 1. Producto de caminos

En este capítulo se construye el grupoide fundamental de un espacio. Para ver las propiedades del producto de caminos utilizamos el hecho de que un camino es homótopo relativamente con sus reparametrizaciones. Vemos que el espacio de los caminos de un espacio módulo homotopía relativa a  $\partial I$  tiene la estructura de grupoide y además estudiamos algunas de sus propiedades.

**DEFINICIÓN 1.1.** Una aplicación continua  $f: I \rightarrow X$  diremos que es un *camino* en  $X$ . Sean  $f, g: I \rightarrow X$  dos caminos en un espacio topológico tales que  $f(1) = g(0)$ . Se define el *producto de caminos*  $f \cdot g: I \rightarrow X$  como el camino dado por

$$(f \cdot g)(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ g(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Dado un camino  $f$  de  $X$ , llamaremos *camino inverso* de  $f$  y se denota por  $\bar{f}$  al camino dado por  $\bar{f}(t) = f(1 - t)$ ,  $t \in I$ . Asociado a cada punto  $x \in X$ , llamaremos el *camino constante*  $e_x: I \rightarrow X$  al dado por  $e_x(t) = x$  para todo  $t \in I$ .

A continuación estudiamos algunas propiedades de los caminos de un espacio módulo la homotopía relativa a  $\partial I = \{0, 1\}$ . Para ello vamos a utilizar composiciones  $f\varphi$ , donde  $f$  es un camino y  $\varphi$  es una aplicación continua del intervalo unidad en sí mismo.

**LEMA 1.1.** Sea  $X$  un espacio topológico.

- (i) Sean  $\varphi, \varphi': I \rightarrow C$  caminos y  $C$  un convexo. Si  $\varphi(0) = \varphi'(0)$ ,  $\varphi(1) = \varphi'(1)$ , entonces  $\varphi \simeq_{\partial I} \varphi'$ .
- (ii) Sea  $\varphi: I \rightarrow I$  una aplicación continua tal que  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi(1) = 1$ . Si  $f: I \rightarrow X$  es un camino, entonces  $f \simeq_{\partial I} f\varphi$ .
- (iii) Sea  $\varphi: I \rightarrow I$  una aplicación continua tal que  $\varphi(0) = 0$  y  $\varphi(1) = 0$ . Si  $f: I \rightarrow X$  es un camino, entonces  $e_{f(0)} \simeq_{\partial I} f\varphi$ .

**DEMOSTRACIÓN.** (i) Consideremos la homotopía  $F: I \times I \rightarrow C$  definida por  $F(s, t) = (1 - t)\varphi(s) + t\varphi'(s)$ . La homotopía  $F$  tiene las propiedades siguientes:  $F\partial_0 = \varphi$ ,  $F\partial_1 = \varphi'$ ,  $F(0, t) = \varphi(0) = \varphi \text{pr}_1(0, t)$ ,  $F(1, t) = \varphi(1) = \varphi \text{pr}_1(1, t)$ . Entonces tenemos que  $\varphi \simeq_{\partial I} \varphi'$ .

(ii) Por el apartado anterior, por ser  $I$  convexo se tiene que  $\text{id}_I \simeq_{\partial I} \varphi$ . Por ser la relación de homotopía relativa reflexiva se tiene que  $f \simeq_{\partial I} f$ , ahora podemos aplicar la proposición 2.1 del capítulo anterior para obtener que  $f \simeq_{\partial I} f\varphi$ .

(iii) Por ser  $I$  convexo y apartado (i) se tiene que  $e_0 \simeq_{\partial I} \varphi$ . Sabemos que  $f \simeq_{\partial I} f$ , ahora podemos aplicar la proposición 2.1 del capítulo anterior para obtener que  $e_{f(0)} = fe_0 \simeq_{\partial I} f\varphi$ .  $\square$

En el siguiente lema se prueba que el producto de caminos está bien definido módulo homotopía relativa a  $\partial I$ .

LEMA 1.2. Sean  $f_0, f_1, g_0, g_1: X$  caminos en  $X$  tal que  $f_0 \simeq_{\partial I} f_1$ ,  $f_0(1) = g_0(0)$  y  $g_0 \simeq_{\partial I} g_1$ , entonces  $f_0 \cdot g_0 \simeq_{\partial I} f_1 \cdot g_1$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $F$  una homotopía de  $f_0$  a  $f_1$  relativa a  $\partial I$  y sea  $G$  una homotopía de  $g_0$  a  $g_1$  relativa a  $\partial I$ . Definamos la homotopía  $H$  por la fórmula

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ G(2s - 1, t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Se tiene que  $H$  es una homotopía de  $f_0 \cdot g_0$  a  $f_1 \cdot g_1$  relativa a  $\partial I$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 1.1. El producto de caminos módulo la relación de homotopía relativa a  $\partial I$  tiene la propiedad asociativa, elementos neutros a derecha e izquierda y camino inverso.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $f, g, h: I \rightarrow X$  caminos tales que  $f(1) = g(0)$ ,  $g(1) = h(0)$ . Notemos que

$$((f \cdot g) \cdot h)(s) = \begin{cases} f(4s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{4}, \\ g(4s - 1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ h(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

y

$$(f \cdot (g \cdot h))(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ g(4s - 2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4}, \\ h(4s - 3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Tomemos  $\varphi: I \rightarrow I$  definida por

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{4}, \\ s + \frac{1}{4} & \text{si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{s}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que  $(f \cdot (g \cdot h))\varphi = (f \cdot g) \cdot h$ . De donde, por el apartado (ii) del lema anterior, se concluye que  $f \cdot (g \cdot h) \simeq_{\partial I} (f \cdot g) \cdot h$ .

Sea ahora un camino  $f: I \rightarrow X$  que acaba en  $f(1) = y$ . Consideremos el camino constante  $e_y: I \rightarrow X$  definido por  $e_y(s) = y$  para todo  $s \in I$ . Veamos que módulo homotopía relativa  $e_y$  es un neutro a derecha. Obsérvese que

$$(f \cdot e_y)(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ e_y(2s - 1) = y & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Consideremos la aplicación  $\phi: I \rightarrow I$  definida por

$$\phi(s) = \begin{cases} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que  $f \cdot \phi = f \cdot e_y$ . De donde, por el apartado (ii) del lema anterior, se concluye que  $f \simeq_{\partial I} f \cdot e_y$ . De modo análogo se obtiene que si  $f(0) = x$ , entonces  $f \simeq_{\partial I} e_x \cdot f$ .

Finalmente, dado un camino  $f: I \rightarrow X$  tomaremos el camino  $\bar{f}: I \rightarrow X$  definido por  $\bar{f}(s) = f(1 - s)$ . Observemos que

$$(f \cdot \bar{f})(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \bar{f}(2s - 1) = f(2 - 2s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Consideremos la aplicación  $\psi: I \rightarrow I$

$$\psi(s) = \begin{cases} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - (2s - 1) = 2 - 2s & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que  $f \cdot \bar{f} = f\psi$ . Puesto que  $\psi(0) = 0 = \psi(1)$  aplicando (iii) del lema anterior se tiene que  $e_{f(0)} \simeq_{\partial I} f\psi = f \cdot \bar{f}$

De modo análogo se prueba que  $\bar{f} \cdot f \simeq_{\partial I} e_{f(1)}$ .  $\square$

## PROBLEMAS

1.1. Probar que  $I/\partial I$  es homeomorfo a  $S^1$ .

1.2. Sean  $f_0, f_1, g_0, g_1: I \rightarrow X$  caminos en  $X$  tal que  $f_0(1) = f_1(1) = g_0(0) = g_1(0)$ . Probar que si  $f_0 \cdot g_0 \simeq_{\partial I} f_1 \cdot g_1$  y  $g_0 \simeq_{\partial I} g_1$ , entonces  $f_0 \simeq_{\partial I} f_1$ .

1.3. Un subespacio  $X \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es localmente convexo si todo punto tiene un entorno convexo en  $X$ . Probar que si  $X$  es localmente convexo, entonces todo camino en  $X$  es homotópo relativamente a  $\partial I$  a un camino obtenido como producto de segmentos.

Solución: Sea  $f: I \rightarrow X$  un camino. Por ser  $X$  localmente convexo, existe un cubrimiento abierto  $\mathcal{U} = \{U \subset X | U \text{ abierto convexo}\}$ . Entonces  $\{f^{-1}U | U \in \mathcal{U}\}$  es un cubrimiento abierto de  $I$ . Por el lema de Lebesgue existe una partición  $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  tal que  $f([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$   $i = 1, \dots, n$ ,  $U_i \in \mathcal{U}$ . Sea  $f_i: I \rightarrow X$  definida por  $f_i(t) = f((1-t)t_{i-1} + tt_i)$ . Entonces  $f_i \simeq_{\partial I} s_i$  donde  $s_i(t) = (1-t)f(t_{i-1}) + tf(t_i)$ , por ser  $U_i$  convexo y  $f_i(0) = s_i(0)$  y  $f_i(1) = s_i(1)$ , ver (i) del lema 1.1. Por lo tanto, por el lema 1.2, se tiene que  $(\dots((s_1.s_2).s_3)\dots).s_n \simeq_{\partial I} (\dots((f_1.f_2).f_3)\dots).f_n = f\varphi \simeq_{\partial I} f$ . Donde  $\varphi: I \rightarrow I$  es la única aplicación lineal a trozos tal que  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(\frac{1}{2^{n-1}}) = t_1$ ,  $\varphi(\frac{1}{2^{n-2}}) = t_2, \dots, \varphi(\frac{1}{2^{n-n}}) = t_n = 1$ . Notemos que el lema de reparametrización nos asegura que  $f\varphi \simeq_{\partial I} f$ .

1.4. Sea  $p: I \rightarrow I/\partial I$  la aplicación cociente.  $C((I, \partial I), (X, x_0))$  denota el conjunto de aplicaciones continuas  $f: I \rightarrow X$  tales que  $f(0) = x_0$  y  $f(1) = x_0$ , si  $*$  denota la clase de equivalencia  $\partial I$  en el espacio cociente  $I/\partial I$  denotemos por  $C((I/\partial I, *), (X, x_0))$  el conjunto de aplicaciones continuas  $g: I/\partial I \rightarrow X$  tales que  $g(*) = x_0$ . Demostrar que la aplicación inducida  $p^*: C((I/\partial I, *), (X, x_0)) \rightarrow C((I, \partial I), (X, x_0))$ ,  $p^*(g) = gp$ , es una biyección.

Solución: Con el objetivo de probar que  $p^*$  es inyectiva supongamos que  $g, g': I/\partial I \rightarrow X$  son aplicaciones continuas tales que  $gp = p^*(g) = p^*(g') = g'p$ . Entonces puesto que  $p: I \rightarrow I/\partial I$  es una aplicación cociente, se tiene que  $g = g'$  al aplicar la unicidad de la propiedad universal de las aplicaciones cociente.

Sea ahora  $f: I \rightarrow X$  tal que  $f(0) = f(1) = x_0$ . Puesto que  $f(\partial I) = \{x_0\}$ , se tiene que por la propiedad universal del cociente  $p: I \rightarrow I/\partial I$ , existe una única  $g: I/\partial I \rightarrow X$  tal que  $g(*) = x_0$  y  $gp = p^*(g) = f$ .

Por lo tanto  $p^*$  es una biyección.

1.5. Demostrar que la biyección

$$p^*: C((I/\partial I, *), (X, x_0)) \rightarrow C((I, \partial I), (X, x_0))$$

induce una biyección  $[(I/\partial I, *), (X, x_0)] \cong [(I, \partial I), (X, x_0)]$ .

Solución: Puesto que  $p: I \rightarrow I/\partial I$  es una aplicación cociente, se tiene que  $p \times \text{id}_I: I \times I \rightarrow (I/\partial I) \times I$  también es una aplicación cociente. Sean ahora  $g, g': I/\partial I \rightarrow X$  aplicaciones continuas tales que  $gp = p^*(g)$ ,  $p^*(g') = g'p$  y sea  $G: (I/\partial I) \times I \rightarrow X$  una homotopía tal que  $G(u, 0) = g(u)$ ,  $G(u, 1) = g'(u)$ ,  $u \in I/\partial I$  y  $G(*, t) = x_0$ ,  $t \in I$ . Entonces,

$$F = G(p \times \text{id}_I): I \times I \rightarrow (I/\partial I) \times I \rightarrow X$$

verifica

$$\begin{aligned}
F(s, 0) &= G(p \times \text{id}_I)(s, 0) = G(p(s), 0) = gp(s) = p^*(g)(s) \\
F(s, 1) &= G(p \times \text{id}_I)(s, 1) = G(p(s), 1) = g'p(s) = p^*(g')(s) \\
F(0, t) &= G(p \times \text{id}_I)(0, t) = G(*, t) = x_0 \\
F(1, t) &= G(p \times \text{id}_I)(1, t) = G(*, t) = x_0
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $p^*(g) \simeq_{\partial I} p^*(g')$ .

Por otra parte si  $F: I \times I \rightarrow X$  es una homotopía relativa a  $\partial I$  de  $p^*(g) = gp$  a  $p^*(g') = g'p$ . Entonces por ser  $I \times I \rightarrow (I/\partial I) \times I$  una aplicación cociente, existe una única  $G: (I/\partial I) \times I \rightarrow X$  tal que  $F = G(p \times \text{id}_I)$ . Notemos que

$$\begin{aligned}
gp &= F\partial_0 = G(p \times \text{id}_I)\partial_0 = G\partial_0p \\
g'p &= F\partial_1 = G(p \times \text{id}_I)\partial_1 = G\partial_1p
\end{aligned}$$

Entonces  $g = G\partial_0$  ,  $g' = G\partial_1$  . Además

$$G(*, t) = G(p(0), t) = G(p \times \text{id}_I)(0, t) = F(0, t) = x_0$$

Luego  $g \simeq_{\{*\}} g'$  .

1.6. Sea  $(I/\partial I) \vee (I/\partial I)$  el conjunto cociente de la reunión disjunta  $(I/\partial I) \sqcup (I/\partial I)$  obtenido al identificar los puntos bases de los espacios. Denotemos por  $[a]_1$  la clase de equivalencia de un elemento  $a$  del primer espacio de la suma disjunta y por  $[b]_2$  la clase de equivalencia de un elemento  $b$  del segundo espacio de la reunión disjunta. Nótese que en el cociente se tiene que  $[*]_1 = [*]_2$  . Denotemos también para cada  $t \in I$  la clase de equivalencia  $p(t)$  por  $\bar{t}$  . Sea  $\mu: I/\partial I \rightarrow (I/\partial I) \vee (I/\partial I)$  definida por

$$\mu\bar{s} = \begin{cases} [2s]_1 & \text{if } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ [2s-1]_2 & \text{if } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Dadas aplicaciones continuas y basadas  $g_1, g_2: (I/\partial I, *) \rightarrow (X, x_0)$  denotemos por  $g_1 + g_2: ((I/\partial I) \vee (I/\partial I), *) \rightarrow (X, x_0)$  la aplicación definida por  $(g_1 + g_2)[\bar{s}]_1 = g_1\bar{s}$  y  $(g_1 + g_2)[\bar{s}]_2 = g_2\bar{s}$  . Demuéstrese que

$$(g_1 + g_2)\mu p = (g_1p) \cdot (g_2p) .$$

donde el punto denota el producto de caminos. Concluir que utilizando la biyección del ejercicio anterior el producto de 1-esferas se define como la aplicación

$$\mu^*: [(I/\partial I, *), (X, x_0)] \times [(I/\partial I, *), (X, x_0)] \rightarrow [(I/\partial I, *), (X, x_0)]$$

dada por  $\mu^*([g_1], [g_2]) = [(g_1 + g_2)\mu]$  .

Solución: Recordemos que  $p: I \rightarrow I/\partial I$  es la proyección canónica. Entonces

$$(g_1 + g_2)\mu p(s) = \begin{cases} g_1[2s]_1 & \text{if } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ g_2[2s-1]_2 & \text{if } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} g_1(\overline{2s}) & \text{if } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ g_2(\overline{2s-1}) & \text{if } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

$$= (g_1 p) \cdot (g_2 p)(s)$$

Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} [(I/\partial I, *), (X, x_0)] \times [(I/\partial I, *), (X, x_0)] & \xrightarrow{\mu^*} & [(I/\partial I, *), (X, x_0)] \\ \downarrow p^* \times p^* & & \downarrow p^* \\ [(I, \partial I), (X, x_0)] \times [(I, \partial I), (X, x_0)] & \xrightarrow{\cdot} & [(I, \partial I), (X, x_0)] \end{array}$$

Éste es conmutativo ya que

$$p^*(\mu^*)([g_1], [g_2]) = p^*[(g_1 + g_2)\mu] = [(g_1 + g_2)\mu p] = [g_1 p] \cdot [g_2 p] = p^*[g_1] \cdot p^*[g_2]$$

Luego la biyección  $p^*$  transforma el producto de caminos en  $\mu^*$ .

## 2. Grupoide y grupo fundamental

En primer lugar recordemos la noción de grupoide.

DEFINICIÓN 2.1. Un *grupoide*  $G$  consiste en una pareja de aplicaciones  $d, c: G_1 \rightarrow G_0$  y un producto que asocia a una pareja  $(g, h) \in G_1 \times G_1$  tal que  $c(g) = d(h)$  un elemento denotado por  $g \cdot h$  tal que  $d(g \cdot h) = d(g)$  y  $c(g \cdot h) = c(h)$  verificando las siguientes propiedades:

- (i) Si  $f, g, h$  de  $G_1$  verifican que  $c(f) = d(g)$ ,  $c(g) = d(h)$ , entonces  $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ .
- (ii) Para cada  $x \in G_0$  existe  $1_x \in G_1$  tal que  $c(1_x) = d(1_x) = x$  verificando que si  $g, h \in G_1$ ,  $c(g) = x$  y  $d(h) = x$ , entonces  $g \cdot 1_x = g$ ,  $1_x \cdot h = h$ .
- (iii) Dado  $g \in G_1$  existe un único  $h \in G_1$  tal que  $g \cdot h = 1_{d(g)}$  y  $h \cdot g = 1_{c(g)}$ . Este único elemento se denotará por  $g^{-1} = h$ .

Dados  $x, y \in G_0$  denotaremos por

$$\text{Hom}_G(x, y) = \{g \mid d(g) = x, \quad c(g) = y\}$$

Observemos que un grupo  $H$  determina un único grupoide  $G$  tomando  $G_1 = H$  y  $G_0$  un conjunto unipuntual y reciprocamente un grupoide con  $G_0$  unipuntual determina una única estructura de grupo en  $G_1$ . Nótese también que si  $G$  es un grupoide y  $x \in G_0$ , entonces  $\text{Hom}_G(x, x)$  con el producto tiene estructura de grupo. Si el contexto no da lugar a confusión el producto del grupoide  $g \cdot h$  se denotará por  $gh$ .

Sea  $C(I, X)$  el conjunto de todos los caminos de  $X$  y si  $(X, x_0)$  es un espacio basado y consideremos

$$C((I, \partial I), (X, x_0)) = \{f \in C(I, X) \mid f(0) = x_0 = f(1)\}.$$

Un camino  $f: I \rightarrow X$  tal que  $f(0) = x_0 = f(1)$  lo llamaremos *lazo*. Si  $f: I \rightarrow X$  es un camino o lazo su clase de equivalencia respecto a la relación de homotopía relativa a  $\partial I$  la denotaremos por  $[f]$ .

Recordemos que si  $f, g$  son caminos de  $X$  y  $f \simeq_{\partial I} g$ , entonces  $f(0) = g(0)$  y  $f(1) = g(1)$ . Esta propiedad permite definir las aplicaciones dominio y codominio  $d, c: C(I, X)/\simeq_{\partial I} \rightarrow X$ , mediante las fórmulas  $d([f]) = f(0)$ ,  $c([f]) = f(1)$ .

Como consecuencia del lema 1.2 el producto de caminos induce un producto de clases: Sean  $f, g: I \rightarrow X$  caminos tal que  $c(f) = d(g)$ , entonces el producto de clases  $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$  está bien definido. Notemos también que el producto de lazos es de nuevo un lazo.

**PROPOSICIÓN 2.1.** Sea  $\Pi_1 X$  el conjunto de los caminos de un espacio  $X$  módulo la relación de homotopía relativa a  $\partial I$  provisto con el producto de caminos y sea  $\Pi_0 X = X$ . Considérense las aplicaciones dominio y codominio determinadas por el inicio y el final de cada camino. Entonces  $d, c: \Pi_1 X \rightarrow \Pi_0 X$  junto con el producto de caminos admite de modo natural estructura de grupoide. Por otro lado, el conjunto  $\pi_1(X, x_0)$  de los lazos de un espacio basado  $(X, x_0)$  módulo la relación de homotopía relativa a  $\partial I$  provisto con el producto de lazos tiene estructura de grupo. Además, se tiene que  $\pi_1(X, x_0) = \text{Hom}_{\Pi X}(x_0, x_0)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Es una consecuencia inmediata de la proposición 1.1.  $\square$

**DEFINICIÓN 2.2.** El grupoide anterior que será denotado por  $\Pi X$  se llama *grupoide fundamental* de  $X$ . El grupo denotado por  $\pi_1(X, x_0)$  se denomina *grupo fundamental* del espacio basado  $(X, x_0)$ . En aquellos contextos en los que el punto base quede bien determinado y en otros casos en los que su papel no sea relevante utilizaremos la notación  $\pi_1(X)$ .

**LEMA 2.1.** Sea  $G$  un grupoide y supongamos que  $x, y \in G_0$ . Si existe un  $a \in G_1$  tal que  $d(a) = x$  y  $c(a) = y$ , entonces  $u_a: \text{Hom}_G(y, y) \rightarrow \text{Hom}_G(x, x)$  definido por  $u_a(b) = aba^{-1}$  es un isomorfismo.

**DEMOSTRACIÓN.** La aplicación  $u_a$  es un homomorfismo. En efecto  $u_a(bb') = abb'a^{-1} = aba^{-1}ab'a^{-1} = u_a(b)u_a(b')$ . Notemos que  $u_{a^{-1}}u_a(b) = a^{-1}aba^{-1}a = b$ , entonces  $u_{a^{-1}}u_a = \text{id}$ . De modo análogo  $u_a u_{a^{-1}} = \text{id}$ .  $\square$

**COROLARIO 2.1.** Sea  $X$  un espacio y tomemos  $x_0, x_1$  dos puntos en la misma componente conexa por caminos de  $X$ . Entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(X, x_1)$ .

Si  $\psi: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, y definimos  $\psi_*[f] = [\psi f]$  donde  $f$  es un lazo de  $X$  basado en  $x_0$ . La aplicación inducida  $\psi_*$  también será denotada por  $\pi_1(\psi)$ .

**PROPOSICIÓN 2.2.** Si  $\psi: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, entonces para cada  $x_0 \in X$ ,  $\psi_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \psi(x_0))$  es un homomorfismo.

**DEMOSTRACIÓN.** En primer lugar notemos que está bien definida. En efecto si  $f \simeq_{\partial I} f'$ , entonces por la proposición 2.1 del capítulo anterior se tiene que  $\psi f \simeq_{\partial I} \psi f'$ . Sean  $f, g: I \rightarrow X$  dos lazos basados en  $x_0$ . Entonces

$$(\psi(f \cdot g))(s) = \begin{cases} \psi f(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \psi g(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases} = (\psi f \cdot \psi g)(s)$$

Entonces se verifica que  $\psi_*[f \cdot g] = \psi_*[f] \cdot \psi_*[g]$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.3.** Sea  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  la identidad. Entonces para cada  $x_0 \in X$ ,  $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ . Sean  $\phi: X \rightarrow Y$  y  $\psi: Y \rightarrow Z$  aplicaciones continuas y sea  $x_0 \in X$ . Entonces  $(\psi\phi)_* = \psi_*\phi_*$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $f: I \rightarrow X$  un lazo basado en  $x_0$ . Entonces  $(\text{id}_X)_*[f] = [f] = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}[f]$ . También  $(\psi\phi)_*[f] = [(\psi\phi)f] = [\psi(\phi f)] = \psi_*\phi_*[f]$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.4.** Sean  $\phi, \psi: X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas y  $F: X \times I \rightarrow Y$  una homotopía de  $\phi$  a  $\psi$ . Sea  $x_0 \in X$  y denotemos por  $f$  el camino  $f(s) = F(x_0, s)$ . Entonces  $u_{[f]}\psi_* = \phi_*$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $g: I \rightarrow X$  un lazo basado en  $x_0$ . Sean los caminos  $i_l^1, i_l^2: I \rightarrow I \times I$ , definidos por  $i_l^1(t) = (l, t)$ ,  $i_l^2(t) = (t, l)$  para  $l \in \{0, 1\}$ . Notemos que  $\alpha = i_0^2$  y  $\beta = (i_0^1 \cdot i_1^2) \cdot \bar{i}_1^1$  tienen el mismo dominio y codominio. Además por ser  $I \times I$  convexo aplicando (i) del lema 1.1 se tiene que  $\alpha \simeq_{\partial I} \beta$ . La aplicación continua  $F(g \times \text{id}_I)$  verifica que  $F(g \times \text{id}_I)\alpha = F(g \times \text{id}_I)i_0^2 = F\partial_0 g = \phi g$  y también  $F(g \times \text{id}_I)\beta = F(g \times \text{id}_I)(i_0^1 \cdot i_1^2) \cdot \bar{i}_1^1 = (f \cdot \psi g) \cdot \bar{f}$ . Además por la proposición 2.1 del capítulo anterior, puesto que  $\alpha \simeq_{\partial I} \beta$ , se sigue que  $\phi g \simeq_{\partial I} (f \cdot \psi g) \cdot \bar{f}$ . Teniendo en cuenta la definición de  $u_{[f]}$  se tiene que  $\phi_*[g] = u_{[f]}\psi_*[g]$  para cada lazo  $g$  basado en  $x_0$ . Entonces  $\phi_* = u_{[f]}\psi_*$ .  $\square$

**TEOREMA 2.1.** Si  $\phi: X \rightarrow Y$  es una equivalencia de homotopía, entonces  $\phi_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \phi(x_0))$  es un isomorfismo.

**DEMOSTRACIÓN.** Por ser una equivalencia de homotopía existe una aplicación continua  $\psi: Y \rightarrow X$  tal que  $\psi\phi \simeq \text{id}_X$  y  $\phi\psi \simeq \text{id}_Y$ . Denotemos los homomorfismos inducidos por  $\phi_*^{x_0}: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \phi(x_0))$  y  $\psi_*^{\phi(x_0)}: \pi_1(Y, \phi(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, \psi(\phi(x_0)))$ . Aplicando la proposición anterior se tiene que existen un camino  $f$  de  $\psi\phi(x_0)$  a  $x_0$  y otro  $g$  de  $\phi\psi\phi(x_0)$  a  $\phi(x_0)$  tal que  $\psi_*^{\phi(x_0)}\phi_*^{x_0} = u_{[f]}$  y también  $\phi_*^{\psi(\phi(x_0))}\psi_*^{\phi(x_0)} = u_{[g]}$ . De la primera se deduce que  $\psi_*^{\phi(x_0)}$  es epimorfismo y de la segunda que es monomorfismo.

Ahora teniendo en cuenta que  $u_{[f]}$  es un isomorfismo se tiene que  $\phi_*^{x_0}$  es un isomorfismo que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

**COROLARIO 2.2.** El grupo fundamental de un espacio contractil es trivial.

**DEFINICIÓN 2.3.** Un espacio  $X$  se dice que es *simplemente conexo* si es conexo por caminos y para cualquier punto base  $x \in X$  el grupo fundamental  $\pi_1(X, x)$  es trivial.

Notemos que en un espacio conexo por caminos se tiene que si para un punto base el grupo fundamental es trivial, también lo es para cualquier otro punto base. Es destacable que la simple conexión es un invariante homotópico y por lo tanto topológico.

**OBSERVACIÓN 2.1.** Dado un grupoide  $G$ , se dice que dos objetos  $x, y \in G_0$  están en la misma componente si existe un  $a \in G_1$  tal que  $d(a) = x$  y  $c(a) = y$ . La relación “estar en la misma componente” es de equivalencia y el conjunto de componentes de un grupoide lo denotaremos por  $\pi_0(G)$ . Dado un objeto  $x_0 \in G_0$  el grupo fundamental de  $(G, x_0)$  es el grupo  $\pi_1(G, x_0) = \text{Hom}_G(x_0, x_0)$ . Si  $X$  es un espacio topológico y  $x_0 \in X$ , entonces es fácil ver que  $\pi_0(X) = \pi_0(\Pi X)$  y  $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(\Pi X, x_0)$ .

## PROBLEMAS

2.1. Demostrar que si  $X$  es un espacio discreto, entonces para cualquier punto base  $\pi_1(X, x)$  es trivial. Probar que el grupoide fundamental verifica que

$$\text{Hom}_{\Pi X}(x, y) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } x \neq y, \\ \{1_x\} & \text{if } x = y. \end{cases}$$

Solución: Sea  $X$  un espacio discreto. Notemos que para  $x \in X$ ,  $\{x\}$  es abierto y cerrado. Esto implica que la componente conexa que contiene al punto  $x$  es  $\{x\}$ . También se deduce que la componente conexa por caminos que contiene al punto  $x$  es  $\{x\}$ . Si  $f: I \rightarrow X$  es un camino, entonces  $f(I)$  está contenido en una componente conexa por caminos. Por lo tanto se obtiene que para  $X$  discreto y  $x_0 \in X$ ,

$$C((I, \partial I), (X, x_0)) = \{e_{x_0}\},$$

$$\pi_1(X, x_0) = (\{e_{x_0}\} / \simeq_{\partial I}) = \{[e_{x_0}]\} = \{1_{x_0}\}$$

Es decir que  $\pi_1(X, x_0)$  es el grupo trivial. Por otra parte,

$$C(I, X) = \{e_x | x \in X\}$$

$$\Pi_1 X = (\{e_x | x \in X\} / \simeq_{\partial I}) = \{[e_x] | x \in X\} = \{1_x | x \in X\}$$

En este caso se tiene que  $\Pi_0 X = X$  y las aplicaciones  $d, c: \Pi_1 X \rightarrow \Pi_0$  están dadas por  $d(1_x) = x$ ,  $c(1_x) = x$ . Por lo tanto tenemos que

$$\text{Hom}_{\Pi X}(x, y) = \begin{cases} \emptyset & \text{if } x \neq y, \\ \{1_x\} & \text{if } x = y. \end{cases}$$

2.2. Un homomorfismo de grupoides  $\phi: G \rightarrow H$  es una pareja de aplicaciones  $f = (\phi_0, \phi_1)$  tales que  $c\phi_1 = \phi_0 c$ ,  $d\phi_1 = \phi_0 d$ ,  $\phi_1(1_x) = 1_{\phi_0(x)}$  para  $x \in G_0$  y si  $g, h \in G_1$  con  $c(f) = d(g)$ , entonces  $\phi_1(f \cdot g) = (\phi_1 f) \cdot (\phi_1 g)$ . Si  $\psi: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, y definimos  $\psi_*[f] = [\psi f]$  donde  $f$  es un camino de  $X$ , probar que  $(\psi, \psi_*)$  es un homomorfismo del grupoide fundamental de  $X$  en el grupoide fundamental de  $Y$ .

Solución: Veamos que  $\psi_*: \Pi_1 X \rightarrow \Pi_1 Y$  está bien definido. Sean  $f, g: I \rightarrow X$  y supongamos que  $f \simeq_{\partial I} g$ . Entonces por la proposición 2.1 del capítulo 1,  $\psi f \simeq_{\partial I} \psi g$ . Luego  $\psi_*[f] = [\psi f] = [\psi g] = \psi_*[g]$  está bien definida. Los operadores  $d, c$  verifican:

$$\begin{aligned} c\psi_*[f] &= c[\psi f] = \psi f(1) = \psi c[f] \\ d\psi_*[f] &= d[\psi f] = \psi f(0) = \psi d[f] \\ \psi_* 1_x &= \psi_*[e_x] = [\psi_* e_x] = [e_{\psi(x)}] = 1_{\psi(x)} \end{aligned}$$

Veamos si preserva el producto. Sean  $f, g: I \rightarrow X$  caminos tal que  $f(1) = g(0)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \psi(f \cdot g)(s) &= \begin{cases} f(2s) & \text{if } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ g(2s - 1) & \text{if } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases} \\ &= \psi f \cdot \psi g(s) \end{aligned}$$

Luego

$$\psi_*([f][g]) = \psi_*[f \cdot g] = [\psi(f \cdot g)] = [\psi f \cdot \psi g] = [\psi f] \cdot [\psi g] = \psi_*[f] \cdot \psi_*[g]$$

Por lo tanto  $(\psi, \psi_*)$  es un homomorfismo de grupoides.

2.3. Sean  $x, y$  puntos de un espacio topológico  $X$ . Denotemos por  $\text{Hom}_{\Pi X}(x, y)$  los caminos en  $X$  con origen en  $x$  y final en  $y$  módulo la relación de homotopía relativa a  $\{0, 1\}$ . Demostrar que existe una correspondencia biyectiva entre  $\text{Hom}_{\Pi X}(x, y)$  y  $\text{Hom}_{\Pi X}(x, x)$  si y sólo si  $\text{Hom}_{\Pi X}(x, y) \neq \emptyset$ .

2.4. Calcular  $\pi_1(\mathbb{Q}, x)$  con la topología usual.

Solución: El espacio de los racionales  $\mathbb{Q}$  con la topología usual verifica que las componentes conexas por caminos son unipuntuales. Entonces para cada  $x \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} C((I, \partial I), (\mathbb{Q}, x)) &= \{e_x\} \\ \pi_1(\mathbb{Q}, x) &= (\{e_x\} / \simeq_{\partial I}) = \{[e_x]\} = \{1_x\}. \end{aligned}$$

2.5. Probar que dos caminos  $f, g: I \rightarrow X$  de  $x$  a  $y$  inducen el mismo homomorfismo  $u_{[f]} = u_{[g]}$  si y sólo si  $[g \cdot \bar{f}]$  pertenece al centro de  $\pi_1(X, x)$ . Recordar que el centro de un grupo es el formado por aquellos elementos que conmutan con todos los demás.

Solución: Sean  $f, g: I \rightarrow X$  caminos tales que  $f(0) = x = g(0)$  y  $f(1) = y = g(1)$ . Entonces si  $a = [f]$  y  $b = [g]$ , tenemos los isomorfismos

$$u_a, u_b: \pi_1(X, y) = \text{Hom}_{\Pi X}(y, y) \rightarrow \text{Hom}_{\Pi X}(x, x) = \pi_1(X, x).$$

Es bien conocido que  $u_a = u_b$  si y sólo si  $u_a^{-1} = u_b^{-1}$ ; es decir,  $u_{a^{-1}} = u_{b^{-1}}$ . Estas aplicaciones son iguales si y sólo si para todo  $d \in \pi_1(X, x)$ ,  $u_{a^{-1}}(d) = u_{b^{-1}}(d)$  si y sólo si para todo  $d$  se tiene que  $a^{-1}da = b^{-1}db$  si y sólo si  $(ba^{-1})d = d(ba^{-1})$  para todo  $d$  si y sólo si  $ba^{-1}$  está en el centro de  $\pi_1(X, x)$ . Equivalentemente si y sólo si  $[g\bar{f}]$  está en el centro.

2.6. Probar que si  $u_{[f]}$  es independiente de  $f$  si y sólo si  $\pi_1(X, x)$  es abeliano.

Solución: Notemos que  $u_{[f]}$  es independiente de  $f$  si y sólo si  $u_{[f]} = u_{[g]}$  para  $f, g$  caminos de  $x$  a  $y$  si y sólo si  $u_a = u_b$  para todo  $a, b \in \text{Hom}_{\Pi X}(x, y)$ , y por el ejercicio 2.5 si y sólo si  $ab^{-1}$  está en el centro de  $\pi_1(X, x)$  para  $a, b \in \text{Hom}_{\Pi X}(x, y)$ .

Sea ahora  $d \in \pi_1(X, x)$ , entonces  $da, a \in \text{Hom}_{\Pi X}(x, y)$  luego  $daa^{-1} = d$  está en el centro de  $\pi_1(X, x)$ . Recíprocamente, si  $\pi_1(X, x)$  está contenido en su centro, entonces para  $a, b \in \text{Hom}_{\Pi X}(x, y)$  se tiene que  $ab^{-1}$  está en  $\text{Hom}_{\Pi X}(x, x) = \pi_1(X, x)$ . Luego  $ab^{-1}$  está en el centro de  $\pi_1(X, x)$ . Finalmente, notemos que  $\pi_1(X, x)$  está contenido en su centro si y sólo si  $\pi_1(X, x)$  es abeliano.

2.7. Sean  $\phi, \psi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  continuas y basadas. Probar que si  $\phi \simeq_{\{x_0\}} \psi$ , entonces los homomorfismos inducidos  $\phi_*, \psi_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$  son iguales.

2.8. Probar que si  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow A$  son homomorfismos de grupos tales que  $gf = \text{id}_A$ , entonces  $f$  es monomorfismo y  $g$  es epimorfismo. Demostrar que si  $A$  es un retracto de  $X$  y  $r: X \rightarrow A$ ,  $i: A \rightarrow X$  denotan la retracción e inclusión, respectivamente, entonces  $i_*: \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  es monomorfismo y  $r_*: \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(A, a)$  es epimorfismo para cualquier  $a \in A$ .

2.9. Sean  $(X, x_0)$  e  $(Y, y_0)$  espacios basados. Demostrar que

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

Solución: En primer lugar consideremos la correspondencia

$$\theta: C((I, \partial I), (X \times Y, (x_0, y_0))) \rightarrow C((I, \partial I), (X, x_0)) \times C((I, \partial I), (Y, y_0))$$

que aplica  $f: I \rightarrow X \times Y$  en  $(\text{pr}_X f, \text{pr}_Y f)$  para un camino  $f$  tal que  $f(0) = (x_0, y_0) = f(1)$ . Notemos que por la propiedad universal del producto se tiene que  $\theta$  es una biyección.

Por otra parte si  $F$  es una homotopía relativa a  $\partial I$  de  $f$  a  $g$ , donde  $f, g$  son caminos de  $X \times Y$  basados en  $(x_0, y_0)$ , entonces  $\text{pr}_X F$  es una homotopía relativa a  $\partial I$  de  $\text{pr}_X f$  a  $\text{pr}_X g$  y análogamente  $\text{pr}_Y F$  es una homotopía relativa a  $\partial I$  de  $\text{pr}_Y f$  a  $\text{pr}_Y g$ . También se tiene que si  $F^X$  es una homotopía relativa a  $\partial I$  de  $\text{pr}_X f$  a  $\text{pr}_X g$  y  $F^Y$  es una homotopía relativa a  $\partial I$  de  $\text{pr}_Y f$  a  $\text{pr}_Y g$ , entonces  $(F^X, F^Y)$  es una homotopía relativa a  $\partial I$  de  $f$  a  $g$ .

Ahora si dividimos por la relación de homotopía relativa a  $\partial I$  se obtiene el isomorfismo buscado.

$$\bar{\theta}: \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

2.10. Sea  $A$  un subespacio conexo por caminos de un espacio  $X$ , denotemos por  $i: A \rightarrow X$  la inclusión canónica y sea  $a_0 \in A$ . Probar que  $\pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$  es exhaustiva si y sólo si todo camino en  $X$  con extremos en  $A$  es homotópo relativamente a  $\partial I$  a un camino en  $A$ .

Solución: Supongamos que todo camino en  $X$  con extremos en  $A$  es homotópo relativamente a  $\partial I$  a un camino en  $A$ . Sea  $b \in \pi_1(X, a_0)$ ,  $b = [g]$  donde  $g$  es un lazo en  $X$  basado en  $a_0$ . Entonces  $g \simeq_{\partial I} f$  con  $f$  lazo en  $A$  basado en  $a_0$ . Entonces  $i_*[f] = [g] = b$ . Luego  $i_*: \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)$  es exhaustiva.

Recíprocamente, supongamos que  $i_*$  es exhaustiva y sea  $g: I \rightarrow X$  un camino tal que  $g(\partial I) \subset A$ . Sean  $h, k: I \rightarrow A$  caminos tal que  $h(0) = a_0$ ,  $h(1) = g(0)$ ,  $k(1) = a_0$ ,  $k(0) = g(1)$ . Entonces el lazo  $(h \cdot g) \cdot k$  es homotópo relativamente a  $\partial I$  a un lazo  $f$  de  $A$  basado en  $a_0$ . Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} (h \cdot g) \cdot k &\simeq_{\partial I} f \\ ((h \cdot g) \cdot k) \cdot \bar{k} &\simeq_{\partial I} f \cdot \bar{k} \\ h \cdot g &\simeq_{\partial I} f \cdot \bar{k} \\ \bar{h} \cdot (h \cdot g) &\simeq_{\partial I} \bar{h} \cdot (f \cdot \bar{k}) \\ g &\simeq_{\partial I} \bar{h} \cdot (f \cdot \bar{k}) \end{aligned}$$

Notemos que  $\bar{h} \cdot (f \cdot \bar{k})$  es un camino en  $A$ .

2.11. Sea  $X_0$  una componente conexa por caminos de un espacio  $X$ , denotemos por  $i: X_0 \rightarrow X$  la inclusión canónica y sea  $x_0 \in X_0$ . Probar que  $\pi_1(X_0, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es un isomorfismo.

Solución: Sea  $b \in \pi_1(X_0, x_0)$  con  $b = [g]$  y  $g: I \rightarrow X_0$  lazo basado en  $x_0$ . Puesto que  $g(0) = x_0 = g(1)$ , entonces  $g(I) \subset X_0$ , que es la componente conexa de  $x_0$ , ya que  $I$  es conexo por caminos. Si  $a \in \pi_1(X_0, x_0)$  es el elemento representado por  $g$  se tiene que  $i_*(a) = b$ , donde  $i_*$  es el homomorfismo inducido por la inclusión canónica  $i: X_0 \rightarrow X$ .

Supongamos ahora que  $i_*(a) = 1$  y que  $a = [f]$  con  $f$  lazo de  $X_0$  basado en  $x_0$ . Entonces existe una homotopía  $F: I \times I \rightarrow X$  tal que

$F(t, 0) = f(t)$  ,  $F(t, 1) = x_0$  ,  $F(0, \lambda) = x_0$  ,  $F(1, \lambda) = x_0$  . Por ser  $I \times I$  conexo por caminos y  $F(0, 0) = x_0$  se tiene que  $F(I \times I) \subset X_0$  . Entonces  $a = [f] = [e_{x_0}] = 1$  .

2.12. Considerar la aplicación natural  $\theta: [(S^1, s_0), (Y, y_0)] \rightarrow [S^1, Y]$  . Probar que si  $X$  es conexo por caminos  $\theta$  es exhaustiva. Demostrar que  $\theta(a) = \theta(b)$  si y sólo si  $a$  y  $b$  son conjugados. Deducir que  $[S^1, Y]$  está en correspondencia biunívoca con las clases de conjugación de  $\pi_1(X, x_0)$  .

Solución: Sea la norma del máximo en  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$|x|_{\text{máx}} = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\} = \rho(0, x) ,$$

donde  $\rho$  es la métrica cartesiana dada en el Ejemplo 1.11 del capítulo 1. Sea  $D_\rho = \{x \mid |x|_{\text{máx}} \leq 1\}$  y  $\partial D_\rho = \{x \mid |x|_{\text{máx}} = 1\}$  . Denotemos por  $O$  el origen ( $O = (0, 0)$ ). Sea  $r: D_\rho \setminus \{O\} \rightarrow \partial D_\rho$  la aplicación continua definida por  $r(x) = \frac{x}{|x|_{\text{máx}}}$  . Entonces  $\partial D_\rho$  es un retracto de  $D_\rho \setminus \{O\}$  . Sea ahora  $D' = \{x \in D_\rho \mid -1 \leq x_2 \leq -\frac{1}{2}\}$  y  $J = \{x \in \partial D_\rho \mid -1 \leq x_2 \leq -\frac{1}{2}\}$  . Entonces  $r|_{D'}: D' \rightarrow J$  es una retracción que hace que  $J$  sea un retracto de  $D'$  . Notemos que  $\phi: D' \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  dada por  $\phi(s, t) = (\frac{s+1}{2}, 2t+2)$  es un homeomorfismo y  $\phi(J') = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0, 1\} \times [0, 1])$  . Entonces  $(I \times \{0\}) \cup (\partial I \times I)$  es un retracto de  $I \times I$  mediante la retracción  $\rho = \phi(r|_{D'})\phi^{-1}$  .

Veamos que  $\theta: [(S^1, *), (Y, y_0)] \rightarrow [S^1, Y]$  es exhaustiva. Denotemos por  $p: I \rightarrow S^1 = I/\partial I$  la proyección canónica. Sea  $g: S^1 \rightarrow Y$  tal que  $g(*) = y_1$  . Sea  $h: I \rightarrow Y$  un camino de  $y_1$  a  $y_0$  . Definamos  $F: (I \times \{0\}) \cup (\partial I \times I) \rightarrow Y$  por

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= gp(s) \\ F(0, t) &= h(t) \\ F(1, t) &= h(t) \end{aligned}$$

Componiendo con la retracción obtenemos una homotopía  $F\rho: I \times I \rightarrow Y$  tal que

$$\begin{aligned} F\rho(s, 0) &= F(s, 0) = gp(s) \\ F\rho(0, t) &= F(0, t) = h(t) \\ F\rho(1, t) &= F(1, t) = h(t) \\ F\rho\partial_1(0) &= F\rho(0, 1) = F(0, 1) = h(1) = y_0 \\ F\rho\partial_1(1) &= F\rho(1, 1) = F(1, 1) = h(1) = y_0 \end{aligned}$$

Entonces existe  $f: S^1 \rightarrow Y$  tal que  $fp = F\rho\partial_1$  y existe  $G: S^1 \times I \rightarrow Y$  tal que  $G(p \times \text{id}_I) = F\rho$  . Notemos que  $f = G\partial_1$  entonces se tiene que  $f(*) = fp(0) = F\rho\partial_1(0) = y_0$ . Además  $[g] = [G\partial_0] = [G\partial_1] = [f] = \theta[f]^*$  . Luego  $\theta$  es exhaustiva.

Sean ahora  $f, g: (S^1, *) \rightarrow (Y, y_0)$  continuas y supongamos que existe una homotopía  $F: S^1 \times I \rightarrow Y$  tal que  $F\partial_0 = f$  ,  $F\partial_1 = g$  . Sea el camino  $h(t) = F(*, t)$  . Consideremos la homotopía

$$F(p \times \text{id}_I): I \times I \rightarrow S^1 \times I \rightarrow Y$$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} F(p \times \text{id}_I)\partial_0 &= F\partial_0 p = fp \\ F(p \times \text{id}_I)\partial_1 &= F\partial_1 p = gp \\ F(p \times \text{id}_I)(0, t) &= F(*, t) = h(t) \\ F(p \times \text{id}_I)(1, t) &= F(*, t) = h(t) \end{aligned}$$

Por ser  $I \times I$  convexo se tiene que  $(h \cdot gp) \cdot \bar{h} \simeq_{\partial I} pf$ . Entonces  $[h][gp][h]^{-1} = [fp]$ . Luego  $[gp], [fp]$  son conjugados, que es lo que queríamos probar.

## CAPÍTULO 3

### EL GRUPO FUNDAMENTAL DE LA 1-ESFERA

En este capítulo se prueba que el grupo fundamental de la circunferencia es isomorfo al grupo cíclico infinito. Para ello estudiamos el grado de los lazos de la circunferencia mediante la propiedad de elevación de caminos que tiene la aplicación canónica  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $p(r) = e^{2\pi ir}$ . Para ello analizamos previamente la noción de aplicación recubridora y sus propiedades de elevación de caminos y homotopías.

#### 1. Homeomorfismos locales y aplicaciones recubridoras

En primer lugar damos un par de nociones más débiles que la noción de aplicación recubridora:

DEFINICIÓN 1.1. Una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  es *localmente inyectiva* si para cada  $x \in X$  existe un entorno abierto  $U$  tal que  $f|_U: U \rightarrow Y$  es inyectiva.

DEFINICIÓN 1.2. Una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  es un *homeomorfismo local* si para cada  $x \in X$  existe un entorno abierto  $U$  tal que  $f(U)$  es abierto en  $Y$  y  $f|_U: U \rightarrow f(U)$  es un homeomorfismo.

DEFINICIÓN 1.3. Una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  es una *aplicación recubridora* (o cubierta) si existe un cubrimiento abierto  $\mathcal{V}$  del espacio  $Y$  tal que para cada  $V \in \mathcal{V}$  existe una familia de abiertos  $U_i$  de  $X$  con  $i \in I(V)$ , disjuntos dos a dos tales que  $f(U_i) = V$ ,  $f|_{U_i}: U_i \rightarrow V$  es un homeomorfismo y además  $\bigcup_{i \in I(V)} U_i = f^{-1}(V)$ .

Recordemos que un cubrimiento abierto  $\mathcal{V}$  de un espacio  $Y$  es una familia de abiertos de  $Y$  tal que  $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = Y$ .

Nótese que una aplicación recubridora es siempre un homeomorfismo local y un homeomorfismo local es localmente inyectivo, sin embargo los recíprocos no son ciertos.

EJEMPLO 1.1. Sea  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  la aplicación exponencial definida por  $p(t) = e^{2\pi it}$ , donde la circunferencia  $S^1$  está formada por los complejos de módulo uno. El cubrimiento  $\mathcal{V} = \{V, V'\}$  formado por  $V = S^1 \setminus \{1\}$  y  $V' = S^1 \setminus \{-1\}$  verifica las condiciones del enunciado. En este caso  $p^{-1}V = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k, k+1)$  y se tiene que cada restricción  $p|_{(k, k+1)}: (k, k+1) \rightarrow V$  es un homeomorfismo. Para  $V'$  se tiene que  $p^{-1}V' = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} + k)$  y también  $p|_{(-\frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} + k)}: (-\frac{1}{2} + k, \frac{1}{2} + k) \rightarrow V'$

$V'$  es un homeomorfismo. Para la demostración de las afirmaciones anteriores podemos considerar la aplicación cociente  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , donde  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  denota el espacio cociente definido por la relación,  $r \sim s$  si y sólo si  $r - s \in \mathbb{Z}$ . Además de ser continua verifica que  $q^{-1}q(U) = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} z + U$ . Lo que implica que  $q$  es abierta. Además si  $U$  es un intervalo abierto de diámetro menor que uno, la reunión anterior es disjunta y las restricciones a  $z + U$  son homeomorfismos. Tomando  $q(0, 1)$ ,  $q(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  como cubrimiento abierto de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , las observaciones anteriores implican que  $q$  es una aplicación recubridora. Puesto que la aplicación  $p$  es compatible con  $q$ , entonces existe una única biyección continua  $\theta: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$  tal que  $\theta q = p$ . Puesto que  $\theta$  es una biyección continua de un compacto en un Hausdorff se tiene que es un homeomorfismo. Por lo tanto  $p = \theta q$  es también una aplicación recubridora.

DEFINICIÓN 1.4. Sean  $p: X \rightarrow Y$ ,  $p': X' \rightarrow Y$  aplicaciones recubridoras. Una *aplicación continua sobre  $Y$  de  $p$  a  $p'$*  (de  $X$  en  $X'$ ) es una aplicación continua  $f: X \rightarrow X'$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & Y \end{array}$$

es conmutativo. Una aplicación continua  $f$  sobre  $Y$  diremos que es una *transformación recubridora* o un *isomorfismo sobre  $Y$*  si además es una biyección. El grupo de transformaciones recubridoras de  $p: X \rightarrow Y$  en si misma lo denotaremos por  $\text{Aut}(p: X \rightarrow Y)$ .

La siguiente propiedad sobre homeomorfismos locales será útil para resolver algunos problemas.

LEMA 1.1. Sean  $f: X \rightarrow Y$ ,  $h: Y \rightarrow Z$  aplicaciones continuas tales que  $f$ ,  $g = hf$  son homeomorfismos locales exhaustivos. Entonces  $h$  es un homeomorfismo local exhaustivo.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, sea  $y \in Y$ , por ser  $f$  sobre existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Aplicando que  $g$  es homeomorfismo local, existe  $V$  entorno abierto de  $x$  tal que  $g(V)$  es un entorno abierto de  $g(x) = hf(x) = h(y)$  y  $g|_V: V \rightarrow g(V)$  es un homeomorfismo. Por ser  $f$  homeomorfismo local existe  $W$  entorno abierto de  $x$  tal que  $f(W)$  es un entorno abierto de  $y$  y  $f|_W: W \rightarrow f(W)$  es un homeomorfismo. Sea  $U = f(V \cap W)$  que es entorno abierto de  $y$ , entonces  $h(U) = hf(V \cap W) = g(V \cap W)$  que es un abierto de  $Z$  y  $h|_U = (g|_{V \cap W})(f|_{V \cap W})^{-1}$  es una composición de homeomorfismos, luego es un homeomorfismo. Notemos que puesto que  $g$  es sobre, se tiene que  $h$  es sobre.  $\square$

Bajo algunas condiciones los homeomorfismos locales son aplicaciones recubridoras como vemos en el siguiente resultado:

LEMA 1.2. Si  $p: X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo local exhaustivo con fibras finitas y  $X$  es Hausdorff, entonces  $p$  es una aplicación recubridora.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $y \in Y$ , puesto que las fibras son finitas se tiene que  $p^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Aplicando que  $X$  es Hausdorff se pueden obtener entornos abiertos  $U_i''$  de  $x_i$  tales que para  $i \neq j$  se tiene que  $U_i'' \cap U_j'' = \emptyset$ . Aplicando que  $p$  es un homeomorfismo local en cada  $x_i$  podemos tomar entornos abiertos  $U_i'$  de  $x_i$  tal que  $U_i' \subset U_i''$ ,  $p(U_i')$  es un abierto de  $Y$  y  $p|_{U_i'}: U_i' \rightarrow p(U_i')$  es un homeomorfismo. Sea  $V_y = p(U_1') \cap \dots \cap p(U_n')$  y tomemos  $U_i = p|_{U_i'}^{-1}(V_y)$ . Entonces  $p^{-1}(V_y) = \cup_{i=1}^n U_i$  y  $p|_{U_i}: U_i \rightarrow V_y$  es un homeomorfismo. De esta forma el cubrimiento abierto  $\mathcal{V} = \{V_y | y \in Y\}$  verifica las propiedades necesarias para que  $p: X \rightarrow Y$  sea una aplicación recubridora.  $\square$

El siguiente resultado de topología es bien conocido y va a ser aplicado en numerosas ocasiones.

LEMA 1.3. (Lema de Lebesgue) Sea  $X$  un espacio métrico y compacto. Si  $\mathcal{U}$  es un cubrimiento abierto de  $X$ , entonces existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $A \subset X$  tal que diámetro de  $A$  es menor que  $\delta$  se tiene que existe un  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $A \subset U$ .

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{x} & X \\ \partial \downarrow & & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

donde  $\partial(0) = 0$ ,  $x$  es la aplicación  $x(0) = x$  y  $f: I \rightarrow Y$  es un camino de  $Y$ . Notemos que este diagrama es conmutativo si y sólo si  $f(0) = p(x)$ . Una elevación es una aplicación  $f': I \rightarrow X$  que hace conmutativos los dos triángulos, que en este diagrama es equivalente a que  $f'(0) = x$  y  $pf' = f$ . El siguiente resultado es un caso particular de las propiedades de elevación que tienen las aplicaciones recubridoras, asegura que todo diagrama del tipo anterior tiene elevación única.

PROPOSICIÓN 1.1. Sea  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora y supongamos que  $x \in X$ . Dado un camino  $f: I \rightarrow Y$  tal que  $f(0) = p(x)$ , entonces existe un único camino  $f^x: I \rightarrow X$  tal que  $pf^x = f$  y  $f^x(0) = x$ .

DEMOSTRACIÓN. Por ser  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora, existe un cubrimiento abierto  $\mathcal{V}$  del espacio  $Y$  tal que para cada  $V \in \mathcal{V}$  existe una familia de abiertos  $U_i$  de  $X$  con  $i \in I(V)$ , disjuntos dos a dos tales que  $f(U_i) = V$ ,  $p|_{U_i}: U_i \rightarrow V$  es un homeomorfismo y además  $\bigcup_{i \in I(V)} U_i = p^{-1}(V)$ . Entonces  $\{f^{-1}V | V \in \mathcal{V}\}$  es un cubrimiento abierto del métrico compacto  $I$ . Aplicando el lema 1.3 podemos encontrar una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  y abiertos

$V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$  tal que  $f[t_{k-1}, t_k] \subset V_k$  para  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Supongamos que  $\bigcup_{i \in I(V_1)} U_i = p^{-1}(V_1)$  y sea  $U_{i_1}$  el único tal que  $x \in U_{i_1}$ . Definamos  $f^x|_{[t_0, t_1]} = (p|_{U_{i_1}})^{-1}(f|_{[t_0, t_1]})$ . Se tiene que por ser  $[t_0, t_1]$  conexo, la reunión  $\bigcup_{i \in I(V_1)} U_i$  disjunta y  $x \in U_{i_1}$ , entonces la aplicación  $f^x|_{[t_0, t_1]}$  es la única tal que aplica el 0 en  $x$  y recubre  $f|_{[t_0, t_1]}$ . Ahora supongamos que hemos definido  $f^x$  en  $[t_0, t_{k-1}]$  con  $0 < k-1 < n$ . Tenemos que  $\bigcup_{i \in I(V_k)} U_i = p^{-1}(V_k)$  y sea  $U_{i_k}$  el único tal que  $f^x(t_{k-1}) \in U_{i_k}$ . Definamos  $f^x|_{[t_{k-1}, t_k]} = (p|_{U_{i_k}})^{-1}(f|_{[t_{k-1}, t_k]})$ . Se tiene que por ser  $[t_{k-1}, t_k]$  conexo, la reunión  $\bigcup_{i \in I(V_k)} U_i$  disjunta y  $f^x(t_{k-1}) \in U_{i_k}$ , entonces la aplicación  $f^x|_{[t_0, t_k]}$  es la única tal que aplica el 0 en  $x$  y recubre  $f|_{[t_0, t_k]}$ . Reiterando el proceso  $n$  veces se tiene que la  $f^x: I \rightarrow X$  es la única tal que  $f^x(0) = x$  y  $pf^x = f$ .  $\square$

Además de la propiedad de elevación de caminos las aplicaciones recubridoras tienen las propiedad de elevación de homotopias. Es decir, los diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f} & X \\ \partial_0 \downarrow & & \downarrow p \\ I \times I & \xrightarrow{F} & Y \end{array}$$

tienen elevación única. Veamos que las aplicaciones recubridoras tienen esta propiedad de elevación.

**PROPOSICIÓN 1.2.** Sea  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora. Dado un camino  $f: I \rightarrow X$  y una homotopía  $F: I \times I \rightarrow Y$  tal que  $F\partial_0 = pf$ , entonces existe una única homotopía  $\tilde{F}: I \times I \rightarrow X$  tal que  $p\tilde{F} = F$  y  $\tilde{F}\partial_0 = f$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Por ser  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora, existe un cubrimiento abierto  $\mathcal{V}$  del espacio  $Y$  tal que para cada  $V \in \mathcal{V}$  existe una familia de abiertos  $U_i$  de  $X$  con  $i \in I(V)$ , disjuntos dos a dos tales que  $p(U_i) = V$ ,  $p|_{U_i}: U_i \rightarrow V$  es un homeomorfismo y además  $\bigcup_{i \in I(V)} U_i = p^{-1}(V)$ . Entonces  $\{F^{-1}V | V \in \mathcal{V}\}$  es un cubrimiento abierto del métrico compacto  $I \times I$ . Aplicando el lema 1.3 podemos encontrar particiones  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  y abiertos  $V_{11}, \dots, V_{m1}, \dots, V_{1n}, \dots, V_{mn} \in \mathcal{V}$  tal que  $F([s_{k-1}, s_k] \times [t_{l-1}, t_l]) \subset V_{kl}$  para  $k \in \{1, \dots, m\}$  y  $l \in \{1, \dots, n\}$ . Supongamos que  $\bigcup_{i \in I(V_{11})} U_i = p^{-1}(V_{11})$  y sea  $U_{11}$  el único tal que  $f[0, s_1] \subset U_{11}$ . Definamos  $\tilde{F}|_{[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]} = (p|_{U_{11}})^{-1}(F|_{[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]})$ . Se tiene que por ser  $[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$  conexo, la reunión  $\bigcup_{i \in I(V_{11})} U_i$  disjunta y  $f[0, s_1] \subset U_{11}$  la aplicación  $\tilde{F}|_{[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]}$  es la única tal que  $(\tilde{F}|_{[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]})(\partial_0|_{[s_0, s_1]}) = f|_{[s_0, s_1]}$  y que recubre  $F|_{[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]}$ .

Supongamos que hemos definido  $\tilde{F}$  en  $[s_0, s_{k-1}] \times [t_0, t_1]$  con  $0 < k - 1 < m$ . Tenemos que  $\bigcup_{i \in I(V_{k1})} U_i = p^{-1}(V_{k1})$  y sea  $U_{k1}$  el único tal que  $F(\{s_{k-1}\} \times [t_0, t_1]) \subset U_{k1}$  y  $f[s_{k-1}, s_k] \subset U_{k1}$ . Definamos  $\tilde{F}|_{[s_{k-1}, s_k] \times [t_0, t_1]} = (p|_{U_{k1}})^{-1}(F|_{[s_{k-1}, s_k] \times [t_0, t_1]})$ . Se tiene que por ser  $[s_{k-1}, s_k] \times [t_0, t_1]$  conexo, la reunión  $\bigcup_{i \in I(V_{k1})} U_i$  disjunta y  $f[s_{k-1}, s_k] \subset U_{k1}$  la aplicación  $\tilde{F}|_{[s_{k-1}, s_k] \times [t_0, t_1]}$  es la única tal que  $(\tilde{F}|_{[s_{k-1}, s_k] \times [t_0, t_1]})(\partial_0|_{[s_{k-1}, s_k]}) = f|_{[s_{k-1}, s_k]}$  y que recubre  $F|_{[s_{k-1}, s_k] \times [t_0, t_1]}$ . Reiterando el proceso se obtiene una aplicación  $\tilde{F}|_{[s_0, s_m] \times [t_0, t_1]}$  que es la única tal que  $(\tilde{F}|_{[s_0, s_m] \times [t_0, t_1]})\partial_0 = f$  y que recubre  $F|_{[s_0, s_m] \times [t_0, t_1]}$ . Realizando un segundo proceso de inducción se obtiene una única homotopía  $\tilde{F}: I \times I \rightarrow X$  tal que  $p\tilde{F} = F$  y  $\tilde{F}\partial_0 = f$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 1.3.** Sea  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora y sea  $x \in X$ . Entonces la aplicación  $G: \pi_1(Y, px) \rightarrow p^{-1}(px)$ , que asocia a  $[f]$  el elemento  $f^x(1)$ , está bien definida. Además si  $X$  es conexo por caminos y su grupo fundamental es trivial, entonces es una biyección.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $f$  un lazo basado en  $px$  y sea  $f^x$  el único camino tal que  $f^x(0) = x$  y  $pf^x = f$ . Supongamos que  $F$  es una homotopía de  $f$  a  $g$  relativa a  $\partial I$ . Aplicando la proposición anterior existe una única homotopía  $\tilde{F}$  tal que  $\tilde{F}\partial_0 = f^x$  y  $p\tilde{F} = F$ . Notemos que  $\tilde{F}(\{0\} \times I) \subset p^{-1}px$  y que  $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{F}\partial_0(0) = f^x(0) = x$ . También se tiene que  $p^{-1}px$  es un espacio discreto y sus componentes son unipuntuales. Por ser  $\tilde{F}(\{0\} \times I)$  conexo se concluye que  $\tilde{F}(\{0\} \times I) = \{x\}$ . Por lo tanto  $\tilde{F}\partial_1(0) = \tilde{F}(0, 1) = x$ . También se tiene que  $p\tilde{F}\partial_1 = F\partial_1 = g$ . Entonces  $\tilde{F}\partial_1 = g^x$ . Por otra parte  $\tilde{F}(\{1\} \times I) \subset p^{-1}px$  y que  $\tilde{F}(0, 1) = \tilde{F}\partial_0(1) = f^x(1)$ . Por ser  $\tilde{F}(\{1\} \times I)$  conexo se tiene que  $\tilde{F}(\{1\} \times I) = \{f^x(1)\}$ . Por lo tanto  $g^x(1) = \tilde{F}\partial_1(1) = \tilde{F}(1, 1) = f^x(1)$ . Esto prueba que la aplicación  $G[f] = f^x(1)$  está bien definida al ser independiente del representante elegido.

Veamos que es exhaustiva. Sea  $x' \in X$  tal que  $px' = px$ . Por ser  $X$  conexo por caminos existe un camino  $h$  de  $x$  a  $x'$ . Además se tiene que  $h = (ph)^x$ . Entoces  $G[ph] = (ph)^x(1) = h(1) = x'$ . Supongamos ahora que  $G[f] = f^x(1) = g^x(1) = G[g]$  para  $f, g$  lazos basados en  $px$ . Entonces por tener  $(X, x)$  el grupo fundamental trivial se tiene que  $f^x \cdot \bar{g}^x \simeq_{\partial I} e_x$ . Entonces  $(f^x \cdot \bar{g}^x) \cdot g^x \simeq_{\partial I} e_x \cdot g^x$ . Por las propiedades del producto de caminos se tiene que  $f^x \simeq_{\partial I} g^x$ . Finalmente se tiene que  $f = pf^x \simeq_{\partial I} pg^x = g$ . Es decir,  $G$  es también inyectiva.  $\square$

## PROBLEMAS

1.1. Encontrar un homeomorfismo local que no sea una aplicación recubridora.

1.2. Para las siguientes aplicaciones continuas:

a) Probar que no son recubridoras

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty) : f(x) = |x|$$

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : g(z) = z^2$$

siendo  $\mathbb{C}$  el espacio de los complejos.

b) Probar que son recubridoras

$$h: S^1 \rightarrow S^1 : h(z) = z^2,$$

siendo  $S^1$  los complejos de módulo 1, y

$$p: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : p(n, r) = r.$$

Solución: Notemos que si  $f: X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo local, entonces existe para cada  $x \in X$  un entorno abierto  $U$  de  $x$  en  $X$  tal que  $f|_U: U \rightarrow f(U)$  es inyectiva.

Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  es un homeomorfismo local para  $0 \in \mathbb{R}$  existe  $U$  entorno abierto de  $0$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $f|_U: U \rightarrow \mathbb{R}$  es inyectiva. Por lo tanto existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f|_{(-\epsilon, \epsilon)}: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  es inyectiva. Puesto que  $f(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{\epsilon}{2} = f(-\frac{\epsilon}{2})$  se tiene que  $f|_{(-\epsilon, \epsilon)}$  no es inyectiva. Esta contradicción viene de suponer que  $f$  es un homeomorfismo, luego  $f$  no es un homeomorfismo y por lo tanto tampoco es una aplicación recubridora.

La aplicación  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  verifica que  $g|_{B(0, \epsilon)}$  no es inyectiva para cada  $\epsilon$ , donde  $B(0, \epsilon)$  es la bola de centro el origen y radio  $\epsilon$ . Utilizando el argumento anterior se obtiene que  $g$  no es recubridora.

Sea ahora la aplicación  $h: S^1 \rightarrow S^1$  dada por  $h(z) = z^2$ . Notemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{p} & S^1 \\ \theta \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{p} & S^1 \end{array}$$

donde  $\theta(r) = 2r$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . Del hecho de que  $p\theta$ ,  $p$  sean homeomorfismos locales se sigue que  $h: S^1 \rightarrow S^1$  es un homeomorfismo local como ya probamos en el lema 1.1.

Así que  $h: S^1 \rightarrow S^1$  es un homeomorfismo local exhaustivo con fibras finitas, entonces como consecuencia del lema 1.2, se sigue que  $h$  es una aplicación recubridora.

Estudiemos ahora el último caso planteado. La aplicación  $p: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $p(n, r) = r$  es tal que  $p|_{\{n\} \times \mathbb{R}}: \{n\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un homeomorfismo. Entonces el cubrimiento abierto  $\mathcal{V} = \{\mathbb{R}\}$  verifica que  $p^{-1}(\mathbb{R}) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} \times \mathbb{R}$  y las aplicaciones  $p|_{\{n\} \times \mathbb{R}}: \{n\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son homeomorfismos. Entonces  $p: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación recubridora.

1.3. Determinar razonadamente si son recubridoras las aplicaciones continuas siguientes:

- a) Sea  $f: [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$  definida por  $f(t) = \text{sen } 2\pi t$ .
- b) Sea  $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  dada por  $g(t) = t^2$ .
- c) Sea  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(t) = t^3$ .
- d) Sea  $l: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por  $l(z, t) = e^{2\pi it}$ .

En todos los espacios se consideran las topologías usuales.

1.4. Sean  $p: X \rightarrow Y$  y  $q: M \rightarrow N$  aplicaciones recubridoras. Probar que  $p \times q: X \times M \rightarrow Y \times N$  es una aplicación recubridora.

Solución: Sean  $p: X \rightarrow Y$  y  $q: M \rightarrow N$  aplicaciones recubridoras. Entonces existen cubrimientos abiertos  $\mathcal{V}$  de  $Y$  y  $\mathcal{W}$  de  $N$  tales que  $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I(V)} A_i$  y las aplicaciones  $p|_{A_i}: A_i \rightarrow V$  son homeomorfismos y análogamente  $p^{-1}(W) = \bigsqcup_{i \in I(W)} B_i$  con  $p|_{B_i}: B_i \rightarrow W$  homeomorfismos. Entonces  $\{V \times W | V \in \mathcal{V}, W \in \mathcal{W}\}$  es un cubrimiento abierto de  $Y \times N$  y se verifica que

$$(p \times q)^{-1}(V \times W) = \bigsqcup_{(i,j) \in I(V) \times I(W)} A_i \times B_j$$

y las aplicaciones  $(p \times q)|_{A_i \times B_j}: A_i \times B_j \rightarrow V \times W$  son homeomorfismos. Por lo tanto  $p \times q$  es una aplicación recubridora.

1.5. Encontrar aplicaciones recubridoras de  $\mathbb{R}^2$  en el cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$  y en el toro  $S^1 \times S^1$ .

1.6. Encontrar alguna aplicación recubridora de  $\mathbb{R} \times I$  en la banda de Möbius.

Solución: Es frecuente definir la banda de Möbius como el espacio cociente:

$$M' = ([0, 1] \times [-1, 1]) / (0, t) \sim (1, -t) \quad , \quad t \in [-1, 1]$$

y podemos denotar por  $p': [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow M'$  a la aplicación cociente.

Por otro lado podemos considerar el espacio cociente

$$M = (\mathbb{R} \times [-1, 1]) / (x, t) \sim (x + z, (-1)^z t) \quad , \quad z \in \mathbb{Z}, \quad t \in [-1, 1] .$$

En este caso la aplicación cociente  $p: \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow M$  es abierta ya que si  $U$  es abierto en  $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ , se tiene que  $p^{-1}p(U) = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \theta_z(U)$  donde  $\theta_z: \mathbb{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [-1, 1]$  es el homeomorfismo definido por  $\theta_z(r, t) = (r + z, (-1)^z t)$ .

La inclusión canónica  $\text{in}: [0, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [-1, 1]$  induce en los cocientes una aplicación continua  $\text{In}: M' \rightarrow M$  de tal modo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times [-1, 1] & \xrightarrow{\text{in}} & \mathbb{R} \times [-1, 1] \\ p' \downarrow & & p \downarrow \\ M' & \xrightarrow{\text{In}} & M \end{array}$$

Veamos que  $\text{In}$  es exhaustiva. En efecto,

$$[(r, t)] = [(r - E(r), (-1)^{E(r)})] = \text{In}[(r - E(r), (-1)^{E(r)})]' ,$$

donde  $E(r)$  denota la parte entera de  $r$ . Por otra parte si  $\text{In}[(r, t)]' = \text{In}[(r', t)]'$ , entonces  $r = r'$ ,  $t = t'$  ó  $r = 0$ ,  $r' = 1$ ,  $t = -t$  o  $r = 1$ ,  $r' = 0$ ,  $t = -t'$ . En cualquier caso  $[(r, t)]' = [(r', t)]'$ .

También se verifica que  $M$  es Hausdorff: Sean  $r, r' \in [0, 1]$  y suponemos que  $[(r, t)] \neq [(r', t')]$ . Si  $r \neq r'$  y  $\delta < \min\{|r - r'|, |r + 1 - r'|, |r - 1 - r'|\}$  se tiene que  $p((r' - \delta, r' + \delta) \times \mathbb{R} \cap (r - \delta, r + \delta) \times \mathbb{R}) = \emptyset$ . En el caso que  $r = r'$  se obtiene que  $t \neq t'$ . Ahora se comprueba que  $p(\mathbb{R} \times B_\delta(t)) \cap p(\mathbb{R} \times B_\delta(t')) = \emptyset$  para  $\delta < \frac{|t' - t|}{2}$ , donde  $B_\epsilon(s) = (s - \epsilon, s + \epsilon) \cap [-1, 1]$  es la bola de centro  $s$  y radio  $\epsilon$ .

Entonces la inclusión  $\text{In}: M' \rightarrow M$  es un homomorfismo. Además los abiertos  $p((0, 1) \times [-1, 1])$ ,  $p((\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) \times [-1, 1])$  cubren  $M$  y se tiene que

$$p^{-1}p((0, 1) \times [-1, 1]) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} ((k, k + 1) \times [-1, 1])$$

y además

$$p|_{(k, k+1) \times [-1, 1]}: (k, k + 1) \times [-1, 1] \rightarrow p((0, 1) \times [-1, 1])$$

es un homeomorfismo. Similarmente se procede para el caso del abierto  $p((\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}) \times [-1, 1])$ .

1.7. Probar que el grupo fundamental de la 2-esfera es trivial.

Solución: (Esta demostración supone que no se conoce el teorema de Seifert-van Kampen). Sea  $*$   $\in S^2$  un punto base y  $f$  un lazo basado en  $*$ . Puede suceder que la imagen de  $f$  sea toda la esfera, es por ello que vamos a ver que  $f \simeq_{\partial I} \sigma$  de tal modo que  $\text{Im}(\sigma) = \sigma(I) \neq S^2$ . Para ello tomaremos el siguiente cubrimiento de  $S^2$ , sean

$$U_i^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 | x_i > 0\} \quad i = 1, 2, 3$$

$$U_i^- = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 | x_i < 0\} \quad i = 1, 2, 3$$

abiertos cuya reunión es  $S^2$ . Aplicando el lema de Lebesgue se obtiene una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de modo que para cada subintervalo  $[t_{j-1}, t_j]$  existe  $i_j \in \{1, 2, 3\}$  tal que  $f[t_{j-1}, t_j] \subset U_{i_j}^+$  o  $f[t_{j-1}, t_j] \subset U_{i_j}^-$ . Sean los puntos  $f(t_0) = p_0 = *$ ,  $f(t_1) = p_1, \dots, f(t_n) = p_n = *$ . Consideremos los caminos  $f_j, \sigma_j$  dados por las fórmulas:

$$f_j(t) = f((1 - t)t_{j-1} + tt_j) ,$$

$$\sigma_j(t) = \frac{(1 - t)p_{j-1}t + p_j}{|(1 - t)p_{j-1}t + p_j|} , \quad t \in [0, 1]$$

Entonces se tiene que cada  $U_i^+, U_i^-$  es homeomorfo a un convexo. Por lo tanto  $f_j \simeq_{\partial I} \sigma_j$ . Así que  $f \simeq_{\partial I} (\dots((f_1 \cdot f_2) \cdot f_3) \dots f_n \simeq_{\partial I} (\dots((\sigma_1 \cdot \sigma_2) \cdot \sigma_3) \dots \sigma_n = \sigma$ . Puesto que cada  $\sigma_i$  está contenido en un círculo máximo y la reunión finita de círculos no cubre toda la 2-esfera, entonces existe

$*_\sigma \in S^2$  tal que  $\text{Im}(\sigma) \subset S^2 \setminus \{*_\sigma\}$ , donde  $* \neq *_\sigma$ . Sea  $\sigma': I \rightarrow S^2 \setminus \{*_\sigma\}$  el único lazo basado en  $*$  de  $S^2 \setminus \{*_\sigma\}$  tal que  $i\sigma' = \sigma$ , donde  $i: S^2 \setminus \{*_\sigma\} \rightarrow S^2$  es la inclusión canónica. Puesto que  $S^2 \setminus \{*_\sigma\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  se tiene que  $\pi_1(S^2 \setminus \{*_\sigma\}, *) \cong \{1\}$ . Entonces  $[\sigma] = [i\sigma'] = i_*[\sigma'] = i_*(1) = 1$ , por lo tanto  $[f] = 1$ . Es decir, cualquier elemento de  $\pi_1(S^2)$  es trivial. En consecuencia  $\pi_1(S^2) \cong \{1\}$ .

1.8. Probar que el grupo fundamental del plano proyectivo real es un grupo cíclico de orden dos.

Solución: Sea la proyección canónica  $\text{pr}: S^2 \rightarrow P^2(\mathbb{R})$ ,  $\text{pr}(x_1, x_2, x_3) = [(x_1, x_2, x_3)]$ . Utilizando la notación del ejercicio anterior se tiene que

$$\text{pr}^{-1} \text{pr}(U_i^+) = U_i^- \cup U_i^+ = \text{pr}^{-1} \text{pr}(U_i^-)$$

para  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Además  $\text{pr}|_{U_i^+}$  y  $\text{pr}|_{U_i^-}$  son homeomorfismos. Nótese que  $\text{pr}$  es una aplicación abierta, si  $U$  es un abierto de  $S^2$  se tiene que  $\text{pr}^{-1} \text{pr}(U) = U \cup a(U)$ , donde  $a$  es el homeomorfismo antipodal. Puesto que  $S^2$  es arco-conexa y simplemente conexa se tiene que la aplicación grado  $G: \pi_1(P^2(\mathbb{R}), \text{pr}(p_0)) \rightarrow \pi_1(P^2(\mathbb{R}), \text{pr}(p_0)) = \{p_0, -p_0\}$  es una biyección. Entonces  $\pi_1(P^2(\mathbb{R}), \text{pr}(p_0))$  es el grupo cíclico de orden dos.

## 2. Grupo fundamental de la circunferencia

Nótese que en el ejemplo 1.1 se tiene que  $p^{-1}(p(0)) \cong \mathbb{Z}$  y que  $\mathbb{Z}$  tiene una estructura natural de grupo.

TEOREMA 2.1. Sea  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  la aplicación exponencial definida por  $p(t) = e^{2\pi it}$ . Entonces la aplicación  $G: \pi_1(S^1, p(0)) \rightarrow \pi_1(S^1, p(0))$  es un isomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN. Si  $p: X \rightarrow Y$  es una aplicación recubridora y  $x \in X$  entonces si  $f, g: I \rightarrow X$  son lazos basados en  $x$ , tenemos que  $(f \cdot g)^x = f^x \cdot g^{f^x(1)}$ . Para el caso de  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  y  $0 \in \mathbb{R}$  se tiene que  $(f \cdot g)^0 = f^0 \cdot g^{f^0(1)}$ . Puesto que  $e_{f^0(1)} + g^0$  es un camino en  $\mathbb{R}$  que empieza en  $f^0(1)$  y es tal que para cada  $s \in I$ ,  $p(e_{f^0(1)}(s) + g^0(s)) = e^{2\pi i(f^0(1) + g^0(s))} = e^{2\pi i f^0(1)} e^{2\pi i g^0(s)} = g(s)$ , entonces  $e_{f^0(1)} + g^0 = g^{f^0(1)}$ . Por lo tanto se tiene que  $G([f \cdot g]) = (f \cdot g)^0(1) = f^0 \cdot g^{f^0(1)}(1) = g^{f^0(1)}(1) = (e_{f^0(1)} + g^0)(1) = f^0(1) + g^0(1) = G([f]) + G([g])$ .

De donde se tiene que la biyección grado  $G$  es un homomorfismo. Entonces el grupo fundamental de la circunferencia es el grupo cíclico infinito.  $\square$

COROLARIO 2.1. Todo polinomio complejo no constante tiene al menos una raíz.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, notemos que podemos suponer que el polinomio es mónico y será de la forma  $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} +$

$\dots + a_n$ . Si suponemos que  $P(z)$  no tiene raíces complejas, para cada  $r \geq 0$  la fórmula

$$F(s, t) = \frac{P(tre^{2\pi is})/P(tr)}{|P(tre^{2\pi is})/P(tr)|}$$

define una homotopía relativa a  $\partial I$  del lazo trivial de  $S^1$  basado en el 1 en el lazo  $f_r(s) = \frac{P(re^{2\pi is})/P(r)}{|P(re^{2\pi is})/P(r)|}$ . Tomemos  $r > \max\{1, |a_1| + \dots + |a_n|\}$ . Se tiene que para  $|z| = r$ ,  $|z^n| > |a_1z^{n-1} + \dots + a_n|$ , de modo que para  $0 \leq t \leq 1$ ,  $P_t(z) = z^n + t(a_1z^{n-1} + \dots + a_n)$  no tiene raíces en la circunferencia  $|z| = r$ ; en efecto, si  $0 = P_t(z) = z^n + t(a_1z^{n-1} + \dots + a_n)$ , se tiene que  $|z^n| = |t(a_1z^{n-1} + \dots + a_n)| \leq |(a_1z^{n-1} + \dots + a_0)|$ , que contradice la afirmación anterior. Entonces

$$G(s, t) = \frac{P_t(re^{2\pi is})/P_t(r)}{|P_t(re^{2\pi is})/P_t(r)|}$$

es una homotopía relativa a  $\partial I$  de  $f_r$  al lazo  $g$  definido por  $g(s) = e^{2\pi ins}$  que tiene grado  $n$ . Pero  $g$  es homótopo al lazo constante, entonces  $n = 0$ . Esto contradice la hipótesis de que  $P(z)$  es un polinomio no constante. En consecuencia  $P(z)$  tiene al menos una raíz compleja.  $\square$

**COROLARIO 2.2.** Toda aplicación continua  $f: D^2 \rightarrow D^2$  tiene al menos un punto fijo.

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $f(x) \neq x$  para  $x \in D^2$ . Definamos  $r: D^2 \rightarrow S^1$  donde  $r(x)$  es la intersección de la semirecta que empieza en  $f(x)$  y pasa por  $x$  con la circunferencia unidad  $S^1$ . Se tiene que si  $x \in S^1$  se verifica que  $r(x) = x$ . Ello implica que  $S^1$  es un retracts de  $D^2$ . Por lo tanto  $\pi_1(S^1)$  es un retracto del grupo trivial  $\pi_1(D^2)$ . Pero esto implicaría que el grupo cíclico infinito es trivial. Véase con más detalles el problema 2.4.  $\square$

## PROBLEMAS

2.1. Calcular el grupo fundamental de un espacio topológico con la topología trivial.

2.2. Calcular el grupo fundamental del cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ .

2.3. Calcular el grupo fundamental del toro y de la banda de Möbius.

2.4. Probar que  $S^1$  no es un retracto de  $D^2$ .

Solución: Supongamos que  $S^1$  es un retracto de  $D^2$ . Entonces la inclusión  $i: S^1 \rightarrow D^2$  admite una retracción  $r: D^2 \rightarrow S^1$ . Tomemos un punto base  $*$   $\in S^1$ ; de la igualdad  $ri = \text{id}_{S^1}$  se deduce que los homomorfismos inducidos satisfacen que  $r_*i_* = (\text{id}_{S^1})_*$ ; es decir, que  $\pi_1(S^1, *)$  es un retracto de  $\pi_1(D^2, *)$ . Por otra parte, puesto que  $D^2$  es contractible se tiene que  $\pi_1(D^2, *) \cong \{1\}$ . Pero un retracto del grupo trivial es trivial lo que contradice que  $\pi_1(S^1, *)$  sea el grupo cíclico infinito.

2.5. Suponer que  $f: S^1 \rightarrow S^1$  no es homótopa a la identidad. Probar que existe  $x \in S^1$  tal que  $f(x) = -x$ .

2.6. Suponer que  $a: S^1 \rightarrow S^1$  es la aplicación antipodal  $a(x) = -x$ . Probar que es homótopa a la identidad.

2.7. Dar un ejemplo de una aplicación continua y exhaustiva  $\phi: X \rightarrow Y$  tal que para algún punto base  $x \in X$  la aplicación inducida  $\phi_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \phi(x))$  no sea epimorfismo.

Solución: Considérese la aplicación recubridora  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por  $p(t) = e^{2\pi it}$ .

2.8. Dar un ejemplo de una aplicación continua e inyectiva  $\phi: X \rightarrow Y$  tal que para algún  $x \in X$  la aplicación inducida  $\phi_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \phi(x))$  no sea monomorfismo.

Solución: La inclusión  $S^1 \subset D^2$ .

2.9. Se dice que un espacio  $X$  tiene la propiedad de punto fijo si toda aplicación continua  $f: X \rightarrow X$  tiene al menos un punto fijo. Probar que un retracto de un espacio que tenga la propiedad de punto fijo tiene esta propiedad.

Solución: Sea  $A$  un retracto de  $X$  y denotemos por  $i: A \rightarrow X$  la inclusión y por  $r: X \rightarrow A$  la retracción. Entonces para  $g: A \rightarrow A$  aplicación continua, tenemos que  $f = igr: X \rightarrow X$  tiene un punto fijo  $x_0 \in X$ ; es decir,  $igr(x_0) = x_0$ . Por lo tanto  $r(x_0) = rigr(x_0) = g(r(x_0))$  es un punto fijo de  $g$ .

2.10. De los siguientes espacios: La 2-esfera, el toro, el interior del 2-disco unidad la unión por un punto de dos circunferencias. Decir cuales tienen la propiedad del punto fijo.

Solución: La aplicación antipodal  $a: S^n \rightarrow S^n$  no tiene puntos fijos. Luego se obtiene que  $S^n$  no tiene la propiedad de punto fijo. Puesto que  $S^1$  es un retracto de  $S^1 \times S^1$  y de  $S^1 \vee S^1$  tenemos que el toro y la reunión de dos circunferencias por un punto no tienen la propiedad de punto fijo. El interior de un disco es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . Las traslaciones no triviales de  $\mathbb{R}^2$  no tienen puntos fijos. Entonces el interior de un disco no tiene la propiedad de punto fijo.

2.11. Sean  $f_1, f_2: D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Utilizar el teorema del punto fijo de Brouwer para dar condiciones que aseguren que el sistema

$$f_1(x, y) = 0$$

$$f_2(x, y) = 0$$

tiene solución.

2.12. Sea  $D^2$  es disco unidad y su borde  $S^1$  la circunferencia unidad.

- a) Probar que el conjunto de los  $z \in D^2$  para lo cuales  $D^2 \setminus \{z\}$  es simplemente conexo es precisamente  $S^1$ .
- b) Demostrar que si  $f: D^2 \rightarrow D^2$  es un homeomorfismo, entonces  $f(S^1) = S^1$ .

Solución: a) Si  $z \in \partial D^2$ , entonces  $D^2 \setminus \{z\}$  es contractil. Para probarlo basta tomar la homotopía  $F: (D^2 \setminus \{z\}) \times I \rightarrow D^2 \setminus \{z\}$ ,  $F(x, t) = tx$ . Se tiene que  $F$  es una deformación fuerte de  $D^2 \setminus \{z\}$  en el subconjunto  $\{0\}$ . En el caso que  $z \notin \partial D^2$  se tiene que  $0 < 1 - |z|$ . Sea  $\delta$  tal que  $0 < \delta < 1 - |z|$  y consideremos la circunferencia  $S_\delta(z)$  de centro  $z$  y radio  $\delta$ . En este caso  $D^2 \setminus \{z\}$  retracta por deformación fuerte a  $S_\delta(z)$  mediante la homotopía  $G: (D^2 \setminus \{z\}) \times I \rightarrow D^2 \setminus \{z\}$  dada por

$$G(x, t) = (1 - t)x + t \left( z + \delta \frac{(x - z)}{|x - z|} \right)$$

b) Si  $f: D^2 \rightarrow D^2$  es un homeomorfismo, entonces  $f(S^1) = S^1$ . Sea  $z \in D^2$ , entonces  $f|_{D^2 \setminus \{z\}}: D^2 \setminus \{z\} \rightarrow D^2 \setminus \{fz\}$  tienen el mismo tipo de homotopía. Se tiene entonces que  $D^2 \setminus \{z\}$  y  $D^2 \setminus \{fz\}$  tienen el mismo tipo de homotopía. Si  $fz \notin \partial D^2$ ,  $D^2 \setminus \{z\}$  es contractil y  $D^2 \setminus \{fz\}$  tiene el mismo tipo de homotopía de una circunferencia que no es contractil. Por lo tanto  $fz$  no es un punto de  $\partial D^2$ .

2.13. Sea  $k$  un entero y sea  $h: S^1 \rightarrow S^1$  la aplicación definida por  $h(z) = z^k$ . Describir el homomorfismo inducido  $h_*: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, h(1))$  módulo el isomorfismo grado  $G: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Es decir, encontrar el homomorfismo  $H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $HG = Gh_*$ .

2.14. Probar que el grupo fundamental de un grupo topológico es abeliano.

Solución: Dados  $f, g: I \rightarrow G$  caminos en un grupo topológico, denotaremos  $f \cdot g$  el “producto usual” y por  $f * g$  el inducido por el producto  $*$  del grupo  $G$  definido por  $(f * g)(t) = f(t) * g(t)$  para  $t \in I$ . Si  $F$  es una homotopía de  $f$  a  $f'$  y  $G$  de  $g$  a  $g'$  relativas a  $\partial I$ , entonces la homotopía  $H(s, t) = F(s, t) * G(s, t)$  es una homotopía de  $f * g$  a  $f' * g'$  relativa a  $\partial I$ . Por lo tanto  $f \simeq_{\partial I} f'$  y  $g \simeq_{\partial I} g'$  implica que  $f * g \simeq_{\partial I} f' * g'$ .

Por otra parte, se tiene que para  $f, g, f', g'$  lazos de  $G$  basados en 1

$$\begin{aligned} ((f \cdot g) * (f' \cdot g'))(t) &= \begin{cases} f(2t) * f'(2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t - 1) * g'(2t - 1) & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \\ &= ((f * f') \cdot (g * g'))(t) \end{aligned}$$

Entonces  $(f \cdot g) * (f' \cdot g') = (f * f') \cdot (g * g')$ . Para  $g = f' = e_1$  se tiene que

$$f * g' \simeq_{\partial I} (f \cdot e_1) * (e_1 \cdot g') = (f * e_1) \cdot (e_1 * g') = f \cdot g'.$$

Ahora para  $f = e_1 = g'$

$$g * f' \simeq_{\partial I} (e_1 \cdot g) * (f' \cdot e_1) = (e_1 * f') \cdot (g * e_1) = f' \cdot g .$$

Por lo tanto  $g \cdot f' \simeq_{\partial I} f' \cdot g$  para lazos cualesquiera. Entonces  $\pi_1(G, 1)$  es abeliano.

2.15. Considerar la aplicación continua  $p: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  dada por  $p(z) = z^3$ .

- a) Probar que es un homeomorfismo local exhaustivo con fibras finitas. ¿Es una aplicación recubridora?
- b) Calcular el grupo fundamental de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  y el homomorfismo inducido en el grupo fundamental  $p_*: \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1)$ .
- c) Probar que el índice de  $p_*(\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1))$  en  $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1)$  coincide con el cardinal de  $p^{-1}p(1)$ .



## CAPÍTULO 4

### TEOREMA DE SEIFERT VAN-KAMPEN

En este capítulo formulamos una versión del teorema de Seifert van-Kampem en términos de presentaciones de grupos cuyas propiedades básicas analizamos a continuación.

#### 1. Preliminares sobre grupos

En esta sección, damos una versión rápida y un poco informal de la noción de presentación de un grupo y probamos la existencia de presentaciones para un grupo arbitrario. Mencionamos en la observación final de esta sección, el llamado “problema de las palabras”, que tiene gran importancia por sus implicaciones en cuestiones lógicas y de computación.

##### 1.1. Presentaciones de grupos.

DEFINICIÓN 1.1. Un *grupo libre* sobre un conjunto  $X$  es un par  $(F, i)$ , donde  $i$  es una aplicación de  $X$  en un grupo  $F$  tal que para toda otra aplicación  $f: X \rightarrow G$  de  $X$  en un grupo  $G$ , existe un único homomorfismo  $\tilde{f}: F \rightarrow G$  verificando que  $\tilde{f}i = f$ ; es decir,  $\tilde{f}$  hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F \\ & \searrow f & \swarrow \tilde{f} \\ & & G \end{array}$$

En las proposiciones siguientes vemos que sobre un conjunto existe un grupo libre que es único salvo isomorfismo.

PROPOSICIÓN 1.1. Si  $(F, i)$  y  $(F', i')$  son dos grupos libres sobre el conjunto  $X$ , entonces existe un isomorfismo  $f: F \rightarrow F'$  tal que  $fi = i'$ .

DEMOSTRACIÓN. Por ser  $F$  libre existe  $f: F \rightarrow F'$  homomorfismo tal que  $fi = i'$ . Ahora por ser  $F'$  libre existe  $f': F' \rightarrow F$  homomorfismo tal que  $f'i' = i$ . Entonces se tiene que  $f'fi = f'i' = i = \text{id}_F i$  y  $ff'i' = fi = \text{id}_{F'} i'$ . Como consecuencia de la unicidad se tiene que  $f'f = \text{id}_F$  y  $ff' = \text{id}_{F'}$ . Por lo que  $f$  es un isomorfismo.  $\square$

Respecto a la existencia se puede proceder del modo siguiente:

Para el caso que  $X$  sea el conjunto vacío, se toma  $F = \{1\}$  el grupo trivial. Si  $X$  es no vacío, se toma  $X$  como alfabeto y se considera el conjunto de las palabras de la forma

$$\omega = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n} \quad , \quad x_1, \dots, x_n \in X, n \geq 1 \quad , \quad \epsilon_i \in \{1, -1\}$$

junto con la palabra vacía que se denota por  $1$ .

Una palabra se llama reducida si no contiene una subpalabra de la forma  $x^1 x^{-1}$  o bien, de la forma  $x^{-1} x^1$  con  $x \in X$ . Por ejemplo,  $a^1 a^{-1} b^1$  no es reducida, pero  $b^1$  sí que lo es.

Sea  $F$  el cociente obtenido del conjunto de las palabras al considerar la siguiente relación: Dos palabras  $w, w'$  están relacionadas si  $w'$  se obtiene a partir de  $w$  por un número finito de operaciones de los tipos siguientes:

(i) Insertar  $x^1 x^{-1}$  ó  $x^{-1} x^1$  para  $x \in X$  en algún lugar de la palabra, incluyendo su inicio y su final. Ejemplo:  $a^{-1} a^1 b^{-1} \sim a^{-1} a^1 x^1 x^{-1} b^{-1}$ .

(ii) Suprimir  $x^1 x^{-1}$  ó  $x^{-1} x^1$  para  $x \in X$  si se encuentra en algún lugar de la palabra.

Denotemos por  $[w]$  la clase de equivalencia de la palabra  $w$ . Entonces tomaremos como  $F = \{[w] \mid w \text{ una palabra con letras de } X\}$ . El producto de  $F$  se define por yuxtaposición; es decir, dados  $[u], [v] \in F$  con  $u = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$  y  $v = y_1^{\delta_1} \cdots y_m^{\delta_m}$ , entonces el producto viene dado por

$$[u] \cdot [v] = [x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n} y_1^{\delta_1} \cdots y_m^{\delta_m}] .$$

Es fácil comprobar que está bien definido. Nótese que  $[u] \cdot [1] = [u]$  y  $[1] \cdot [u] = [u]$ , con lo cual la palabra vacía representa el neutro del grupo. Si  $u = x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$  y denotamos  $u^{-1} = x_1^{-\epsilon_n} \cdots x_n^{-\epsilon_1}$ , entonces  $[u]^{-1} = [u^{-1}] = [x_n^{-\epsilon_n} \cdots x_1^{-\epsilon_1}]$ . Finalmente, definiremos la aplicación  $i: X \rightarrow F$  por  $i(x) = [x^1]$ . Es un ejercicio rutinario el verificar que  $(F, i)$  es un grupo libre sobre el conjunto  $X$ , lo que queda reflejado en el resultado siguiente.

**PROPOSICIÓN 1.2.** El grupo  $F$  construido anteriormente junto con la aplicación  $i: X \rightarrow F$  es un grupo libre sobre el conjunto  $X$ .

Tomemos ahora un conjunto  $Y$  de palabras, que llamaremos relaciones, y consideremos dos nuevos tipos de operaciones:

(iii) Insertar  $w$  ó  $w^{-1}$  para  $w \in Y$  en algún lugar de una palabra  $u$ , incluyendo el inicio y el final de  $u$ .

(iv) Suprimir  $w$  ó  $w^{-1}$  para  $w \in Y$  si se encuentra en algún lugar de  $u$ .

El cociente determinado al considerar operaciones de tipos (i) y (ii), lo hemos llamado el grupo libre generado por el conjunto  $X$ . Pero también podemos considerar una nueva relación de equivalencia tal que  $u \sim u'$  si la palabra  $u'$  se obtiene de la palabra  $u$  mediante un número finito de operaciones de los tipos (i), (ii), (iii) y (iv). El grupo cociente obtenido se denota por  $G = \langle X \mid Y \rangle$ . Este grupo se

dice que está presentado con  $X$  como *conjunto de generadores* e  $Y$  como *conjunto de relaciones*. Nótese que grupo libre sobre  $X$  se puede denotar por  $F = \langle X | \emptyset \rangle$  y, por comodidad, también lo denotaremos por  $F = \langle X \rangle$ . Observemos que existe una proyección canónica  $p: \langle X \rangle \rightarrow \langle X | Y \rangle$ ,  $p([u]_{\emptyset}) = [u]_Y$ , donde en cada caso se consideran las clases de equivalencia correspondientes. El grupo  $\langle X | Y \rangle$  verifica la siguiente propiedad universal:

**PROPOSICIÓN 1.3.** Sea  $G = \langle X | Y \rangle$  el grupo que tiene a  $X$  como conjunto de generadores y a  $Y$  como conjunto de relaciones. Si  $f: X \rightarrow H$  es una aplicación en un grupo  $H$  tal que para cada relación  $x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n} \in Y$  se verifica que  $(fx_1)^{\epsilon_1} \dots (fx_n)^{\epsilon_n} = 1$ , entonces existe un único homomorfismo  $\bar{f}: G \rightarrow H$  tal que  $\bar{f}([x^1]) = f(x)$  con  $x \in X$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Dada una palabra  $x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}$  cualquiera, definamos

$$\hat{f}(x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}) = (fx_1)^{\epsilon_1} \dots (fx_n)^{\epsilon_n}.$$

Notemos que esta definición es invariante por las operaciones (i), (ii), (iii) y (iv). Por lo que induce una única aplicación  $\bar{f}: G \rightarrow H$  definida por  $\bar{f}([x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}]) = \hat{f}(x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n})$ , que fácilmente se comprueba que es un homomorfismo. La unicidad se desprende por verificarse la propiedad de ser homomorfismo y por la condición  $\bar{f}[x^1] = f(x)$  con  $x \in X$ .  $\square$

**DEFINICIÓN 1.2.** Diremos que un grupo  $G$  está presentado a través de un conjunto  $X$  de generadores y con conjunto  $Y$  de relaciones si  $G$  es isomorfo al grupo  $\langle X | Y \rangle$ . También se dice que  $\langle X | Y \rangle$  es una *presentación del grupo*. Diremos que un grupo es *finitamente generado* si tiene una presentación con un conjunto de generadores finito y diremos que es *finitamente presentado* si admite una presentación con conjuntos de generadores y relaciones finitos.

**OBSERVACIÓN 1.1.** En la práctica se suelen realizar algunos cambios de notación. Así por ejemplo, para el conjunto de generadores  $X = \{a, b, c\}$  y el conjunto de relaciones  $Y = \{a^2b^{-4}c^1b^8, a^5b^9, a^{-7}c^3\}$ , el grupo correspondiente se denota por

$$\langle \{a, b, c\} | \{a^2b^{-4}c^1b^8, a^5b^9, a^{-7}c^3\} \rangle.$$

Sin embargo, se acostumbra a denotarlo por

$$\langle a, b, c | a^2b^{-4}c^1b^8 = 1, a^5b^9 = 1, a^{-7}c^3 = 1 \rangle.$$

Nótese que se suprimen las llaves y en la parte de la derecha los elementos se igualan a uno, que es el valor que tienen dichas palabras en el grupo. De modo similar se procede en el resto de los casos.

También se utilizan con frecuencia los convenios siguientes: La palabra  $x^1 \dots \overset{(n)}{x^1}$  se denota por  $x^n$ ,  $x^1$  se denota simplemente por  $x$ ,  $x^{-1} + \dots \overset{(n)}{x^{-1}}$  por  $x^{-n}$  y finalmente  $x^0$  también se utiliza para denotar al neutro 1.

EJEMPLO 1.1. Grupos cíclicos.

- (i) El grupo cíclico infinito  $C_\infty = \{\dots, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, 1, x^1, x^2, \dots\}$  es el grupo libre generado por un conjunto con un elemento,  $x$ , así que  $C_\infty \cong \langle x \rangle$ .
- (ii) El grupo cíclico de orden  $n > 0$ ,  $C_n = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ , admite la siguiente presentación  $C_n = \langle x | x^n = 1 \rangle$ .

LEMA 1.1. Sea  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto de elementos que genere dicho grupo. Denotemos por  $F$  el grupo libre generado por el conjunto  $X$ . Entonces el homomorfismo  $\tilde{h}: F \rightarrow G$ , inducido por la inclusión  $h: X \rightarrow G$  y dado por  $\tilde{h}([x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}]) = x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in X$ , es un epimorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Si  $h: X \rightarrow G$  es la inclusión canónica, la existencia de  $\tilde{h}$  se deduce del hecho que  $F$  es libre sobre el conjunto  $X$ . Ahora por ser  $X$  un conjunto de generadores de  $G$ , un elemento arbitrario  $g \in G$  es de la forma  $g = x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}$ , entonces  $\tilde{h}([x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}]) = g$ . Por lo tanto  $\tilde{h}$  es exhaustiva.  $\square$

DEFINICIÓN 1.3. Sea  $Y$  un subconjunto de un grupo  $F$  y sea  $N$  la clausura normal de  $Y$  en  $F$ . Un elemento  $u$  de  $F$  se dice que es una consecuencia de  $Y$  si está en  $N$ .

Observemos que un elemento  $u$  de la clausura normal de  $Y$  en un grupo  $F$  es la forma  $u = (g_1 y_1^{\epsilon_1} g_1^{-1}) \dots (g_k y_k^{\epsilon_k} g_k^{-1})$  con  $y_1, \dots, y_k \in Y$ ,  $g_1, \dots, g_k \in F$ ,  $\epsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$  y  $k \geq 1$  entero.

PROPOSICIÓN 1.4. Sea  $G$  un grupo y  $h: F \rightarrow G$  un epimorfismo, donde  $F$  es libre sobre  $X$ . Sea  $Y$  un conjunto de palabras representando elementos del núcleo de  $h$  y cuya clausura normal sea  $\text{Ker}(h)$ . Entonces  $G \cong \langle X | Y \rangle$ .

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por  $p: F \rightarrow \langle X | Y \rangle$  la proyección natural. Notemos que las operaciones (iii) y (iv) implican que  $p(\text{Ker}(h)) = 1$ , entonces existe un único  $p': G \rightarrow \langle X | Y \rangle$  tal que  $p'h = p$ . Por otra parte por ser  $\langle X | Y \rangle$  un grupo presentando y verificarse que si  $w \in Y$  entonces  $h(w) = 1$ , existe un único homomorfismo  $h': \langle X | Y \rangle \rightarrow G$  tal que  $h'p = h$ . Las condiciones de unicidad implican que  $h'p' = \text{id}_G$  y  $p'h' = \text{id}_{\langle X | Y \rangle}$ . Por lo tanto  $G \cong \langle X | Y \rangle$ .  $\square$

COROLARIO 1.1. Todo grupo tiene una presentación.

DEFINICIÓN 1.4. Sean  $G = \langle X | Y \rangle$ ,  $G' = \langle X' | Y' \rangle$  dos presentaciones. Una *equivalencia de presentaciones* es un isomorfismo  $f: G \rightarrow G'$ . Se dice que dos presentaciones  $\langle X | Y \rangle$ ,  $\langle X' | Y' \rangle$  son equivalentes si existe una equivalencia entre dichas presentaciones.

Entre las equivalencias de presentaciones tienen especial interés las equivalencias de Tietze que son las siguientes:

- (I) Poner o quitar una relación superflua. Sea una presentación  $G = \langle X|Y \rangle$  y supongamos que  $s$  es una consecuencia de  $Y$ . Entonces  $G = \langle X|Y \rangle$  y  $G' = \langle X|Y \cup \{s\} \rangle$  son equivalentes a través de la equivalencia de tipo I, determinada por las aplicaciones  $f: X \rightarrow G'$ ,  $f(x) = x$  y  $g: X \rightarrow G$ ,  $g(x) = x$ .
- (II) Poner o quitar un generador superfluo. Si  $a \notin X$  and  $w$  una palabra que no dependa de  $a$ , entonces  $G = \langle X|Y \rangle$  y  $G' = \langle X \cup \{a\} | Y \cup \{aw^{-1}\} \rangle$  son equivalentes a través de la equivalencia de tipo II, determinada por las aplicaciones  $f: X \rightarrow G'$ ,  $f(x) = x$  y  $g: X \cup \{a\} \rightarrow G$ ,  $g(x) = x$ ,  $g(a) = w$ .

**TEOREMA 1.1.** Sean dos presentaciones  $G = \langle X|Y \rangle$  y  $G' = \langle X'|Y' \rangle$  finitamente presentadas. Entonces una equivalencia de  $G$  en  $G'$  es siempre un composición finita de equivalencias de Tietze.

**OBSERVACIÓN 1.2.** El problema de determinar cuando dos presentaciones determinan grupos isomorfos es, en general, extremadamente difícil. Un caso particular de este problema es el de determinar si una presentación corresponde o no al grupo trivial. Este problema se suele denominar como el problema de las palabras. El teorema anterior prueba que si uno sabe de antemano que dos presentaciones son equivalentes, entonces existe una equivalencia que se puede construir componiendo un número finito de equivalencias de Tietze. Sin embargo como consecuencia de los teoremas de completitud de Gödel se sabe que en general no existe un algoritmo finito que permita decidir si dos presentaciones finitamente presentadas corresponden o no a grupos isomorfos. Éste es el denominado problema de las palabras que juega un papel fundamental en la lógica matemática.

## 1.2. Presentaciones de grupos abelianos.

**DEFINICIÓN 1.5.** Un *grupo abeliano libre* sobre un conjunto  $X$  es un par  $(L, i)$ , donde  $i$  es una aplicación de  $X$  en un grupo abeliano  $L$  tal que para toda otra aplicación  $f: X \rightarrow H$  de  $X$  en un grupo abeliano  $H$ , existe un único homomorfismo  $\tilde{f}: L \rightarrow H$  verificando que  $\tilde{f}i = f$ ; es decir,  $\tilde{f}$  hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & L \\ & \searrow f & \swarrow \tilde{f} \\ & H & \end{array}$$

Como en el caso de los grupos se ve que existe un grupo abeliano libre sobre cualquier conjunto y éste es único salvo isomorfismo.

Respecto a la existencia se procede del modo parecido al caso de los grupos. Para el caso que  $X$  sea el conjunto vacío, se toma  $L = \{0\}$  el grupo abeliano trivial. Si  $X$  es no vacío, se considera el conjunto de

combinaciones lineales de la forma

$$\omega = \epsilon_1 x_1 + \epsilon_2 x_2 + \cdots + \epsilon_n x_n$$

$$x_1, \cdots, x_n \in X, \epsilon_i \in \{1, -1\}, n \geq 1 \text{ entero}$$

junto con la combinación vacía que se denota por 0. En estas combinaciones lineales se admite la conmutatividad; por ejemplo,  $1x_1 + 1x_2 = 1x_2 + 1x_1$ .

Dos combinaciones lineales  $w, w'$  están relacionadas si  $w'$  se obtiene a partir de  $w$  por un número finito de operaciones de los tipos siguientes: Insertar  $1x + (-1)x$ ,  $x \in X$  en algún lugar de  $w$  y suprimir,  $1y + (-1)y$  para  $y \in X$ , si se encuentra en algún lugar de  $w$ . El cociente, que denotamos  $L$ , es precisamente el grupo abeliano libre sobre  $X$ .

Utilizaremos los convenios siguientes: La combinación lineal  $1x + \cdots + 1x$  se denota por  $nx$ ,  $1x$  se denota simplemente por  $x$ ,  $(-1)x + \cdots + (-1)x$  por  $-mx$ ,  $(-1)x$  se denota por  $-x$  y 0 se puede escribir, a veces, como  $0x$ .

Consideremos ahora un conjunto  $Y$  de combinaciones lineales, que llamaremos relaciones, se pueden considerar dos nuevos tipos de operaciones: Insertar  $w$  ó  $-w$  para  $w \in Y$  en algún lugar de una combinación lineal  $u$ , o suprimir  $w$  ó  $-w$  para  $w \in Y$  si se encuentra en algún lugar de  $u$ .

El grupo abeliano determinado al considerar operaciones de tipos anteriores se dice que está presentado abelianamente con  $X$  como conjunto de generadores e  $Y$  como conjunto de relaciones. Este grupo lo denotaremos por  $[X|Y]$ . Si un grupo abeliano  $H$  es isomorfo a  $[X|Y]$  diremos que  $[X|Y]$  es una *presentación abeliana* de  $H$ . Nótese que con este convenio el grupo abeliano libre sobre  $X$  se puede denotar por  $L = [X|\emptyset]$ , y por comodidad también por  $L = [X]$ . De modo análogo a caso de los grupos, se introducen las nociones de grupo abeliano finitamente generado y finitamente presentado.

EJEMPLO 1.2. (i) El grupo cíclico infinito considerado como grupo abeliano se denota frecuentemente por

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \\ &\cong \{\dots, -3x, -2x, -1x, 0x, 1x, 2x, \dots\} \end{aligned}$$

Es el grupo abeliano libre generado por un conjunto con un elemento,  $x$ ,  $\mathbb{Z} \cong [x]$ .

(ii) El grupo cíclico de orden  $n > 0$  considerado como grupo abeliano, que se suele denotar por  $\mathbb{Z}/n = \{0, 1x, 2x, \dots, (n-1)x\}$ , admite como grupo abeliano la siguiente presentación abeliana  $\mathbb{Z}/n = [x|nx = 0]$ .

Si  $X$  un conjunto de elementos que genera un grupo abeliano  $H$ , entonces el homomorfismo  $h: [X] \rightarrow H$  definido por  $h(1x) = x$  es un epimorfismo. Si  $Y$  es un conjunto de generadores de  $\text{Ker}(h)$  entonces

$G \cong [X|Y]$ . De este modo se tiene que todo grupo abeliano tiene una presentación abeliana.

Si  $G$  es un grupo y consideramos el *subgrupo conmutador*  $[G, G] = \{[x, y] | x, y \in G\}$ , donde  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$  diremos que es el *conmutador* de  $x$  e  $y$ , entonces se tiene que  $[G, G]$  es un subgrupo normal y  $G/[G, G]$  es un grupo abeliano, que llamaremos la *abelianización* de  $G$ .

PROPOSICIÓN 1.5. Sea  $G$  un grupo presentado por  $\langle X|Y \rangle$ . Entonces su abelianizado considerado como grupo tiene la presentación siguiente

$$G/[G, G] \cong \langle X|Y \cup \{aba^{-1}b^{-1} | a, b \in X\} \rangle .$$

Como grupo abeliano su presentación abeliana es

$$G/[G, G] \cong [X|\{\omega_a | w \in Y\}] ,$$

donde si  $\omega = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ ,  $\omega_a = \epsilon_1 x_1 + \epsilon_2 x_2 + \cdots + \epsilon_n x_n$ .

## PROBLEMAS

1.1. Sea  $G$  un grupo en el que denotamos el producto por  $*$ . Tomemos como generadores  $X = G$  y como relaciones  $Y = \{(x * y)y^{-1}x^{-1} | x, y \in G\}$ . Probar que  $G \cong \langle X|Y \rangle$ .

Solución: Sea  $i: G \rightarrow \langle X|Y \rangle$  la aplicación canónica. Notemos que  $i$  es un homomorfismo,  $i(x * y) = [x * y] = [(x * y)y^{-1}x^{-1}xy] = [xy] = [x][y] = i(x)i(y)$  para  $x, y \in G$ . Por otro lado el homomorfismo identidad  $f: G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x$ , verifica que  $f(x * y) * (fy)^{-1} * (fx)^{-1} = f(x * y * y^{-1} * x^{-1}) = f(1) = 1$ . Luego por la proposición 1.3 extiende a un homomorfismo  $F: \langle X|Y \rangle \rightarrow G$  de modo que  $Fi = f = \text{id}_G$ . Además para cada generador  $x \in X = G$  se tiene que  $iF[x] = if(x) = i(x) = [x]$ . Entonces  $iF = \text{id}_{\langle X|Y \rangle}$ . Por lo tanto  $G \cong \langle X|\{(x * y)y^{-1}x^{-1} | x, y \in X = G\} \rangle$ .

1.2. ¿Cuál es el orden del grupo siguiente?

$$\langle A, B | A^4 = 1, \quad A^2 B^{-2} = 1, \quad A^3 B A^{-1} B^{-1} = 1 \rangle$$

Solución: Consideremos el grupo cuaterniónico dado por los elementos  $q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ . Recordemos que en este grupo el producto queda determinado por las fórmulas  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,  $ij = k$ ,  $jk = i$ ,  $ki = j$  y que se trata de un grupo que tiene ocho elementos. Sea  $f: G \rightarrow q$  definido por  $f(A) = i$ ,  $f(B) = j$ . Está bien definida puesto que

$$\begin{aligned} (fA)^4 &= i^4 = (-1)^2 = 1 \\ (fA)^2 (fB)^{-2} &= i^2 j^{-2} = (-1)(-1) = 1 \\ (fA)^3 (fB)^2 (fA)^{-1} (fB)^{-1} &= i^3 j i^{-1} j^{-1} \\ &= (-i)(j)(-i)(-j) = -(ij)^2 = -k^2 = 1 \end{aligned}$$

Notemos que  $f(A) = i$  tiene orden cuatro en  $q$ . De esta observación se sigue que el subgrupo generado por  $A$  en  $G$  es normal y que  $A$  tiene orden cuatro. Luego  $G$  tiene un subgrupo normal que es un cíclico de orden cuatro que además tiene índice dos. Ésto implica que  $G$  tiene orden ocho. Ahora es fácil ver que además  $f: G \rightarrow q$  es un isomorfismo.

1.3. Demostrar que el grupo presentado por  $\langle A, B | A^4 = 1, B^2 = 1, ABA^{-1}B^{-1} = 1 \rangle$  es isomorfo al producto de un cíclico de orden cuatro por un cíclico de orden dos.

Solución: La relación  $ABA^{-1}B^{-1} = 1$  implica que el grupo es abeliano. Aplicando la proposición 1.5 se tiene que su presentación abeliana es  $[A, B | 4A = 0, 2B = 0]$ . Ahora no es difícil ver que se trata del producto  $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$ .

1.4. Dar una presentación abeliana del grupo abeliano dado por una suma finita de grupos cíclicos.

Solución: Una suma finita de grupos cíclicos puede algunos sumandos que sean grupos cíclicos infinitos y el resto que sean cíclicos finitos de órdenes  $k_1, \dots, k_m$ . Entonces el grupo abeliano  $\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/k_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/k_m$  tiene la presentación abeliana

$$[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m | k_1 y_1 = 0, \dots, k_m y_m = 0]$$

1.5. Dar una presentación abeliana del subgrupo del grupo aditivo de los racionales formados por aquellas fracciones irreducibles cuyo denominador es una potencia de dos.

Solución: Sea  $H = \{\frac{m}{2^n} | m \in \mathbb{Z}, n \geq 0, n \in \mathbb{Z}\}$  el correspondiente subgrupo en el que utilizaremos notación aditiva. Notemos que si  $a'_i = \frac{1}{2^i}$ ,  $i = 0, 1, 3, \dots$ , entonces  $2a'_{i+1} = 2\frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^i} = a'_i$ . Tomemos el grupo

$$[a_0, a_1, a_2, \dots | 2a_0 = a_1, 2a_1 = a_2, \dots]$$

Ahora se comprueba que  $f: \{a_0, a_1, a_2, \dots\} \rightarrow H$  definida por  $f(a_i) = a'_i = \frac{1}{2^i}$  extiende a un isomorfismo

$$f: [\{a_i | i \geq 0\} | \{2a_{i+1} = a_i | i \geq 0\}] \rightarrow H.$$

Se puede probar que  $H$  no admite una presentación abeliana finita con el siguiente argumento: Un grupo abeliano finitamente presentado es isomorfo a una suma finita de cíclicos. Puesto que  $H$  es libre de torsión no pueden ser cíclicos finitos. Por otra parte una suma finita de cíclicos infinitos no es divisible por 2 y sin embargo  $H$  sí que lo es.

1.6. Probar que el grupo aditivo de los números reales no tiene una presentación abeliana contable.

Solución: Si un grupo abeliano es contablemente generado, entonces dicho grupo es contable. Puesto que  $\mathbb{R}$  no es contable, una presentación abeliana de  $\mathbb{R}$  ha de tener un conjunto de generadores con cardinal no contable.

1.7. (Teorema de clasificación de los grupos abelianos finitamente generados) Encontrar un algoritmo que a partir de una presentación abeliana finita dada encuentre una equivalente que lo presente abelianamente como una suma de grupos cíclicos.

1.8. Encontrar un grupo abeliano que todo elemento sea de orden finito y que no sea suma de cíclicos finitos.

Solución: Sea  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ , donde  $\mathbb{Q}$  denota los racionales y  $\mathbb{Z}$  son los enteros. Notemos que todo elemento de torsión, también se verifica que en  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  todo elemento es divisible. Observemos que en un grupo cíclico  $\mathbb{Z}/r$  de orden finito  $r$ , si  $a \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{Z}/r$ ,  $a$  no es  $r$ -divisible, ya que para cualquier  $a'$  se tiene que  $ra' = 0 \neq a$ . Entonces una suma de cíclicos no es divisible. Así que una suma de cíclicos no es isomorfa a  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

## 2. Teorema de Seifert-van Kampen

Este teorema, que probamos en esta sección, es una herramienta básica para el cálculo de presentaciones de grupos fundamentales. Si un espacio  $X$  es la reunión de dos subespacios,  $X = X_1 \cup X_2$ , entonces bajo ciertas condiciones se puede calcular una presentación del grupo fundamental de  $X$  en función de presentaciones de los grupos fundamentales de  $X_1$  y  $X_2$  y de las propiedades de un conjunto de generadores del grupo fundamental de la intersección.

LEMA 2.1. Sea  $f: I \rightarrow X$  un camino en un espacio  $X$ , supongamos que  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$  es una partición de  $I$  y sean los caminos  $f_i: I \rightarrow X$  definidos por  $f_i(s) = f((1-s)t_{i-1} + st_i)$  para  $i = 1, \dots, n$ . Entonces  $[f] = [(\dots((f_1 \cdot f_2) \cdot f_3) \dots)]$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\phi: I \rightarrow I$  la aplicación continua que  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi(\frac{2^i}{2^n}) = t_i$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$  y tal que es lineal en cada subintervalo. Se tiene que  $\phi(0) = 0$  y también  $\phi(1) = 1$ . Entonces por el lema 1.1 del capítulo 2, se tiene que  $f \simeq_{\partial I} f\phi = (\dots((f_1 \cdot f_2) \cdot f_3) \dots)$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 2.1. Supongamos que  $X = \text{Int}X_1 \cup \text{Int}X_2$  y además  $X_1 \cap X_2$ ,  $X_1, X_2$  son conexos por caminos y tenemos un punto base  $*$   $\in X_1 \cap X_2$ . Denotemos por  $\psi_1: X_1 \rightarrow X$ ,  $\psi_2: X_2 \rightarrow X$  las inclusiones canónicas y supongamos que  $S_1$  y  $S_2$  son sistemas de generadores de  $\pi_1(X_1, *)$  y  $\pi_1(X_2, *)$ , respectivamente. Entonces  $(\psi_1)_*(S_1) \cup (\psi_2)_*(S_2)$  es un sistema de generadores de  $\pi_1(X, *)$ .

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente probar que un elemento de  $\pi_1(X, *)$  se puede descomponer como un producto de elementos de

$$(\psi_1)_*\pi_1(X_1, *) \cup (\psi_2)_*\pi_1(X_2, *) .$$

Sea un elemento representado por un camino  $f: I \rightarrow X$ . Puesto que  $\{f^{-1}(\text{Int}X_1), f^{-1}(\text{Int}X_2)\}$  es un cubrimiento abierto de  $I$ . Aplicando el

lema de Lebesgue se tiene que existe una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  tal que  $f([t_{i-1}, t_i]) \subset \text{Int}X_{l_i}$  para  $l_i \in \{1, 2\}$ . Además se puede suponer que  $f(t_i) \in X_1 \cap X_2$  para  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Por ser  $X_1 \cap X_2$  conexo por caminos, existen caminos  $g_i: I \rightarrow X_1 \cap X_2$  tales que  $g_i(0) = *$ ,  $g_i(1) = f(t_i)$  y en el caso que  $f(t_i) = *$ , entonces  $g_i = *$ . Por el lema anterior se tiene que  $[f] = [(\dots((f_1 \cdot f_2) \cdot f_3) \dots)] = [g_0 \cdot (f_1 \cdot \bar{g}_1)] \cdot \dots \cdot [g_{n-1} \cdot (f_n \cdot \bar{g}_n)]$ . Teniendo en cuenta que  $[g_{i-1} \cdot (f_i \cdot \bar{g}_i)] = (\psi_{l_i})_* [g_{i-1} \cdot (f_i \cdot \bar{g}_i)]_{l_i}$ ,  $l \in \{1, 2\}$ , donde  $[-]_l$  denota clases de lazos de  $(X_l, *)$ , se obtiene el resultado enunciado.  $\square$

COROLARIO 2.1. Para  $n \geq 2$ ,  $S^n$  es simplemente conexa.

DEMOSTRACIÓN. Para  $n \geq 2$ , los subconjuntos  $X_1 = \{x \in S^n | x_{n+1} \leq \frac{1}{2}\}$  y  $X_2 = \{x \in S^n | x_{n+1} \geq -\frac{1}{2}\}$  son contractibles y verifican las hipótesis de la proposición anterior.  $\square$

En las condiciones de la proposición anterior, el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X_1 \cap X_2 & \xrightarrow{\phi_1} & X_1 \\ \phi_2 \downarrow & & \downarrow \psi_1 \\ X_2 & \xrightarrow{\psi_2} & X \end{array}$$

induce el siguiente diagrama de grupos

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2, *) & \xrightarrow{(\phi_1)_*} & \pi_1(X_1, *) \\ (\phi_2)_* \downarrow & & \downarrow (\psi_1)_* \\ \pi_1(X_2, *) & \xrightarrow{(\psi_2)_*} & \pi_1(X, *) \end{array}$$

Supongamos que  $S, S_1, S_2$  son sistemas de generadores de  $\pi_1(X_1 \cap X_2, *)$ ,  $\pi_1(X_1, *)$ ,  $\pi_1(X_2, *)$ , respectivamente y que  $R_1, R_2$  son conjuntos de relaciones para los dos últimos grupos. Si para cada  $w \in S$  se tiene que  $(\phi_1)_*(w) = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$  con  $x_1, \dots, x_n \in S_1$  y  $(\phi_2)_*(w) = y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m}$  con  $y_1, \dots, y_m \in S_2$ , entonces consideremos el conjunto de relaciones  $R = \{(\phi_1)_*(w) = (\phi_2)_*(w) | w \in S\}$ , donde la expresión  $(\phi_1)_*(w) = (\phi_2)_*(w)$  es una interpretación informal de la relación  $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} y_m^{-\delta_m} \dots y_1^{-\delta_1}$ .

TEOREMA 2.1. Sea  $X$  un espacio tal que  $X = \text{Int}X_1 \cup \text{Int}X_2$ , supongamos que los espacios  $X_1 \cap X_2, X_1, X_2$  son conexos por caminos y que tenemos un punto base  $* \in X_1 \cap X_2$ . Supongamos que  $S$  es un sistema de generadores de  $\pi_1(X_1 \cap X_2, *)$ ,  $\pi_1(X_1, *) \cong \langle S_1 | R_1 \rangle$  y  $\pi_1(X_2, *) \cong \langle S_2 | R_2 \rangle$ . Entonces  $\pi_1(X, *) \cong \langle S_1 \cup S_2 | R \cup R_1 \cup R_2 \rangle$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el epimorfismo natural del grupo libre sobre la reunión disjunta de los generadores  $\langle S_1 \cup S_2 \rangle \rightarrow \pi_1(X, *)$  tal que un elemento de la forma  $a_{l_1} \dots a_{l_k}$  con  $a_{l_i} \in \langle S_{l_i} \rangle$  y  $l_i \in \{1, 2\}$

es aplicado en  $(\psi_{l_1})_*[a_{l_1}] \cdots (\psi_{l_k})_*[a_{l_k}]$ . Supongamos que su imagen es trivial  $(\psi_{l_1})_*[a_{l_1}] \cdots (\psi_{l_k})_*[a_{l_k}] = 1$ . Si  $[a_{l_1}] = [f_1], \dots, [a_{l_k}] = [f_k]$  con  $f_i: I \rightarrow X_{l_i}$ , entonces se tiene que  $(\psi_{l_1})_*[a_{l_1}] \cdots (\psi_{l_k})_*[a_{l_k}] = [(\cdots ((f_1 \cdot f_2) \cdot f_3) \cdots f_k)] = [f]$ , donde se puede suponer que la reparametrización  $f$  es tal que  $f(t) = f_i(kt - i + 1)$  para  $\frac{i-1}{k} \leq t \leq \frac{i}{k}$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Por lo tanto existe una homotopía  $F: I \times I \rightarrow X$  tal que  $F(s, 0) = f(s)$ ,  $F(s, 1) = *$ ,  $F(0, t) = *$ ,  $F(1, t) = *$  con  $s, t \in I$ .

Puesto que  $\{F^{-1}(\text{Int}X_1), F^{-1}(\text{Int}X_2)\}$  es un cubrimiento abierto del espacio métrico compacto  $I \times I$ , entonces existen particiones  $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$  tales que  $F([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \subset \text{Int}X_{l_{ij}}$  para  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  y  $l_{ij} \in \{1, 2\}$ . Además se puede suponer que  $\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, 1\} \subset \{s_0, s_1, \dots, s_m\}$ . Consideremos los caminos  $f_{ij}$  definidos por  $f_{ij}(s) = F((1-s)s_{i-1} + ss_i, t_j)$  para  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{0, \dots, n\}$  y los caminos  $g_{ij}$  definidos por  $g_{ij}(t) = F(s_i, (1-t)t_{j-1} + tt_j)$  para  $i \in \{0, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Para los puntos  $(s_i, t_j)$  con  $F(s_i, t_j) = *$ , tomemos caminos  $h_{ij} = *$ , si los puntos  $(s_i, t_j)$  no satisfacen la condición anterior y son tales que  $F(s_i, t_j)$  está en  $X_1 \cap X_2$  tomemos caminos  $h_{ij}$  dentro de  $X_1 \cap X_2$  de  $*$  a  $F(s_i, t_j)$ . En el caso que  $F(s_i, t_j)$  está en  $X_l \setminus (X_1 \cap X_2)$  tomemos caminos  $h_{ij}$  dentro de  $X_l$  de  $*$  a  $F(s_i, t_j)$ . Notemos que los lazos  $(h_{i-1,j} \cdot f_{ij}) \cdot \bar{h}_{ij}$  están en  $X_1$  o en  $X_2$ , Por lo tanto  $[(h_{i-1,j} \cdot f_{ij}) \cdot \bar{h}_{ij}] = [a_{ij}]$  con  $a_{ij} \in \langle S_{l_{ij}} \rangle$ . Entonces mediante relaciones de  $R_1 \cup R_2$  se tiene que  $a_{l_1} \cdots a_{l_k} \sim a_{10}a_{20} \cdots a_{m0}$ .

Observemos que si un lazo de la forma  $(h_{i,j-1} \cdot g_{ij}) \cdot \bar{h}_{ij}$  está contenido en  $X_1$ , entonces  $[(h_{i,j-1} \cdot g_{ij}) \cdot \bar{h}_{ij}] = [b'_{ij}]$  con  $b'_{ij} \in \langle S_1 \rangle$  y si está contenido en  $X_2$ , entonces  $[(h_{i,j-1} \cdot g_{ij}) \cdot \bar{h}_{ij}] = [b''_{ij}]$  con  $b''_{ij} \in \langle S_2 \rangle$ . En el caso que este contenido en  $X_1 \cap X_2$  se tiene la relación  $b'_{ij} \sim b''_{ij}$ . Notemos que  $(h_{i-1,j} \cdot f_{ij}) \cdot \bar{h}_{ij} \simeq_{\partial I} ((h_{i-1,j} \cdot g_{i-1,j+1}) \cdot \bar{h}_{i-1,j+1})((h_{i-1,j+1} \cdot f_{i,j+1}) \cdot \bar{h}_{i,j+1})((h_{i,j+1} \cdot \bar{g}_{i,j+1}) \cdot \bar{h}_{ij})$

Si  $F([s_{i-1}, s_i] \times [t_j, t_{j+1}]) \subset \text{Int}X_1$ , entonces tenemos que  $a_{ij} \sim b'_{i-1,j+1}a_{i,j+1}b'^{-1}_{i,j+1}$  y si está contenido en  $\text{Int}X_2$ , entonces  $a_{ij} \sim b''_{i-1,j+1}a_{i,j+1}b''^{-1}_{i,j+1}$ . Sustituyendo y teniendo en cuenta que  $b_{0,j+1} \sim 1$ ,  $b'_{ij} \sim b''_{ij}$  y que  $b_{m,j+1} \sim 1$  se obtiene  $a_{10}a_{20} \cdots a_{m0} \sim a_{11}a_{21} \cdots a_{m1} \sim a_{n1}a_{n2} \cdots a_{mn} \sim 1$ . Por lo tanto  $a_{l_1} \cdots a_{l_k}$  mediante relaciones de  $R_1 \cup R_2 \cup R$  es equivalente a 1.  $\square$

**COROLARIO 2.2.** En las condiciones de teorema anterior si  $X_1 \cap X_2$  es simplemente conexo, entonces  $\pi_1(X, *) \cong \langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \rangle$ .

El siguiente resultado puede ser de gran utilidad ya que permite calcular el grupo fundamental de los espacios que se construyen adjuntando celdas. El grupo fundamental de un espacio de este tipo depende únicamente del tipo de homotopía de su 2-esqueleto de modo que los conjuntos de 1-celdas y 2-celdas determinan generadores y relaciones.

PROPOSICIÓN 2.2. Sea  $f: S^1 \rightarrow X$  una aplicación continua y consideremos el espacio  $X \cup_f D^2 = X \amalg D^2 / f(s) \sim s, s \in S^1$ . Supongamos que  $\pi_1(X) = \langle S|R \rangle$  y que  $a = [fp] = s_1^{\epsilon_1} \cdots s_n^{\epsilon_n}$  siendo  $p: I \rightarrow S^1$  la proyección canónica y  $s_1, \dots, s_n \in S$ . Entonces  $\pi_1(X \cup_f D^2, *) \cong \langle S|R \cup \{a\} \rangle$ .

### PROBLEMAS

2.1. Calcular el grupo fundamental de  $X = C_1 \cup C_2$ , donde  $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 = 1\}$  y  $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ .

Solución: Sea  $X$  la reunión de circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  que se cortan en un punto. Si tomamos  $X_1 = \{(x, y) \in X | x \leq \frac{1}{2}\}$  y  $X_2 = \{(x, y) \in X | -\frac{1}{2} \leq x\}$ . Notemos que se verifican las condiciones del teorema de Seifert-van Kampen 2.1 y que  $X_1 \cap X_2$  es contractil. La deformación  $F: X_1 \times I \rightarrow X_1$

$$F((x, y), t) = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \\ (1, 0) + \frac{(1-t)(x, y) - (1, 0)}{|(1-t)(x, y) - (1, 0)|} \end{array} \right\}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

hace que  $X_1$  tenga el mismo tipo de homotopía que  $C_1$ , véase la proposición 3.1 del capítulo 1. Por argumentos similares se obtiene que  $X_2$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $C_2$ . Sabemos por el teorema 2.1 del capítulo 2 que una equivalencia de homotopía induce isomorfismo en los grupos fundamentales y por el teorema 2.1 del capítulo 3 el grupo fundamental de la circunferencia es el grupo libre generado por un elemento. Así que  $\pi_1 X_1 \cong \langle a \rangle$  y  $\pi_1 X_2 \cong \langle b \rangle$ . Entonces  $\pi_1 X \cong \langle a, b \rangle$ .

2.2. Sea  $X$  el siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ .

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \in [-1, 1] \text{ y } x \text{ ó } y \in \mathbb{Z}\}$$

Determinar el grupo fundamental de  $X$ .

Solución: Consideremos los subespacios  $X_1 = \{(x, y) \in X | x \leq \frac{1}{2}\}$  y  $X_2 = \{(x, y) \in X | -\frac{1}{2} \leq x\}$ . Notemos que se verifican las condiciones del teorema de Seifert-van Kampen 2.1 y que  $X_1 \cap X_2$  es contractil, entonces si  $\pi_1 X_1 \cong \langle S_1 | R_1 \rangle$  y  $\pi_1 X_2 \cong \langle S_2 | R_2 \rangle$  se tiene que  $\pi_1 X \cong \langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \rangle$ .

Sea ahora  $Y = X_1$  y tomemos  $Y_1 = \{(x, y) \in Y | y \leq \frac{1}{2}\}$ ,  $Y_2 = \{(x, y) \in Y | -\frac{1}{2} \leq y\}$ . De nuevo se verifican las condiciones del teorema de Seifert-van Kampen y que  $Y_1 \cap Y_2$  es contractil. Si  $\pi_1 Y_1 \cong \langle S_1^1 | R_1^1 \rangle$  y  $\pi_1 Y_2 \cong \langle S_1^2 | R_1^2 \rangle$  se tiene que  $\pi_1 X_1 \cong \langle S_1^1 \cup S_1^2 | R_1^1 \cup R_1^2 \rangle$ . Análogamente,  $\pi_1 X_2 \cong \langle S_2^1 \cup S_2^2 | R_2^1 \cup R_2^2 \rangle$ . Como  $Y_1$  y  $Y_2$  y también los subespacios de  $X_2$  son del tipo de homotopía de una circunferencia, aplicando el teorema 2.1 del capítulo 2 y el teorema 2.1 del capítulo 3, se tiene que  $S_1^1 = \{a\}$ ,  $S_1^2 = \{b\}$ ,  $S_2^1 = \{c\}$ ,  $S_2^2 = \{d\}$  y  $R_1^1 = R_1^2 = R_2^1 = R_2^2 = \emptyset$ . Por lo tanto  $\pi_1 X = \langle a, b, c, d \rangle$ .

2.3. Sea  $X_n$  la rosa de  $n$  pétalos; es decir, la unión de  $n$  circunferencias que se intersectan en un sólo punto. Demostrar que el grupo fundamental de  $X_n$  es un grupo libre con  $n$  generadores.

Solución: Se puede probar por inducción. Los detalles de la demostración dependerán del representante que tomemos de la rosa de  $n$  pétalos en la clase de homeomorfía. Por ejemplo, si denotamos por  $Y_n = [-1, 1] \times \{1, \dots, n\}$ , se puede tomar como representante el cociente  $X_n = Y_n / (-1, i) \sim (1, j)$  donde  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  y denotemos por  $\pi: Y_n \rightarrow X_n$  la proyección canónica. Tomemos

$$Z_1 = \pi(Y_{n-1} \cup \{(r, n) \mid |r| \geq \frac{1}{2}\}) ,$$

$$Z_2 = \pi((-1, 1] \times \{n\} \cup \{(r, i) \mid |r| \geq \frac{1}{2}, 1 \leq i \leq n-1\}) .$$

Notemos que  $Z_1$  se deforma fuertemente hasta  $X_{n-1}$  mediante la homotopía

$$F(\pi(r, i), t) = \begin{cases} \pi(r, i) & , \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \pi(1-t)r + t\frac{r}{|r|}, n) & , \quad i = n . \end{cases}$$

De modo parecido se ve que  $Z_2$  se deforma fuertemente a una circunferencia y que  $Z_1 \cap Z_2$  es contractil. Entonces por hipótesis de inducción  $\pi_1(Z_1) \cong \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$  y además  $\pi_1(Z_2) \cong \langle a_n \rangle$  por el teorema 2.1 del capítulo 3. Aplicando el teorema de Seifert-van Kampen 2.1, se obtiene que  $\pi_1(X_n) \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .

2.4. Probar que un grafo finito tiene el mismo tipo de homotopía que una rosa de pétalos.

Solución: En primer lugar, probemos el siguiente resultado:

**Lema:** Si  $A \subset X$ ,  $A$  contractil y  $(A \times I) \cup (X \times 0)$  es un retracto de  $X \times I$ , entonces  $p: X \rightarrow X/A$  es una equivalencia de homotopía.

Demostración: Puesto que  $A$  es contractil existe una homotopía  $g': A \times I \rightarrow A$  tal que  $g'(a, 0) = a$  para  $a \in A$  y  $g'(a, 1) = x_0$  con  $x_0 \in A$ . Realizemos una primera extensión tomando  $g: (A \times I) \cup (X \times 0) \rightarrow X$  de modo que  $g(a, t) = g'(a, t)$ ,  $(a, t) \in A \times I$  y  $g(x, 0) = x$ ,  $x \in X$ . Extendamos de nuevo  $g$  a una homotopía  $G: X \times I \rightarrow X$  definida por  $G = gr$ , donde  $r$  es la retracción existente. Denotemos por  $*$  la clase de equivalencia  $A$  del cociente  $X/A$ . Notemos que puesto que  $pG(A \times I) = *$ , se obtiene una homotopía  $\overline{pG}: (X/A) \times I \rightarrow X/A$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{G} & X \\ p \times \text{id}_I \downarrow & & \downarrow p \\ (X/A) \times I & \xrightarrow{\overline{pG}} & X/A \end{array}$$

conmuta.

Además  $G\partial_1(A) = x_0$ , luego existe una única  $\overline{G\partial_1}: X/A \rightarrow X$  tal que  $\overline{G\partial_1}p = G\partial_1$ . Veamos que  $p: X \rightarrow X/A$  y  $\overline{G\partial_1}: X/A \rightarrow X$  son equivalencias de homotopía. Por un lado

$$\overline{G\partial_1}p = G\partial_1 \simeq G\partial_0 = \text{id}_X .$$

Por otro lado,

$$\overline{pG\partial_0}p = \overline{pG}(p \times \text{id}_I)\partial_0 = pG\partial_0 = p = \text{id}_{X/A}p .$$

Entonces  $\overline{pG\partial_0} = \text{id}_{X/A}$ . También se tiene que

$$\overline{pG\partial_1}p = \overline{pG}(p \times \text{id}_I)\partial_1 = pG\partial_1 = \overline{pG\partial_1}p .$$

Por lo tanto  $\overline{pG\partial_1} = \overline{pG\partial_1}$ . Así que cada una es inversa de la otra.

Sea ahora  $G$  un grafo y  $\sigma$  una arista que une dos vértices distintos de  $G$ . Puesto que  $((\partial I) \times I) \cup (I \times 0)$  es un retracto de  $I \times I$ , no es difícil ver que  $(\sigma \times I) \cup (G \times 0)$  es un retracto de  $G \times I$ . Por lo tanto  $G \rightarrow G/\sigma$  es una equivalencia de homotopía. Notemos que  $G/\sigma$  es de nuevo un grafo finito, pero con un vértice menos. El proceso anterior se puede repetir y cada vez se reduce un vértice. Al final queda un grafo con un sólo vértice; es decir, una rosa de pétalos.

2.5. Probar que un grupo libre es siempre el grupo fundamental de algún grafo.

2.6. Calcular una presentación del grupo fundamental del subconjunto del plano formado por aquellos puntos que al menos tienen una coordenada entera.

2.7. Calcular el grupo fundamental de la 2-esfera.

Solución: En primer lugar observamos que este grupo fundamental ya lo hemos calculado en el problema 1.7 del capítulo 3. Veamos que su cálculo es mucho más simple si se dispone del teorema de Seifert-van Kampen.

Sea  $X = S^2$ ,  $X_1 = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  y  $X_2 = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ . Utilizando la proyección estereográfica se tiene que  $X_1 = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  que también es homeomorfo a  $X_2 = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ . Puesto que  $\mathbb{R}^2$  es contractil, se tiene que  $\pi_1(X_1) \cong \pi_1(X_2) \cong 1$ . Aplicando el teorema de Seifert-van Kampen 2.1 se tiene que  $\pi_1(S^2) \cong 1$ .

2.8. Calcular el grupo fundamental del toro.

2.9. Probar que todo conmutador trivial del grupo fundamental de un espacio se puede “representar” por la restricción de una aplicación continua y basada de un toro basado a la reunión del meridiano y del paralelo que pasan por el punto base.

Solución: Sea un conmutador  $aba^{-1}b^{-1} \in \pi_1(X)$ . Si  $a = [f]$  y  $b = [g]$  y  $aba^{-1}b^{-1} = 1$ , se tiene que el lazo  $((f \cdot g) \cdot \bar{f})\bar{g}$  es nulhomótopo. Por lo tanto, como consecuencia del problema 3.16 del capítulo 1, la aplicación

$F'' : (\partial I \times I) \cup (I \times \partial I) \rightarrow X$  dada por  $F''(k, t) = g(t)$   $k \in \partial I$  ,  $t \in I$  y  $F''(s, l) = f(s)$  ,  $s \in I$  ,  $l \in \partial I$  , extiende a una aplicación  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que  $F\partial_0 = f$  ,  $F\partial_1 = f$  ,  $F(0, t) = g(t)$  ,  $F(1, t) = g(t)$  . Denotemos por  $\pi : I \times I \rightarrow S^1 \times S^1$  la aplicación cociente. Por lo tanto existe una aplicación continua y basada  $F' : S^1 \times S^1 \rightarrow X$  tal que  $F'\pi = F$  y  $F'\pi(s, l) = f(s)$  ,  $l \in \partial I$  y  $F'\pi(k, t) = f(t)$  ,  $k \in \partial I$ . Recíprocamente, una aplicación continua y basada  $F' : S^1 \times S^1 \rightarrow X$  determina  $f, g$  tal que  $((f \cdot g) \cdot \bar{f})\bar{g} \simeq e_{x_0}$  , donde  $x_0$  es el punto base de  $X$  . Si  $a = [f]$  y  $b = [g]$  el conmutador  $aba^{-1}b^{-1}$  es trivial.

2.10. Dado un espacio basado construir un nuevo espacio cuyo grupo fundamental sea el abelianizado del grupo fundametal del primer espacio.

Indicación: Para cada conmutador  $aba^{-1}b^{-1} \in \pi_1(X)$  pegar un disco por medio del correspondiente lazo  $((f \cdot g) \cdot \bar{f})\bar{g}$  al espacio  $X$  . El espacio resultante  $X_{\text{ab}}$  verifica que  $\pi_1(X_{\text{ab}}) \cong \text{ab}\pi_1(X)$  , donde  $\text{ab}\pi_1(X)$  es el abelianizado del grupo  $\pi_1(X)$  .

2.11. Sea  $X$  el toro menos un punto. Demostrar que el grupo fundamental de  $X$  es un grupo libre con dos generadores.

2.12. Calcular el grupo fundamental del plano proyectivo.

Solución: Sea  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$  el disco unidad y consideremos el plano proyectivo real  $P$  obtenido al identificar punto antípodos del borde  $\partial D = \{x \in D \mid |x| = 1\}$  . Sea  $[\cdot] : D \rightarrow P$  la proyección canónica, notemos que si  $|x| = 1$  , se tiene que  $[x] = [-x]$  .

Sea  $X_1 = \{[x] \mid |x| \leq \frac{3}{4}\}$  y sea  $X_2 = \{[x] \mid |x| \geq \frac{1}{4}\}$  . Consideremos la circunferencia  $\Sigma = \{[x] \mid |x| = 1\}$  . La inclusión  $\Sigma \rightarrow X_2$  es una equivalencia de homotopía. La inversa homotópica viene dada por  $\theta : X_2 \rightarrow \Sigma$  ,  $\theta[x] = [\frac{x}{|x|}]$  . Para verlo es suficiente tomar la deformación  $D : X_2 \times I \rightarrow X_2$  dada por  $D([x], t) = [(1-t)x + t\frac{x}{|x|}]$  . Sea  $x_2 \in D$  tal que  $|x_2| = \frac{1}{2}$  , notemos que  $\theta_* : \pi_1(X_2, [x_2]) \rightarrow \pi_1(\Sigma, [\frac{x_2}{|x_2|}])$  es un isomorfismo. Sea  $\sigma : I \rightarrow X_2$  el arco  $\sigma(t) = [(1-t)x_2 + t\frac{x_2}{|x_2|}]$  y  $f : I \rightarrow X_2$  dado por  $f(t) = [(\cos \pi t, \text{sen } \pi t)]$  . Notemos que  $\theta_*([\sigma \cdot f] \cdot \bar{\sigma}) = [f]$  . Luego  $a = [(\sigma \cdot f) \cdot \bar{\sigma}]$  es un generador de  $\pi_1(X_2, [x_2])$  . El camino  $g : I \rightarrow X_1 \cap X_2$  ,  $g(t) = [\frac{1}{2}(\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t)]$  verifica que

$$\begin{aligned} \theta g(t) &= [(\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t)] = \begin{cases} [(\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t)] & t \leq \frac{1}{2} \\ [(-\cos 2\pi t, -\text{sen } 2\pi t)] & t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} [(\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t)] & t \leq \frac{1}{2} \\ [(\cos(2\pi t - \pi), \text{sen}(2\pi t - \pi))] & t \geq \frac{1}{2} \end{cases} = (f \cdot f)(t) \end{aligned}$$

Entonces  $\theta_*[g] = [f][f]$  . Luego si  $\phi_2 : X_1 \cap X_2 \rightarrow X_2$  es la inclusión canónica y  $b = [g]$  es el generador de  $\pi_1(X_1 \cap X_2, [x_2])$  , entonces  $(\phi_2)_*(b) = a^2$  . Por otro lado, si  $\phi_1 : X_1 \cap X_2 \rightarrow X_1$  es la inclusión

canónica se tiene que  $(\phi_1)_*(b) = 1$ , ya que  $X_1$  es contráctil. Entonces aplicando el teorema de Seifert-van Kampen 2.1 se tiene que  $\pi_1(P, [x_2]) \cong \langle a | a^2 = 1 \rangle$  es el grupo cíclico de orden dos.

2.13. Probar que todo elemento de orden dos del grupo fundamental de un espacio topológico se puede “representar” como la restricción de una aplicación continua basada del plano proyectivo real basado en el espacio a una de sus rectas proyectivas que pase por el punto base.

2.14. Sea  $X$  el plano proyectivo menos un punto. Demostrar que el grupo fundamental de  $X$  es el grupo cíclico infinito.

2.15. Sea  $X$  la reunión basada de dos toros basados. Determinar el grupo fundamental de  $X$ .

2.16. Calcular el grupo fundamental de una superficie orientable de género  $g$ .

Solución: Sea un disco  $D$  con su borde dividido en  $4g$  arcos  $a_1, b_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, a_2, b_2, \bar{a}_2, \bar{b}_2, \dots, a_g, b_g, \bar{a}_g, \bar{b}_g$ . La superficie se obtiene al identificar cada arista con la correspondiente arista con barra pero tomando la orientación opuesta. Denotemos por  $[\cdot]: D \rightarrow F_g$  la aplicación cociente. Es bien conocido, véase [24], que  $F_g$  es una superficie conexa orientable y  $g$  es denominado como el género de la superficie.

De modo análogo al caso de plano proyectivo tomemos los subespacios  $X_1 = \{[x] | |x| \leq \frac{3}{4}\}$  y  $X_2 = \{[x] | |x| \geq \frac{1}{4}\}$ . Consideremos  $\Sigma = \{[x] | |x| = 1\}$ . La inclusión  $\Sigma \rightarrow X_2$  es una equivalencia de homotopía. La inversa homotópica viene dada por  $\theta: X_2 \rightarrow \Sigma$ ,  $\theta[x] = [\frac{x}{|x|}]$ . Para verlo es suficiente tomar la deformación  $D: X_2 \times I \rightarrow X_2$  dada por  $D([x], t) = [(1-t)x + t\frac{x}{|x|}]$ . Sea  $x_2 \in D$  tal que  $|x_2| = \frac{1}{2}$ , notemos que  $\theta_*: \pi_1(X_2, [x_2]) \rightarrow \pi_1(\Sigma, [\frac{x_2}{|x_2|}])$  es un isomorfismo. Sea  $\sigma: I \rightarrow X_2$  el arco  $\sigma(t) = [(1-t)x_2 + t\frac{x_2}{|x_2|}]$  de modo que  $\frac{x_2}{|x_2|}$  sea un vértice. Nótese que  $\Sigma$  es homeomorfo a un racimo de  $2g$  circunferencias y por el problema 2.3 se tiene que  $\pi_1(\Sigma) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \rangle$ . Tomando  $A_1 = \sigma a_1 \bar{\sigma}, B_1 = \sigma b_1 \bar{\sigma}, \dots, A_g = \sigma a_g \bar{\sigma}, B_g = \sigma b_g \bar{\sigma}$  se tiene que  $\pi_1(X_2) \cong \langle A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_g, B_g \rangle$ .

Si  $\phi_2: X_1 \cap X_2 \rightarrow X_2$  es la inclusión canónica y  $C$  es el generador de  $\pi_1(X_1 \cap X_2, [x_2])$ , entonces  $(\phi_2)_*(C) = A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1}$ . Por otro lado, si  $\phi_1: X_1 \cap X_2 \rightarrow X_1$  es la inclusión canónica se tiene que  $(\phi_1)_*(C) = 1$ , ya que  $X_1$  es contráctil. Entonces aplicando el teorema de Seifert-van Kampen 2.1 se sigue que  $\pi_1(F_g)$  es isomorfo a

$$\langle A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_g, B_g | A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} = 1 \rangle.$$

2.17. Calcular el grupo fundamental de una superficie no orientable de género  $g$ .

Solución: Sea un disco  $D$  con su borde dividido en  $4g + 2$  arcos

$$a_1, b_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, a_2, b_2, \bar{a}_2, \bar{b}_2, \dots, a_g, b_g, \bar{a}_g, \bar{b}_g, c, c.$$

La superficie se obtiene al identificar cada arista con la correspondiente arista con barra y la arista  $c$  con la siguiente  $c$ . Denotemos por  $[\cdot]: D \rightarrow N$  la aplicación cociente. De nuevo referimos al lector a libro [24] para que compruebe que efectivamente se trata de la superficie conexa no orientable de género  $g$ .

De modo análogo a los casos anteriores y con notación similar se obtiene que  $\Sigma$  es homeomorfo a un racimo de  $2g + 1$  circunferencias y

$$\pi_1(\Sigma) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g, c \rangle$$

Tomando  $A_1 = \sigma a_1 \bar{\sigma}, B_1 = \sigma b_1 \bar{\sigma}, \dots, A_g = \sigma a_g \bar{\sigma}, B_g = \sigma b_g \bar{\sigma}, C = \sigma c \bar{\sigma}$  se tiene que  $\pi_1(X_2) \cong \langle A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_g, B_g, C \rangle$ .

Si  $\phi_2: X_1 \cap X_2 \rightarrow X_2$  es la inclusión canónica y  $D$  es el generador de  $\pi_1(X_1 \cap X_2, [x_2])$ , entonces

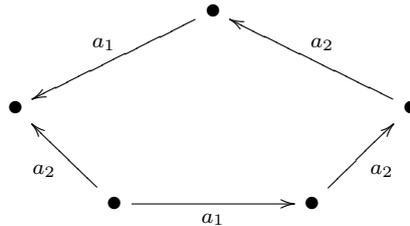
$$(\phi_2)_*(D) = A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} C C .$$

Por otro lado, si  $\phi_1: X_1 \cap X_2 \rightarrow X_1$  es la inclusión canónica se tiene que  $(\phi_1)_*(C) = 1$ , ya que  $X_1$  es contráctil. Entonces aplicando el teorema de Seifert-van Kampen 2.1 se tiene que  $\pi_1(N)$  es isomorfo a

$$\langle A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_g, B_g, C | A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1} C^2 = 1 \rangle .$$

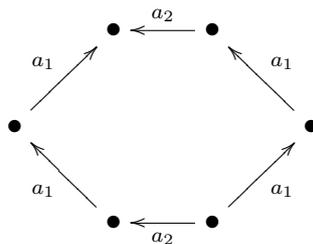
2.18. Calcular el grupo fundamental del cociente de un 2-simplex  $ABC$  que identifica la arista  $AB$  con la arista  $AC$  y con la  $BC$ .

2.19. Calcular el grupo fundamental del espacio  $X$  obtenido de una región pentagonal identificando sus lados como indica la figura:

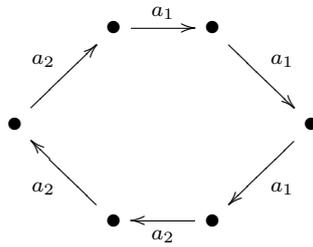


2.20. Calcular el grupo fundamental del espacio  $X$  obtenido de regiones hexagonales identificando sus lados como indican las figuras:

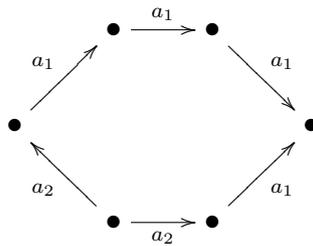
a)



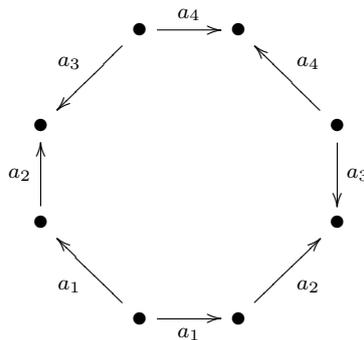
b)



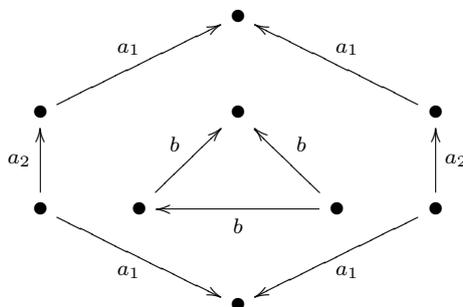
c)



2.21. Calcular el grupo fundamental del espacio  $X$  obtenido de la siguiente región octogonal identificando sus lados como indica la figura:



2.22. Calcular el grupo fundamental del espacio  $X$  obtenido de una región, en forma de “corona”, identificando sus bordes como indica la figura:



2.23. Sea  $X$  la reunión de la 2-esfera  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  y el 2-disco  $D^2 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\}$ .

a) Calcular el grupo fundamental de  $X$ .

- b) Sea  $S_+^2 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}$ . Probar que  $S_+^2 \cup D^2$  es un retracto de  $X$ .
- c) Sea  $S^1 = (x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$ . Probar que  $S^1$  no es un retracto de  $X$ .

Solución: a) Sea  $X_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X | x_3 \neq 1\}$  y sea  $X_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in X | x_3 \neq -1\}$ . Se tiene que  $D: X_1 \times I \rightarrow X_1$  dada por

$$D(x, t) = \begin{cases} (x, t) & x_3 \leq 0, \\ \frac{(1-t)(x_1, x_2, x_3) + t \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}(x_1, x_2, x_3)}{|(1-t)(x_1, x_2, x_3) + t \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}(x_1, x_2, x_3)|} & 0 \leq x_3 < 1 \end{cases}$$

deforma  $X_1$  a  $S_-^2 \cup D^2$  donde  $S_-^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 | x_3 \leq 0\}$ . Además el espacio  $S_-^2 \cup D^2$  es homeomorfo a  $S^2$ . Por lo tanto  $\pi_1(X_1) \cong \pi_1(S^2) \cong 1$ , según hemos visto en el problema 2.7. Análogamente,  $\pi_1(X_2) \cong 1$ . Puesto que  $X_1, X_2$  satisfacen las condiciones del teorema de Seifert-van Kampen 2.1, se tiene que  $\pi_1(X) \cong 1$ .

b) Sea la retracción  $r: X \rightarrow S_+^2 \cup D^2$  dada por

$$r(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1, x_2, x_3) & 0 \leq x_3, \\ (x_1, x_2, 0) & x_3 \leq 0. \end{cases}$$

Está bien definida y  $r|_{S_+^2 \cup D^2} = \text{id}$ .

c) Si  $S^1 \rightarrow X$  es un retracto se tiene que  $\pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(X)$  es un monomorfismo. Pero  $\pi_1(S^1)$  es un cíclico infinito y  $\pi_1(X)$  es trivial. Esto conduce a la contradicción de que existe una aplicación inyectiva de un contable no finito en un conjunto unipuntual.

2.24. Tomemos ahora la circunferencia como los complejos de módulo uno; es decir  $S^1 = \{z | |z| = 1\}$  y sea  $X$  el espacio obtenido al identificar en la tapa inferior del anillo  $S^1 \times [-1, 1]$  puntos antípodos y en la tapa superior del anillo aquellos puntos que se obtengan al realizar giros de 120 grados. Es decir,  $X$  es el cociente de  $S^1 \times [-1, 1]$  determinado por las dos relaciones de equivalencia siguientes:

$$(z, -1) \sim (-z, -1), z \in S^1$$

$$(z, 1) \sim (ze^{\frac{2\pi i}{3}}, 1) \sim (ze^{\frac{4\pi i}{3}}, 1), z \in S^1$$

- Calcular el grupo fundamental.
- Encontrar el centro del grupo anterior y probar que dicho grupo módulo su centro tiene un elemento de torsión de orden dos y otro de orden tres.
- Probar que este espacio  $X$  no puede ser homeomorfo a una superficie compacta y conexa.

2.25. Sea  $X$  la reunión de la 2-esfera  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  y el 1-disco  $D^1 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 = 0 = x_2, -1 \leq x_3 \leq 1\}$ .

- a) Calcular el grupo fundamental de  $X$ .
- b) Probar que  $S^2$  es un retracto de  $X$ .
- c) Probar que  $S^2$  no es un retracto por deformación fuerte de  $X$ .

2.26. Sea  $X$  el cociente del 2-cubo  $[0, 1] \times [0, 1]$  determinado por las relación de equivalencia determinada por

$$(0, t_2) \sim (1, s_2), 0 \leq t_2 \leq 1, 0 \leq s_2 \leq 1,$$

$$(t_1, 0) \sim (t_1, 1), 0 \leq t_1 \leq 1.$$

- a) Calcular el grupo fundamental de  $X$ .
- b) Probar que  $X$  no es una superficie.
- c) Probar que si  $p: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  es la aplicación cociente, entonces  $p((0, 1) \times [0, 1])$  es del tipo de homotopía de una circunferencia.

2.27. Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ , tal que  $\mathbb{R}^n \setminus K$  es conexo por caminos. Sea  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$  el homeomorfismo dado por  $h(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1+\|x\|^2}(\|x\|^2 - 1, 2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n)$ . Demostrar que si  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K$ , entonces  $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus K, x_0) \cong \pi_1(S^n \setminus h(K), h(x_0))$ .

2.28. Demostrar que si un subconjunto  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  es homeomorfo a la 2-bola abierta, entonces  $W$  no es entorno de ninguno de sus puntos en  $\mathbb{R}^3$ .

2.29. Sea  $X = (S^{n-1} \times \mathbb{R}) \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ ,  $n \geq 2$ , donde  $x_1, \dots, x_n$  son puntos de dicho producto. ¿Cuál es el grupo fundamental de  $X$ ?

2.30. Considerar el espacio  $X = ([-2, 2] \times [-1, 1]) \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ .

- a) Calcular una presentación, a ser posible sencilla, del grupo fundamental de  $X$ .
- b) Estudiar si  $(\{-2, 0, 2\} \times [-1, 1]) \cup ([-2, 2] \times \{-1, 1\})$  es un retracto de  $X$ .
- c) ¿Es  $X$  homeomorfo a  $Y = ([-2, 2] \times [-1, 1]) \setminus \{(0, 0)\}$ ?

2.31. Denotemos por  $K = [-1, 1]$  con la topología usual. Sea  $X = (\partial K \times \partial K \times K) \cup (K \times K \times \partial K)$ .

- a) Calcular una presentación, a ser posible sencilla, del grupo fundamental de  $X$ .
- b) ¿Es  $X$  un retracto de  $K^3$ ?
- c) ¿Es  $X$  del mismo tipo de homotopía que la 2-esfera menos cuatro puntos?
- d) ¿Es  $X$  homeomorfo a la 2-esfera menos cuatro puntos?

2.32. Sea  $C = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1\}$  el cilindro infinito. Considerar el espacio  $X = C \setminus \{(1, 0, 0)\}$ .

- a) Calcular una presentación, a ser posible sencilla, del grupo fundamental de  $X$ .

- b) Estudiar si la inclusión  $i: X \rightarrow C$  induce un isomorfismo en el grupo fundamental.
- c) ¿Es el espacio  $X$  un retracto de  $C$ ?
- d) ¿Es el espacio  $X$  homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ ?

2.33. Denotemos por  $K = [-1, 1]$  con la topología usual. Sea  $X = (((\{0\} \times \partial K) \cup (\partial K \times \{0\})) \times K) \cup (K \times K \times \partial K)$ .

- a) Calcular una presentación, a ser posible sencilla, del grupo fundamental de  $X$ .
- b) ¿Es  $K \times K \times \{-1\}$  un retracto de  $X$ ?
- c) ¿Es  $K \times K \times \{-1\}$  un retracto por deformación de  $X$ ?
- d) ¿Es  $X$  del tipo de homotopía de un grafo finito?



## CAPÍTULO 5

# SUPERFICIES

Una *superficie* es un espacio topológico  $Y$  tal que cada  $y \in Y$  tiene un entorno homeomorfo a una 2-bola (ver ejemplo 1.7). En este capítulo estudiamos la clasificación de las superficies compactas conexas y Hausdorff. Si quitamos la condición de Hausdorff tenemos numerosos ejemplos un tanto patológicos que dificultan la obtención de un teorema de clasificación. Sin embargo la condición de conexión se puede eliminar ya que el problema se reduce a clasificar cada una de sus componentes. Cuando eliminamos la condición de compacidad la clasificación se complica bastante de modo que en este caso la cardinalidad de la clase de superficies módulo homeomorfismo deja de ser contable. Además en este caso es conveniente imponer la condición de segundo numerable ya que en el caso no segundo contable hay de nuevo muchos ejemplos que también se suelen considerar patológicos.

Hay un teorema de Radó [R25] cuya demostración viene reproducida en el libro de Ahlfors y Sario [1] que asegura una superficie que sea Hausdorff y segundo contable es triangulable. Es por ello que en este capítulo supondremos de partida que las superficies que queremos clasificar son triangulables.

### 1. Conjuntos semi-simpliciales

DEFINICIÓN 1.1. Llamaremos *conjunto semi-simplicial* a un par  $(X, S)$  donde  $S$  es una familia de subconjuntos finitos de  $X$  que verifica las siguientes propiedades:

- (i) Si  $x \in X$  entonces  $\{x\} \in S$ ,
- (ii) si  $\tau \in S$  entonces  $\tau \neq \emptyset$ ,
- (iii) si  $\emptyset \neq \tau \subset \sigma \in S$ , entonces  $\tau \in S$ .

Si  $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$  es un elemento de  $S$ , diremos que  $\sigma$  es un  $n$ -símplice y  $n$  es la dimensión de  $\sigma$ . Dado un conjunto semi-simplicial  $(X, S)$ , diremos que tiene dimensión  $m$  si  $m$  es el máximo de las dimensiones de sus símlices. Para el caso que  $S$  sea infinito puede ocurrir que la dimensión del conjunto semi-simplicial sea  $\infty$ . Es conveniente observar que en un conjunto semi-simplicial  $(X, S)$  la familia de los símlices  $S$  determina el conjunto  $X$  al considerar símlices de dimensión cero. Así que en ocasiones un conjunto semi-simplicial se denotará únicamente mediante  $S$ . También con el fin de simplicar la notación si  $T \subset S$ , en general  $T$  no es un conjunto semi-simplicial, sin embargo si a  $T$  se

se añaden todas las caras de sus símlices, entonces el resultado sí que es un conjunto semi-simplicial  $\langle T \rangle$  que es un subconjunto de  $S$ . Diremos que  $\langle T \rangle$  es el conjunto simplicial generado por  $T$ .

Si  $(v_0, \dots, v_n)$  son vectores de un espacio vectorial real de dimensión finita, consideremos el conjunto

$$|(v_0, \dots, v_n)| = \{ \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \quad 0 \leq \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

provisto de la topología usual. Si  $(v_0, \dots, v_n)$  son linealmente independientes diremos que  $|(v_0, \dots, v_n)|$  es un  $n$ -símplice y en otro caso diremos que es un  $n$ -símplice degenerado. Para 0-símlices utilizaremos el nombre de vértices, para 1-símlices, aristas y para 2-símlices, caras.

DEFINICIÓN 1.2. Sea  $V$  el espacio vectorial libre sobre el conjunto  $X$ , llamaremos *realización canónica* de un conjunto semi-simplicial  $(X, S)$  al conjunto

$$|(X, S)| = \{ \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \quad 0 \leq \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \{v_0, \dots, v_n\} \in S \}$$

provisto con la topología final generada por las inclusiones asociadas a cada  $\{v_0, \dots, v_n\} \in S$

$$|(v_0, \dots, v_n)| \subset |(X, S)|.$$

DEFINICIÓN 1.3. Una *triangulación* de un espacio topológico  $Y$  es un homeomorfismo  $\phi: |(X, S)| \rightarrow Y$ . Diremos que un espacio es *triangulable* si admite una triangulación. Llamaremos *espacio triangulado* a un espacio topológico  $Y$  junto con una triangulación  $\phi: |(X, S)| \rightarrow Y$ .

DEFINICIÓN 1.4. Una *aplicación de conjuntos semi-simpliciales*  $f: (X, S) \rightarrow (Y, T)$  es una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  tal que si  $\sigma \in S$ , entonces  $f(\sigma) \in T$ . Una aplicación  $f: (X, S) \rightarrow (Y, T)$  de conjuntos semi-simpliciales, induce una aplicación continua  $|f|: |(X, S)| \rightarrow |(Y, T)|$ , llamada *realización de  $f$* , dada por

$$|f|(\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_0 f(v_0) + \dots + \lambda_n f(v_n), \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \quad 0 \leq \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Sean  $\varphi: |(X, S)| \rightarrow \bar{X}$ ,  $\phi: |(Y, T)| \rightarrow \bar{Y}$  espacios triangulados. Una aplicación continua  $\bar{g}: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$  diremos que es una *aplicación simplicial*, si existe una aplicación semi-simplicial  $g: (X, S) \rightarrow (Y, T)$  tal que  $\bar{g} = \varphi^{-1}|f|\phi$ .

Si una aplicación  $f: (X, S) \rightarrow (Y, T)$  de conjuntos semi-simpliciales verifica que  $f$  es inyectiva, diremos que  $(X, S)$  es un subconjunto semi-simplicial de  $(Y, T)$ . Notemos que un subconjunto  $S' \subset S$  determina un subconjunto semi-simplicial  $(X', \langle S' \rangle)$  donde  $X' = \cup_{\sigma' \in S'} \sigma'$  y  $\langle S' \rangle = \{ \tau \in S \mid \tau \subset \sigma \in S' \}$ .

Dado un conjunto finito,  $X = \{v_0, \dots, v_n\}$  llamaremos también  $n$ -símplice al conjunto semi-simplicial  $S$  formado por todos los subconjuntos no vacíos de  $X$ .

DEFINICIÓN 1.5. Un *camino semi-simplicial* de  $n$  vértices es un conjunto semi-simplicial de la forma  $(X, S)$  con  $X = \{v_0, \dots, v_n\}$  y

$$S = \{\{v_0\}, \dots, \{v_n\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\}.$$

Una *circunferencia semi-simplicial* de  $n$  vértices es un conjunto semi-simplicial de la forma  $(X, C)$  con  $X = \{v_0, \dots, v_n\}$  y

$$C = \{\{v_0\}, \dots, \{v_n\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_0\}\}.$$

Llamaremos *camino* a un espacio topológico que admita una triangulación mediante un camino semi-simplicial y similarmente definimos una *circunferencia* topológica.

DEFINICIÓN 1.6. Sea  $(X, S)$  un conjunto semi-simplicial y  $\sigma \in S$ , llamaremos *estrella* de  $\sigma$  al subconjunto semi-simplicial  $\{\tau \in S \mid \exists \rho \in S, \tau \cup \sigma \subset \rho\}$ . Llamaremos *halo* de  $\sigma$  al subconjunto semi-simplicial  $\{\tau \in S \mid \exists \rho \in S, \tau \cup \sigma \subset \rho, \tau \cap \sigma = \emptyset\}$ .

En las siguientes secciones se van a considerar con frecuencia triangulaciones de discos, es decir homeomorfismos de la forma  $\phi: |(X, S)| \rightarrow D^2$ .

## 2. Complejos celulares

Definimos a continuación la noción de complejo celular que también se denomina CW-complejo. Es una noción que admite como casos particulares los espacios topológicos triangulados. En general, un espacio triangulado finito admite descomposiciones celulares con un menor número de células. Este hecho favorece el cálculo de homologías y cohomologías, ya que las matrices de incidencia son más pequeñas. En la siguiente sección veremos que las superficies compactas y Hausdorff admiten descomposiciones celulares sencillas y además estas estructuras de complejos celulares permiten su clasificación módulo homeomorfismo.

Dadas dos aplicaciones continuas  $f: A \rightarrow X$ ,  $g: A \rightarrow Y$ , diremos que un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow g & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{q} & Z \end{array}$$

es la *suma amalgamada* de  $f$  y  $g$ , si  $Y \sqcup X \xrightarrow{q+p} Z$  es la aplicación cociente inducida por las relaciones  $f(a) \sim g(a)$ ,  $a \in A$ .

DEFINICIÓN 2.1. Un *complejo celular* (CW-complejo) consiste en un espacio topológico  $X$  junto con una filtración  $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \dots \subset X$  que satisface las siguientes propiedades:

- (i)  $X^0$  es un espacio discreto, y, para  $n \geq 1$ , existen un conjunto de índices  $A_n$  (posiblemente vacío), aplicaciones de pegamiento  $\{\varphi_\alpha: S_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{n-1} | \alpha \in A_n\}$  y aplicaciones características  $\{\phi_\alpha: D_\alpha^n \rightarrow X^n | \alpha \in A_n\}$  (donde  $S_\alpha^{n-1}$  es una  $(n-1)$ -esfera y  $D_\alpha^n$  un  $n$ -disco) de modo que el siguiente cuadrado es una suma amalgamada:

$$\begin{array}{ccc} \sqcup_{\alpha \in A_n} S_\alpha^{n-1} & \xrightarrow{\Sigma \varphi_\alpha} & X^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqcup_{\alpha \in A_n} D_\alpha^n & \xrightarrow{\Sigma \phi_\alpha} & X^n \end{array}$$

- (ii)  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$  y además  $F$  es cerrado en  $X$  si y sólo si  $F \cap X^n$  es cerrado en  $X^n$  para todo  $n \geq 0$ .

Cada  $\phi_\alpha(D_\alpha^n)$  se llama  $n$ -célula de  $X$  (o  $n$ -celda) y  $X^n$  es el  $n$ -esqueleto de  $X$ . Si existe  $n$  tal que  $A_m$  es vacío para todo  $m > n$ , diremos que  $X$  tiene dimensión finita y llamaremos dimensión de  $X$  a  $\dim X = \min \{n | \text{para todo } m > n, A_m = \emptyset\}$ . En otro caso, diremos que  $\dim X = \infty$ . Utilizaremos también, la terminología de vértices, aristas y caras para las 0-células, 1-células y 2-células, respectivamente.

Es importante observar que un espacio triangulado  $\phi: |(X, S)| \rightarrow Y$  admite de modo natural una filtración  $Y^0 \subset Y^1 \dots \subset Y^2 \dots \subset Y$ , donde  $Y^n$  es la unión de la familia de subconjuntos  $\{\phi(|\sigma|) | \text{dimensión } \sigma \leq n\}$ . Si para cada  $\sigma \in S$  tomamos un homeomorfismo  $\theta_\sigma: D^n \rightarrow |\sigma|$ , donde  $n$  es la dimensión de  $\sigma$ , entonces las aplicaciones características y de pegamiento dadas por  $\phi_\sigma = \phi \theta_\sigma$  y  $\varphi_\sigma = \phi_\sigma|_{\partial D^n}$  ( $\partial D^n = S^{n-1}$ ) determinan en  $Y$  una estructura natural de espacio celular.

DEFINICIÓN 2.2. Sea  $X$  un complejo celular con un número finito de células. Llamaremos *característica de Euler* al siguiente entero

$$\xi(X) = |A_0| - |A_1| + |A_2| - \dots + (-1)^{\dim X} |A_{\dim X}|$$

donde  $|A_i|$  denota el cardinal del conjunto.

Una de las propiedades importantes de la característica de Euler es que no depende de la descomposición celular que se considere en el espacio topológico. Una demostración de esta propiedad se puede ver en cualquier libro que desarrolle la homología singular, por ejemplo en el libro de Massey [25].

## PROBLEMAS

2.1. Probar que si  $X$  e  $Y$  tienen estructura de CW-complejo, entonces  $X \times Y$  admite una estructura de CW-complejo cuya topología

es más fina que la topología producto. Estudiar condiciones suficientes para que el CW-complejo  $X \times Y$  tenga precisamente la topología producto.

2.2. Probar que si  $A$  es un subcomplejo de  $X$ , entonces el cociente  $X/A$  admite una estructura natural de CW-complejo.

2.3. Sean  $(X, x_0)$  e  $(Y, y_0)$  son CW-complejo basados y sean  $X \vee Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid x = x_0 \text{ o } y = y_0\}$ ,  $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$ . Probar que  $X \vee Y$ ,  $X \wedge Y$  admiten una estructura de CW-complejo.

2.4. Sea  $X$  un CW-complejo y define su cono como el espacio  $CX = (X \times I)/(X \times \{1\})$  y si  $(X, x_0)$  es un CW-complejo basado define su cono reducido por  $\tilde{C}X = (X \times I)/((X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I))$ . Probar que el cono y el cono reducido tienen estructura de CW-complejo. Además probar que salvo homeomorfismo  $X$  es subcomplejo de su cono, y para el caso basado de su cono reducido.

2.5. Sea  $X$  un CW-complejo y define su suspensión como el espacio  $SX = CX/X$  y si  $X$  es un CW-complejo basado define su suspensión reducida por  $\tilde{S}X = \tilde{C}X/X$ . Probar que la suspensión y la suspensión reducida tienen estructura de CW-complejo.

2.6. Probar que la suspensión y la suspensión reducida de  $S^n$  es  $S^{n+1}$ .

2.7. Probar que  $S^n \wedge S^m = S^{n+m}$ .

2.8. Dar una estructura de CW-complejo a un grafo.

2.9. Dar una estructura de CW-complejo a cada superficie compacta

2.10. Dar una estructura de CW-complejo a  $\mathbb{R}$  y a  $\mathbb{R}^n$ .

2.11. Dar una estructura de CW-complejo a  $S^n$  que tenga  $2(n+1)$  celdas.

2.12. Dar una estructura de CW-complejo al espacio proyectivo real  $P^n(\mathbb{R})$ .

2.13. Dar una estructura de CW-complejo al espacio proyectivo complejo y cuaterniónico  $P^n(\mathbb{C})$ ,  $P^n(\mathbb{H})$ .

2.14. Considerar  $S^\infty$  el espacio reunión de la filtración  $S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset \dots$  y similarmente los espacios  $P^\infty(\mathbb{R})$ ,  $P^\infty(\mathbb{C})$ ,  $P^\infty(\mathbb{H})$ . Probar que tienen una estructura natural de CW-complejo.

2.15. Probar que  $S^\infty$  es un espacio contractible.

2.16. Supongamos que  $A$  es un subcomplejo de  $X$  y que  $A$  es contractible. Probar que existe una retracción  $r: X \rightarrow A$ .

2.17. Sean  $X^n$ ,  $Y^n$  los  $n$ -esqueletos de dos CW-complejos  $X, Y$  que son homotópicamente equivalentes y que no tienen  $(n+1)$ -celdas. Probar que  $X_n$ ,  $Y_n$  son también homotópicamente equivalentes.

### 3. Clasificación de las superficies trianguladas

En esta sección damos el teorema de clasificación para superficies trianguladas. Partiendo de una cara de una superficie triangulada conexa se le van adjuntado nuevas caras hasta que se consigue un disco triangulado con un número par de aristas en su borde, identificando éstas de dos en dos se recompone la superficie original. Incluimos a continuación una demostración muy esquemática que sigue los pasos y construcciones dadas en los libros de Massey [24] e Ivorra [20].

**DEFINICIÓN 3.1.** Una *superficie semi-simplicial* es un conjunto semi-simplicial  $(X, S)$  de dimensión 2 verificando las siguientes propiedades:

- a) cada arista incide exactamente con dos caras, y
- b) el halo de cada vértice es una circunferencia semi-simplicial.

**DEFINICIÓN 3.2.** Una *superficie triangulada* es un espacio topológico  $\Sigma$  junto con un homeomorfismo  $\phi: |(X, S)| \rightarrow \Sigma$ , donde  $(X, S)$  es una superficie semi-simplicial.

**TEOREMA 3.1.** Sea  $\Sigma$  una superficie triangulada conexa. Entonces  $\Sigma$  es homeomorfo a un cociente obtenido a partir de un disco triangulado, cuyo borde es una circunferencia con un número par (mayor o igual que 4) de aristas, identificando las aristas del borde por parejas.

**DEMOSTRACIÓN.** Tomemos una cara  $c_1$  de  $\Sigma$  y consideremos una de sus aristas  $a_2$ . Por la definición 3.2,  $a_2$  debe ser la arista de otra cara  $c_2$ . Notemos que  $c_1$  distinta de  $c_2$  ya que al ser  $\Sigma$  una superficie triangulada, dos caras distintas no pueden compartir tres vértices. Luego el conjunto semi-simplicial determinado por  $c_1$  y  $c_2$  es isomorfo a formado por la triangulación de un disco  $D_2$  que tiene dos caras (triángulos) que comparten una arista. Notemos que el borde del disco está formado por  $3 + 1$  aristas.

Veamos que se puede encontrar una ordenación  $c_1, \dots, c_n$  de todas las caras de  $\Sigma$  y una elección de aristas  $a_2, \dots, a_n$  de manera que para  $i \in \{2, \dots, n\}$ , existe un único  $j \in \{1, \dots, i-1\}$  tal que  $a_i$  es la única arista común de  $c_i$  y  $c_j$ . Para ello consideremos ordenaciones del tipo anterior en las intervengan  $m$  caras con  $2 \leq m \leq n$ . En el párrafo anterior hemos visto que al menos existe una ordenación de este tipo para  $m = 2$ . Por un lado es bien conocido que si dos subconjuntos conexos tienen intersección no vacía, su reunión es conexa. De aquí se sigue que si tenemos una ordenación del tipo anterior,  $c_1, \dots, c_m$  con elección de aristas  $a_2, \dots, a_m$ , se tiene por inducción que su reunión es conexa. Para ello hay que tener en cuenta que cualquier cara es conexa y que para  $k \in \{2, \dots, m\}$ ,  $c_k \cap (c_1 \cup \dots \cup c_{k-1})$  es conexa. Por otro lado, puesto que cada cara es compacta y  $\Sigma$  es Hausdorff, entonces cada cara es cerrada, y en consecuencia, la reunión  $(c_1 \cup \dots \cup c_m)$  es cerrada.

Además podemos afirmar que existe una de estas ordenaciones en la que intervienen todas las caras de  $\Sigma$ . En caso contrario, a partir

de una cara que no estuviera en una ordenación maximal, podríamos construir una nueva ordenación cuya reunión de caras sería cerrada y disjunta a la anterior. Teniendo en cuenta que hay un número finito de caras, podríamos descomponer la superficie en una suma disjunta y finita de cerrados. La existencia de esta descomposición contradice la hipótesis de que la superficie  $\Sigma$  sea conexa. Por lo tanto existe una ordenación de este tipo en la que intervienen todas las caras de  $\Sigma$ . Podemos observar que el número de caras de una superficie es par, ya que el número de aristas por dos es igual al número de caras por tres.

Observemos que se tienen las siguientes propiedades:

Si  $D$  y  $D'$  son dos discos triangulados y  $a, a'$  dos aristas de los bordes de  $D$  y  $D'$  e identificamos  $a$  con  $a'$  de modo simplicial, entonces  $D \sqcup D'/a = a'$  es también un disco triangulado.

Una aplicación simplicial exhaustiva entre conjuntos semi-simpliciales finitos, induce en su realización una aplicación cociente.

Para una ordenación de longitud 2 hemos visto que existe un disco triangulado  $D_2$  y una aplicación simplicial exhaustiva.  $\phi_2: D_2 \rightarrow c_1 \cup c_2$ . Supongamos por inducción que  $\phi_m: D_m \rightarrow c_1 \cup \dots \cup c_m$  es una aplicación simplicial exhaustiva, donde  $D_m$  es un disco triangulado. Si aumentamos en un grado la longitud de la ordenación podemos extender  $\phi_m$  de modo simplicial a  $\phi_{m+1}: D_{m+1} \rightarrow c_1 \cup \dots \cup c_m \cup c_{m+1}$  enviando el único nuevo vértice de  $D_{m+1}$  al vértice de  $c_{m+1}$  que no está en  $a_{m+1}$ . La aplicación simplicial final  $\phi_n: D_n \rightarrow c_1 \cup \dots \cup c_n$  tiene la propiedad de que induce una biyección entre los conjuntos de 2-símplices. Ahora, si tomamos una arista de  $\Sigma$ , determinan dos caras  $c_i$  y  $c_j$  de  $\Sigma$  que a su vez, determinan dos caras  $c'_i$  y  $c'_j$  de  $D_n$ . Tenemos dos posibilidades, si  $c'_i$  y  $c'_j$  se cortan en una arista  $a'$ , entonces  $a'$  se aplica por medio de  $\phi_n$  en  $a$  y además es la única arista que se aplica en  $a$ . En otro caso, si las caras  $c'_i$  y  $c'_j$  no se cortan o se cortan en un punto, existen dos aristas  $a'_i$  y  $a'_j$  que se aplican en  $a$  y además están en el borde de  $D_n$ .

Notemos también que una ordenación del tipo anterior  $c_1, \dots, c_n$  con elección de aristas  $a_2, \dots, a_n$  determina un disco con  $n$  caras,  $1 + 2n$  aristas de las cuales  $n + 2$  están en el borde y  $n + 2$  vértices que están todos en el borde. Recordemos que además  $n$  debe ser par y  $2n + 1$  múltiplo de 3.

□

Sea  $\Sigma$  una superficie triangulada conexa, entonces por el teorema anterior  $\Sigma$  es homeomorfo a un cociente obtenido a partir de un disco triangulado, cuyo borde es una circunferencia con un número par (mayor o igual que 4) de aristas, identificando éstas por parejas.

A cada pareja de aristas del borde del disco que se identifican para formar en la superficie una sola arista le podemos asociar una letra. También podemos elegir una orientación en la arista de la superficie

que inducirá orientaciones en cada una de las aristas de la pareja que se ha identificado. Por otro lado, vamos a tomar una orientación (por ejemplo la de las agujas del reloj) en la circunferencia borde del disco. Si la orientación de una de las aristas de la pareja y la propia de la circunferencia coinciden pondremos a la letra exponente positivo  $+1$  y un  $-1$  en caso contrario.

Una pareja de aristas diremos que es de *primera especie* si tiene exponentes de signo contrario, y si son del mismo signo diremos que es de *segunda especie*.

Ahora, si realizamos la lectura de la circunferencia siguiendo su orientación y empezando en uno de sus vértices tendremos una palabra del tipo  $aba^{-1}cb \dots$ . En este caso la pareja asociada a la letra  $a$  es de primera especie y la asociada a la letra  $b$  es de segunda especie. Denotemos con letras mayúsculas  $A, B, \dots$  a subpalabras formadas por aristas consecutivas de la palabra asociada a la circunferencia.

Veamos en primer lugar que la superficie se puede obtener mediante una identificación asociada a una palabra de tipo  $AB$ , donde  $A = x_1x_1 \dots x_r x_r$  y  $B$  no contiene parejas de segunda especie.

Las construcciones que se realizan a continuación determinan discos con una descomposición celular que inducen una estructura celular en el cociente, pero que, en general, ya no son superficies trianguladas. Éstas se podrían llevar a cabo mediante triangulaciones (con un poco más de cuidado) pero como el objetivo es la clasificación módulo homeomorfismo, es suficiente considerar superficies topológicas en las que de modo natural se consideran adecuadas descomposiciones celulares o, equivalentemente, estructuras de complejos celulares.

**LEMA 3.1.** Supongamos que tenemos un disco cuyo borde admite una lectura destrógrafa de la forma  $ABxCDxE$ , entonces se puede construir un nuevo disco cuyo borde tiene una lectura de la forma  $AyDB^{-1}yC^{-1}E$  y tal que el cociente obtenido por identificaciones de parejas de aristas sigue siendo el mismo.

**DEMOSTRACIÓN.** Tomemos una nueva arista  $y$  que empieza al final de  $A$  y acaba en el final de  $C$ , véase Figura 1. Cortando por  $y$  se obtienen dos discos  $AyDxE \sim E AyDx$  y  $Cy^{-1}Bx$ . Aplicando una simetría al segundo disco se obtiene uno nuevo cuyo borde es  $x^{-1}B^{-1}yC^{-1}$ . Pegando el primer con el último disco por la arista  $x$  se obtiene el disco  $E AyDB^{-1}yC^{-1} \sim AyDB^{-1}yC^{-1}E$ .  $\square$

**TEOREMA 3.2.** Sea  $\Sigma$  una superficie triangulada conexa. Entonces  $\Sigma$  es homeomorfo a un cociente obtenido a partir de un disco triangulado, cuyo borde es de la forma  $AB$ , donde  $A = x_1x_1 \dots x_r x_r$  ( $r$  puede ser 0) y  $B$  no contiene parejas de segunda especie.

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que el borde del disco es de la forma  $A'B'xC'xD'$  donde  $A'$  o es vacío o es una sucesión de parejas de aristas

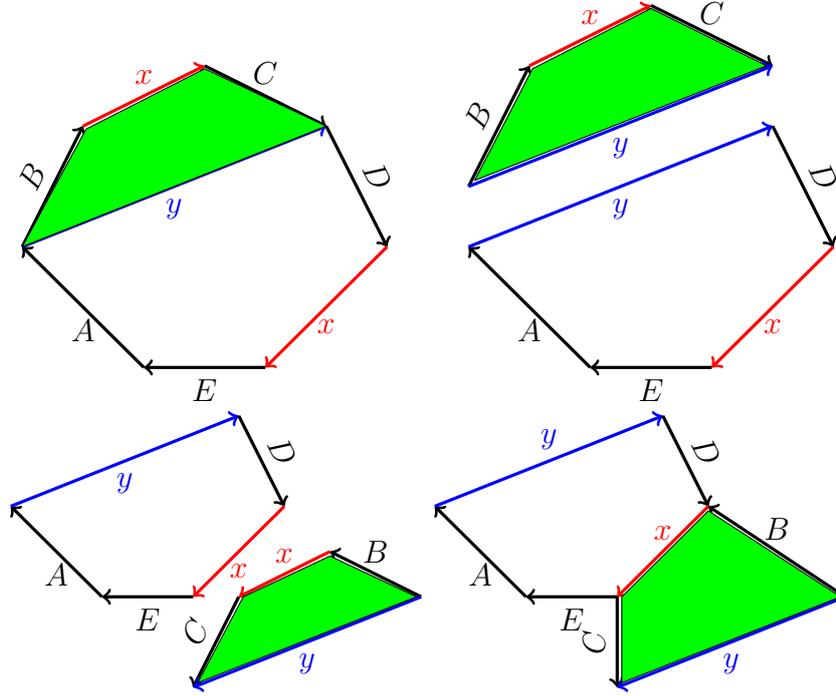


FIGURA 1.

de segunda especie y supongamos que  $B'$  es no vacía y  $x$  es la primera arista de segunda especie que aparece después de  $A'$ . Tomemos un arco simple (o un camino triangulado),  $y$ , que corte al disco y que empiece al final de  $A'$  y termine al final de  $C'$ . Aplicando el lema anterior (con  $D$  vacío) se obtiene un disco cuyo borde es de la forma  $A'yB'^{-1}yC'^{-1}D'$ . Con esta operación hemos conseguido que la primera arista de segunda especie aparezca después de  $A'$ . Tomando ahora un arco simple  $z$  que empiece después de  $A'$  y termine después de  $B'^{-1}$  y aplicando de nuevo el lema se obtiene un disco cuyo borde es  $A'zzB'C'^{-1}D'$ . De modo que hemos conseguido un nuevo  $A'' = A'zz$  que tiene un nuevo par de aristas de segunda especie. Reiterando las veces necesarias este proceso se llega a que finalmente la lectura del borde es de la forma  $AB$  donde  $A$  es una sucesión de parejas de segunda especie y  $B$  no contiene aristas de segunda especie. □

Dos parejas de aristas de primera especie  $x, x^{-1}$  e  $y, y^{-1}$  diremos que son de segundo tipo si  $x, x^{-1}$  no son consecutivas y tampoco lo son  $y, y^{-1}$  y además  $y, y^{-1}$  están en distintas componentes conexas del complemento de  $x \cup x^{-1}$  en el borde del disco.

LEMA 3.2. Supongamos que tenemos un disco cuyo borde admite una lectura destrógrica de la forma  $ABxCDx^{-1}E$ . Entonces se puede construir un nuevo disco cuyo borde tiene una lectura de la forma

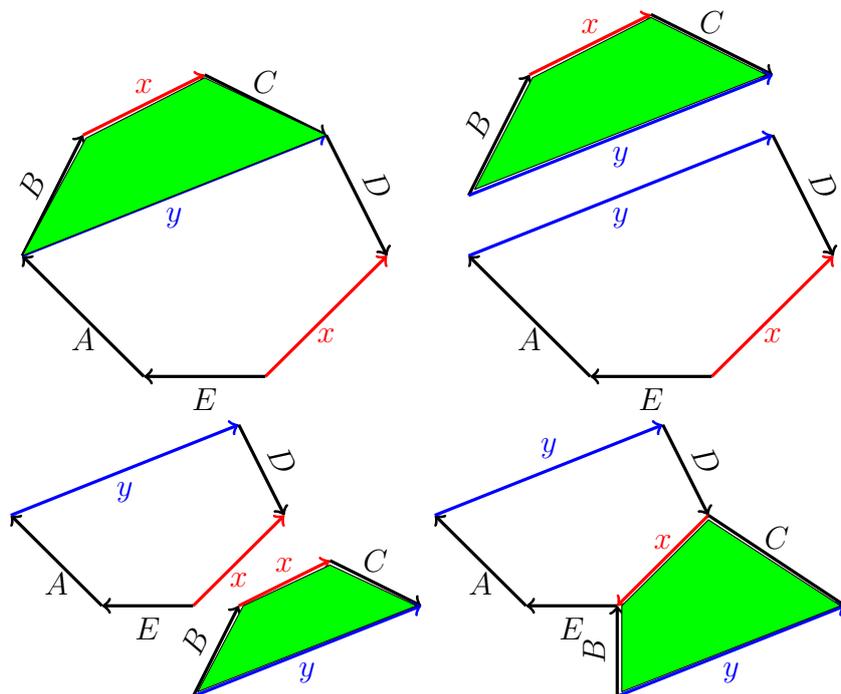


FIGURA 2.

$AyDCy^{-1}BE$  y tal que el cociente obtenido por identificaciones de parejas de aristas sigue siendo el mismo. Además el nuevo disco contiene en el borde el mismo número de aristas y las mismas aristas de segunda especie que el inicial.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una nueva arista que empieza al final de  $A$  y acaba en el final de  $C$ , véase Figura 2. Cortando por  $y$  se obtienen dos discos  $AyDx^{-1}E \sim E AyDx^{-1}$  y  $xCy^{-1}B$ . Pegando el primer con el último disco por la arista  $x$  se obtiene el disco  $E AyDCy^{-1}B \sim AyDCy^{-1}BE$ .  $\square$

TEOREMA 3.3. Sea  $\Sigma$  una superficie triangulada conexa. Entonces  $\Sigma$  es homeomorfo a un cociente obtenido a partir de un disco triangulado, cuyo borde es de la forma  $ABC$ , donde  $A = x_1x_1 \cdots x_r x_r$  y  $B = y_1z_1y_1^{-1}z_1^{-1} \cdots y_s z_s y_s^{-1}z_s^{-1}$  y  $C$  no contiene aristas de segunda especie y tampoco pares de aristas de primera especie y de segundo tipo.

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el teorema previo al anterior se puede suponer que el borde del disco es de la forma  $AB''$  donde  $B''$  no contiene aristas de segunda especie. Supongamos que  $B'' = B'C'$  donde  $B'$  es vacío o ya contiene algún “conmutador”. Supongamos que  $C' = DaEbFa^{-1}Gb^{-1}H$  donde el par de parejas  $a, a^{-1}$  y  $b, b^{-1}$  son de segundo tipo. Aplicando el lema anterior de modo consecutivo  $AB''DaEbFa^{-1}Gb^{-1}H$  se puede reemplazar por  $AB''cFEbc^{-1}DGb^{-1}H$ ,

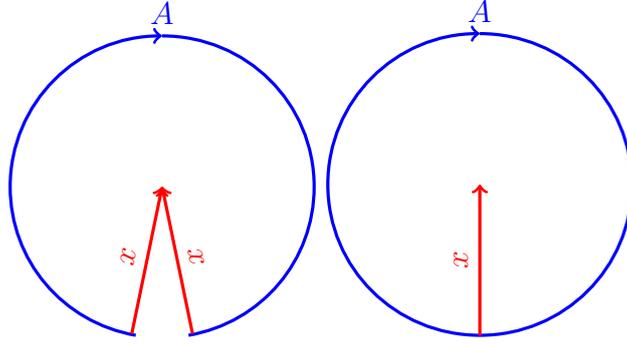


FIGURA 3. Identificación de un par de aristas consecutivas de primera especie

$AB''cFE dDGc^{-1}d^{-1}H$ ,  $AB''eDGFEde^{-1}d^{-1}H$  y finalmente por el disco cuyo borde es  $AB''efe^{-1}f^{-1}DGFEH$ . De este modo, hemos extendido  $B''$  con un nuevo conmutador. Como el número de pares de parejas de aristas es finito se llega a una una lectura de la forma  $ABC$  donde  $C$  no contiene aristas de segunda especie y tampoco pares de parejas de primera especie de segundo tipo.  $\square$

LEMA 3.3. Supongamos que tenemos un disco cuyo borde admite una lectura destrógrica de la forma  $Dxx^{-1}$  con  $D$  no vacío. Entonces se puede construir un nuevo disco cuyo borde tiene una lectura que se reduce a  $D$  y tal que el cociente obtenido por identificaciones de parejas de aristas sigue siendo el mismo. Además, el nuevo disco contiene en el borde dos aristas menos de primera especie que el inicial.

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar la identificación inducida por la pareja de aristas  $x, x^{-1}$ , véase la Figura 3.  $\square$

TEOREMA 3.4. Sea  $\Sigma$  una superficie triangulada conexa. Entonces  $\Sigma$  es homeomorfo a un cociente obtenido a partir de un disco triangulado, cuyo borde es de la forma  $ABC$ , donde  $A = x_1x_1 \cdots x_r x_r$ ,  $B = y_1z_1y_1^{-1}z_1^{-1} \cdots y_s z_s y_s^{-1} z_s^{-1}$  y  $C = u_1u_1^{-1} \cdots u_t u_t^{-1}$  de modo que  $r, s, t \geq 0$  y  $r + s + t > 0$ .

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar aplicaremos el Teorema anterior para obtener un disco cuyo borde es de la forma  $ABC'$  donde  $C'$  no contiene parejas de aristas de segunda especie ni pares de parejas de aristas de primera especie y de segundo tipo. Supongamos que la primera arista de  $C'$  es  $x$ , entonces  $C'$  tiene que tener un  $x^{-1}$ . Si  $x, x^{-1}$  son consecutivas, tomamos  $C_1 = xx^{-1}$  y reducimos  $C'$  en dos aristas. Si no son consecutivas, tomamos una arista  $y$  entre  $x$  y  $x^{-1}$  entonces se debe cumplir que  $y^{-1}$  esté también entre  $x$  y  $x^{-1}$  ya que  $C'$  no contiene pares de parejas de segundo tipo. Si  $y, y^{-1}$  son consecutivas aplicamos el lema anterior y de nuevo hemos reducido  $C'$  en dos aristas; en otro

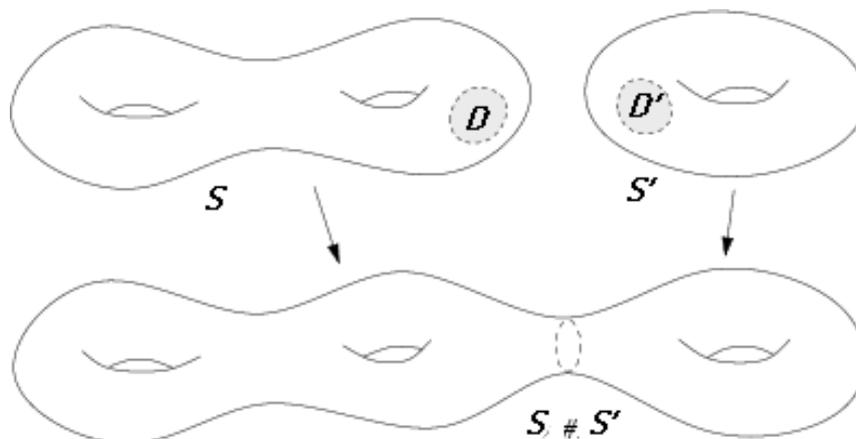


FIGURA 4. Suma conexa de dos superficies  $S$  y  $S'$

caso se toma una nueva arista  $z$  entre  $y$  e  $y^{-1}$  se aplica de nuevo el argumento anterior y se sigue así hasta que aparezcan dos aristas de primera especie consecutivas que se pueden eliminar aplicando el lema anterior.

Por lo tanto, en cada paso de consigue reducir el tamaño de  $C'$  y  $C_1$  puede ir incrementando su tamaño con pares de aristas consecutivas de primera especie.

Queda por lo tanto, finalmente, un disco cuya lectura es de la deseada forma  $ABC$ .  $\square$

Es conveniente considerar la siguiente construcción: si  $S$ ,  $S'$  son superficies y  $D$ ,  $D'$  son discos contenidos en ellas, la suma conexa  $S \# S'$  de  $S$  y  $S'$  se obtiene identificando  $S \setminus \text{Int}D$  con  $S' \setminus \text{Int}D'$  mediante un homeomorfismo entre los bordes de los discos, véase la Figura 4. Se puede probar de modo riguroso que la suma conexa módulo homeomorfismo no depende ni de los discos ni del homeomorfismos elegidos.

LEMA 3.4. Supongamos que tenemos un disco cuyo borde admite una lectura destrógira de la forma  $EFG$  de manera que todas las aristas  $E$  y las de  $F$  comparten en el cociente un único vértice, y cada arista de  $EF$  tiene a su pareja también en  $EF$ . Entonces, se puede construir un nuevo disco cuyo borde tiene una lectura de la forma  $FEG$  y tal que el cociente obtenido por identificaciones de parejas de aristas es homeomorfo al cociente del disco inicial.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un arco simple  $t$  que corte al disco y que vaya del punto final de  $F$  al inicial de  $E$ . Es importante observar que las condiciones impuestas en el enunciado hacen que  $t$  en el cociente tenga un complementario con dos componentes conexas; es decir, que la circunferencia  $t$  divide a la superficie en dos componentes. Cortemos el disco para obtener dos discos  $D_1$ ,  $D_2$  con bordes  $EFt$ ,  $t^{-1}G$ . Tomemos un arco simple cerrado  $t'$  en  $D_1$  con inicio y final en el punto

final de  $E$  que bordee un disco  $D$ . Si pegamos un disco  $D'$  al cociente de  $D_1$  y un disco  $D''$  al cociente de  $D_2$  a lo largo de  $t$  tenemos que la superficie se ha descompuesto como la suma conexa de  $(D_1 \cup D')/\sim$  con  $(D_2 \cup D'')/\sim$  a través de los discos  $D'$  y  $D''$ . Sabemos que la clase de homeomorfismo de la suma conexa no depende de los discos que se remuevan ni tampoco del homeomorfismo elegido entre los bordes resultantes. Entonces en  $(D_1 \cup D')/\sim$  quitamos el disco  $D$  y cortamos por  $E$  y  $F$  para obtener un nuevo disco  $D'_1$  cuyo borde es  $F E t'$ . En  $(D_2 \cup D'')/\sim$  volvemos a quitar el mismo disco  $D''$  para obtener de nuevo  $D_2$  con borde  $t^{-1}G$ . Identificando las arcos  $t'$  y  $t$  se obtiene finalmente un nuevo disco cuyo borde tiene por lectura  $F E G$  y su cociente es homeomorfo al cociente del primer disco cuyo borde era  $E F G$ .  $\square$

**TEOREMA 3.5.** Sea un disco con identificaciones en el borde determinadas por una palabra de la forma  $A'aabbccB'C$  donde  $A'$ ,  $B'$  y  $C$  son del tipo del teorema anterior. Entonces se puede sustituir el disco por uno nuevo de modo que la lectura de su borde es  $A'zzf^{-1}e^{-1}feB'C$  de modo que los cocientes son homeomorfos. Es decir, que la subpalabra  $aabbcc$  se ha podido reemplazar por un par de aristas de primera especie y un conmutador  $zzf^{-1}e^{-1}fe$ , y del mismo modo ésta última se puede sustituir por la anterior.

**DEMOSTRACIÓN.** Tomemos la palabra  $A'aabbccB'C$  y le aplicamos el lema 3.1 se puede reemplazar por un nuevo disco cuya lectura es  $A'ada^{-1}dccB'C$ . A continuación aplicamos de nuevo el lema 3.1 para obtener  $A'ada^{-1}zd^{-1}zB'C$ . Seguidamente, le aplicamos el lema 3.2 y ahora tenemos  $A'eza^{-1}e^{-1}azB'C$ . De nuevo aplicando el lema 3.2 se obtiene  $A'f^{-1}e^{-1}fezzB'C$ . Finalmente, aplicando el lema 3.4 llegamos a  $A'zzf^{-1}e^{-1}feB'C$ . De este modo que tres parejas de segunda especie se han reemplazado por una pareja de segunda especie y un conmutador.  $\square$

**TEOREMA 3.6.** Sea  $\Sigma$  una superficie triangulada conexa. Entonces  $\Sigma$  es homeomorfa a un cociente obtenido a partir de un disco con una descomposición celular, cuyo borde es de la forma  $ABC$ , donde  $A = x_1x_1 \cdots x_r x_r$  y  $B = y_1z_1y_1^{-1}z_1^{-1} \cdots y_s z_s y_s^{-1}z_s^{-1}$  y  $C = u_1u_1^{-1} \cdots u_t u_t^{-1}$  de modo que  $r, s, t \geq 0$ ,  $r + s + t > 0$ . Además se puede suponer que  $t \in \{0, 1\}$  y que dos de las tres variables  $r, s, t$  son nulas. Esto es, podemos decir que una superficie triangulada conexa tiene una única  $(r, s, t)$ -representación canónica de uno de los siguientes tipos:

- (i) Un disco cuyo borde es de la forma  $C = u_1u_1^{-1}$  ( $r = 0$ ,  $s = 0$ ,  $t = 1$ ), ver la Figura 5.
- (ii) Un disco cuyo borde es de la forma  $B = y_1z_1y_1^{-1}z_1^{-1} \cdots y_s z_s y_s^{-1}z_s^{-1}$  ( $r = 0$ ,  $s > 0$ ,  $t = 0$ ), veáse la Figura 6.

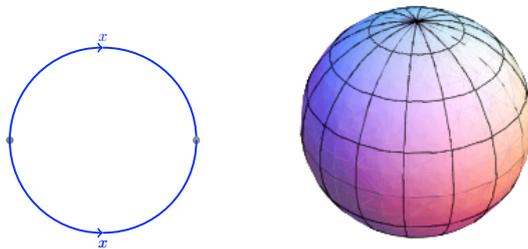


FIGURA 5. Disco representando la superficie orientable de género 0 llamada esfera

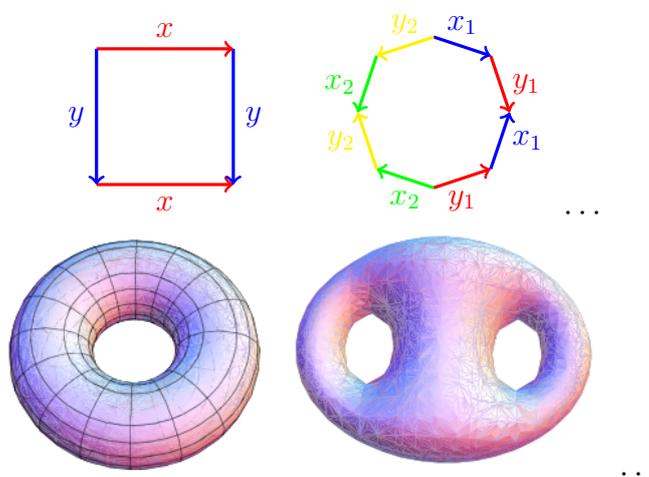


FIGURA 6. Discos representando superficies orientables de género 1,2, ..., llamadas toro, doble toro,...

- (iii) Un disco cuyo borde es de la forma  $A = x_1x_1 \cdots x_r x_r$ , ( $r > 0, s = 0, t = 0$ ), véase la Figura 7.

Además si dos superficies trianguladas tienen la misma  $(r, s, t)$ -representación canónica, entonces son homeomorfas.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 3.4, sabemos que una superficie se puede representar mediante un disco cuyo borde admite una lectura de la forma  $ABC$  con  $r+s+t > 0$ . Si  $AB$  es vacío, del lema 3.3 se sigue que podemos representar la superficie mediante un disco cuyo borde es de la forma  $C = u_1u_1^{-1}$  con ( $r = 0, s = 0, t = 1$ ). En el caso que  $AB$  sea no vacío, o equivalentemente  $r + s > 0$ , podemos aplicar  $t$  veces el lema 3.3 para obtener una nueva representación mediante un disco cuyo borde es de la forma  $AB$ . Si  $A$  es vacío, entonces el borde del disco es de la forma  $B = y_1z_1y_1^{-1}z_1^{-1} \cdots y_s z_s y_s^{-1} z_s^{-1}$ , con ( $r = 0, s > 0, t = 0$ ). Si  $A$  es no vacío, podemos aplicar el teorema 3.5 de manera que la superficie se puede representar por un disco cuyo borde es de la forma  $A' = x_1x_1 \cdots x_{r'}x_{r'}$  con ( $r' > 0, s = 0, t = 0$ ).

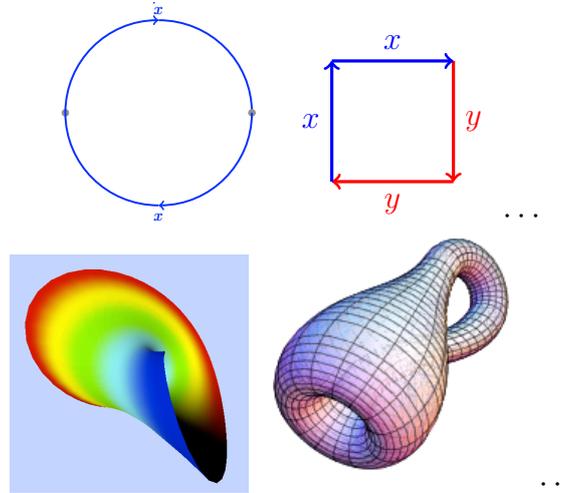


FIGURA 7. Superficies no orientables de género 1,2,  $\dots$ , llamadas plano proyectivo, botella de Klein  $\dots$  (en la representación, al plano proyectivo le falta un punto y la botella tiene una autointersección en forma de circunferencia)

Por otra parte, si suponemos que dos superficies admiten representaciones canónicas diferentes, vamos a ver que no son homeomorfas. Para ello, calculemos la abelianización del grupo fundamental de las superficies de tipo (i), (ii) y (iii) que denotaremos por  $\Sigma^{(0,0,1)}$ ,  $\Sigma^{(0,s,0)}$ ,  $\Sigma^{(r,0,0)}$ , respectivamente.

Aplicando la proposición 2.2 del capítulo 4 se obtiene:

- (i)  $\text{ab}(\pi_1(\Sigma^{(0,0,1)})) \cong 0$ .
- (ii)  $\text{ab}(\pi_1(\Sigma^{(0,s,0)})) \cong \bigoplus_1^{2s} \mathbb{Z}$ .
- (iii)  $\text{ab}(\pi_1(\Sigma^{(r,0,0)})) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus_1^{r-1} \mathbb{Z}$ .

Si dos de las representaciones canónicas corresponden a superficies homeomorfas, entonces tendrían grupos fundamentales isomorfos y también lo serían sus abelianizaciones. Pero en la familia de grupos que acabamos de describir no existen dos de ellos que sean isomorfos.  $\square$

**TEOREMA 3.7.** Sea  $\Sigma$  una superficie triangulada conexa. Entonces  $\Sigma$  es homeomorfo a un cociente obtenido a partir de un disco con una descomposición celular, cuyo borde es de la forma  $ABC$ , donde  $A = x_1x_1 \cdots x_r x_r$ ,  $B = y_1z_1y_1^{-1}z_1^{-1} \cdots y_s z_s y_s^{-1}z_s^{-1}$  y  $C = u_1u_1^{-1} \cdots u_t u_t^{-1}$  de modo que  $r + s + t > 0$ . Además, se puede suponer que  $r \in \{0, 1, 2\}$  y  $t \in \{0, 1\}$  de modo que  $r + s > 0$  si y sólo si  $t = 0$  y  $r + s = 0$  si y sólo si  $t = 1$ . En estos casos diremos que se trata de la  $(r, s)$ -representación canónica de  $\Sigma$ . Una superficie tiene una única  $(r, s)$ -representación de los siguientes tipos:

- (i) Un disco cuyo borde es de la forma  $C = u_1 u_1^{-1}$ , ( $r = s = 0, t = 1$ ).
- (ii) Un disco cuyo borde es de la forma  $B = y_1 z_1 y_1^{-1} z_1^{-1} \cdots y_s z_s y_s^{-1} z_s^{-1}$ , ( $r = 0, s > 0, t = 0$ ).
- (iii) Un disco cuyo borde es de la forma  $AB$  con  $A = x_1 x_1$ ,  $B = y_1 z_1 y_1^{-1} z_1^{-1} \cdots y_s z_s y_s^{-1} z_s^{-1}$ , ( $r = 1, s \geq 0, t = 0$ ).
- (iv) Un disco cuyo borde es de la forma  $AB$  con  $A = x_1 x_1 x_2 x_2$ ,  $B = y_1 z_1 y_1^{-1} z_1^{-1} \cdots y_s z_s y_s^{-1} z_s^{-1}$ , ( $r = 2, s \geq 0, t = 0$ ).

Además, si dos superficies tienen la misma  $(r, s)$ -representación, entonces son homeomorfas.

**DEMOSTRACIÓN.** Basta tener en cuenta el teorema anterior y que las superficies que se representan por disco cuyo borde es de la forma  $A = x_1 x_1 \cdots x_r x_r$ , aplicando el teorema 3.5, se pueden representar por un disco cuyo borde es de la forma  $A'B'$  con  $A' = x_1 x_1$  o  $A' = x_1 x_1 x_2 x_2$ .  $\square$

**COROLARIO 3.1.** Las representaciones canónicas verifican para  $r + s + t > 0$

- (i)  $\Sigma^{(0,0,1)} \cong \Sigma^{(0,0)}$
- (ii)  $\Sigma^{(0,s,0)} \cong \Sigma^{(0,s)}$
- (ii)  $\Sigma^{(r,0,0)} \cong \Sigma^{(r-2E[(r-1)/2], E[(r-1)/2])}$

**DEFINICIÓN 3.3.** Las superficies anteriores se denominan y denotan del siguiente modo:

- (i)  $\Sigma^{(0,0,1)} \cong \Sigma^{(0,0)}$  es la 2-esfera  $S^2$ .
- (ii)  $\Sigma^{(0,s,0)} \cong \Sigma^{(0,s)}$  es la superficie orientable de género  $s$ . Para  $s = 1$  se llama toro  $T^2$ , para  $s = 2$  doble toro, ...
- (ii)  $\Sigma^{(r,0,0)} \cong \Sigma^{(r-2E[(r-1)/2], E[(r-1)/2])}$  es la superficie no orientable de género  $r$ . Para  $r = 1$  se denomina plano proyectivo real  $P^2$ , para  $r = 2$  botella de Klein  $K^2$ .

**COROLARIO 3.2.** Sea  $\Sigma^{(r,s,t)}$  una superficie triangulada conexa obtenida a partir de un disco con una descomposición celular, cuyo borde es de la forma  $ABC$ , donde  $A = x_1 x_1 \cdots x_r x_r$  y  $B = y_1 z_1 y_1^{-1} z_1^{-1} \cdots y_s z_s y_s^{-1} z_s^{-1}$  y  $C = u_1 u_1^{-1} \cdots u_t u_t^{-1}$  de modo que  $r + s + t > 0$ . Entonces

- (i) Si  $r + s = 0$ ,  $\Sigma^{(r,s,t)} \cong \Sigma^{(0,0,1)} \cong \Sigma^{(0,0)}$
- (ii) Si  $r + s > 0$ ,  $r = 0$ ,  $\Sigma^{(r,s,t)} \cong \Sigma^{(0,s,0)} \cong \Sigma^{(0,s)}$
- (iii) Si  $r + s > 0$ ,  $r > 0$ ,  $\Sigma^{(r,s,t)} \cong \Sigma^{(2s+r,0,0)} \cong \Sigma^{(r-2(E[(r-1)/2]), s+E[(r-1)/2], 0)}$

**DEMOSTRACIÓN.** El abelianizado del grupo fundamental de  $\Sigma^{(r,s,t)}$  es precisamente el grupo

- (i) Si  $r + s = 0$ ,  $\text{ab}(\pi_1 \Sigma^{(r,s,t)}) \cong 0$
- (ii) Si  $r + s > 0$ ,  $r = 0$ ,  $\text{ab}(\pi_1 \Sigma^{(r,s,t)}) \cong \bigoplus_1^{2s} \mathbb{Z}$
- (iii) Si  $r + s > 0$ ,  $r > 0$ ,  $\text{ab}(\pi_1 \Sigma^{(r,s,t)}) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus_1^{2s+r-1} \mathbb{Z}$

$\square$

DEFINICIÓN 3.4. Una orden total para un  $n$ -símplice  $\{v_0, \dots, v_n\}$  es una relación de orden  $<$  tal que dados  $v_i \neq v_j$ , entonces o  $v_i < v_j$  o  $v_j < v_i$ . Un orden total en el conjunto  $\{v_0, \dots, v_n\}$  determina una única  $n$ -tupla  $(v_0, \dots, v_n)$ . Dos ordenes totales  $(v_{i_0}, \dots, v_{i_n})$ ,  $(v_{j_0}, \dots, v_{j_n})$  diremos que están relacionados si la signatura de la permutación asociada  $\sigma$ ,  $\sigma(v_{i_k}) = v_{j_k}$  es igual a 1. Llamaremos orientación de un  $n$ -símplice a una de las clases de equivalencia de la relación anterior.

Notemos que con la definición anterior un 0-símplice sólo admite una orientación, no obstante, a veces es conveniente asociar a cada vértice  $v$  dos orientaciones que serán denotas por  $v, -v$ . Es fácil ver también que para  $n > 0$ , un  $n$ -símplice admite dos orientaciones. Para dar una orientación a una  $n$ -símplice  $\{v_0, \dots, v_n\}$  es suficiente con elegir un orden total en el conjunto de sus vértices y considerar la correspondiente clase de equivalencia  $[(v_{i_0}, \dots, v_{i_n})]$ . Para  $n > 0$ , Es conveniente notar que si en una orientación  $[(v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})]$  realizamos una transposición  $[(v_{i_1}, v_{i_0}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})]$  se obtiene exactamente la otra orientación. Es frecuente utilizar la notación  $[(v_{i_1}, v_{i_0}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})] = -[(v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})]$  y se dice que son dos orientaciones opuestas. Para  $n > 0$ , un  $n$ -símplice orientado  $[(v_{i_0}, \dots, v_{i_n})]$  induce de manera natural orientaciones en cada una de sus caras

$$(-1)^k [(v_{i_0}, \dots, v_{i_{k-1}}, v_{i_{k+1}}, \dots, v_{i_n})].$$

DEFINICIÓN 3.5. Una orientación de una superficie semi-simplicial consiste en la elección de una orientación en cada una de sus caras de modo que para arista las orientaciones inducidas por las dos caras adyacentes sean opuestas. Una superficie semi-simplicial diremos que es orientable si admite una orientación. Una superficie semi-simplicial junto con una orientación diremos que es una superficie semi-simplicial orientada.

DEFINICIÓN 3.6. Una superficie diremos que es orientable si admite una triangulación mediante una superficie semi-simplicial orientable. En otro caso diremos que no es orientable.

El siguiente resultado se puede probar, por ejemplo, mediante técnicas homológicas. Aquí lo utilizaremos pero no se incluye su demostración:

TEOREMA 3.8. Si  $\Sigma$  es una superficie orientable y admite una triangulación mediante una superficie semi-simplicial  $(X, S)$ , entonces  $(X, S)$  es orientable.

COROLARIO 3.3. Las representaciones canónicas verifican:

- (i)  $\Sigma^{(0,0,1)} \cong \Sigma^{(0,0)}$  es orientable,
- (ii)  $\Sigma^{(0,s,0)} \cong \Sigma^{(0,s)}$  es orientable,
- (ii)  $\Sigma^{(r,0,0)} \cong \Sigma^{(r-2E[(r-1)/2], E[(r-1)/2])}$  no es orientable.

COROLARIO 3.4. Dos superficies triangulables conexas y compactas son homeomorfas si y sólo si tienen característica de euler y el mismo tipo de orientabilidad.

### PROBLEMAS

3.1. Sea  $D$  un disco, cuyo borde tiene una CW-descomposición formada por  $2n$  aristas. Probar que formamos  $n$  parejas de aristas, las orientamos e identificamos cada pareja de aristas mediante homeomorfismos compatibles con la orientación, entonces el cociente es una superficie conexa y compacta.

3.2. Considerar los conjuntos semi-simpliciales generados por las caras triangulares

- (i) 123 124 134 234
- (ii) 124 245 235 135 156 126 236 346 134 456
- (iii) 124 245 235 356 136 146 457 578 568 689 469 479 178 128 289  
239 379 137
- (iv) 124 235 346 457 561 672 713 134 245 356 467 571 612 723
- (v) 123 256 341 451 156 268 357 468 167 275 379 475 172 283 385  
485.
- (vi) 124 235 156 236 134 245 135 126 346 456
- (vii) 124 245 235 356 361 146 457 578 658 689 649 679 187 128 289  
239 379 137
- (viii) 124 236 134 246 367 347 469 459 698 678 457 259 289 578 358  
125 238 135

Probar que son superficies semi-simpliciales y encontrar sus representaciones canónicas.

3.3. Encontrar las representaciones canónicas de las superficies representadas por discos con aristas identificadas por parejas y cuya lectura es la siguiente:

- (i)  $abcded^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1}$ ,
- (ii)  $a_1 \cdots a_n a_1^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n$ ,  $n > 0$ ,
- (iii)  $a_1 \cdots a_n a_1^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}$ ,  $n > 0$ .

3.4. Demostrar que  $P^2 \# P^2 \# P^2 \cong P^2 \# T^2$ , donde  $P^2$  es el plano proyectivo real y  $T^2$  denota el toro.

3.5. Si  $S^2$  es la 2-esfera,  $T^2$  el toro,  $P^2$  el plano proyectivo y  $K^2$  la botella de Klein, demostrar que toda superficie compacta conexa Hausdorff es homeomorfa a una de las siguientes sumas conexas:

- (i)  $S^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2$ ,  $s \geq 0$ .
- (ii)  $P^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2$ ,  $s \geq 0$ .
- (iii)  $K^2 \# T^2 \# \cdots \# T^2$ ,  $s \geq 0$ .

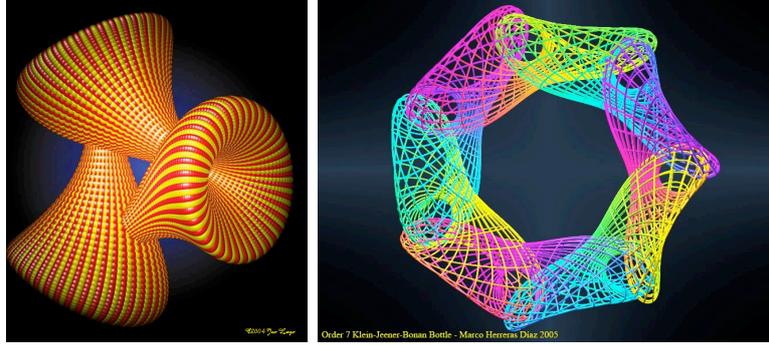


FIGURA 8. Superficies no orientables inmersas en el espacio euclidiano

3.6. Calcular las representaciones canónicas de la suma conexa

$$P^2 \# \dots^{(n)} P^2 \# T^2 \dots^{(m)} \# T^2 .$$

3.7. Sean  $S_1, S_2$  superficies compactas. Probar que

$$\xi(S_1 \# S_2) = \xi(S_1) + \xi(S_2) - 2 .$$

3.8. Probar que

- (i)  $\xi(S^2) = 2$ ,
- (ii)  $\xi(P^2) = 1$ ,
- (iii)  $\xi(T^2) = 0$ .

3.9. Probar que

- (i)  $\xi(S^2 \# T^2 \# \dots^{(s)} \# T^2) = 2 - 2s$ ,
- (ii)  $\xi(P^2 \# T^2 \# \dots^{(s)} \# T^2) = 2 - s$ ,
- (iii)  $\xi(K^2 \# T^2 \# \dots^{(s)} \# T^2) = -2s$ .

3.10. Clasifica las superficies de la Figura 8 inmersas en el espacio euclidiano con algunas intersecciones.

#### 4. Clasificación de las superficies trianguladas con borde

Una *superficie con borde* es un espacio topológico  $\Gamma$  tal que cada punto  $p \in \Gamma$  tiene un entorno que es homeomorfo a una 2-bola o a una semi-2-bola, ver ejemplos 1.7, 1.8. En esta sección damos la noción de superficie triangulada con borde. Partiendo de una superficie triangulada compacta y conexa con borde  $\Gamma$ , se pueden pegar varios discos a través de las componentes del borde para obtener una superficie triangulada compacta y conexa  $\tilde{\Gamma}$ . Dos superficies con borde compactas y conexas  $\Gamma_1, \Gamma_2$  son homeomorfas si y sólo si tienen el mismo número de componentes en su borde y  $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2$  son homeomorfas. Se incluye en esta sección algunas propiedades de las superficies con borde y el resultado mencionado que permite clasificar las superficies con borde.

DEFINICIÓN 4.1. Sea  $\Gamma$  una superficie con borde. Un punto  $p \in \Gamma$  diremos que es un *punto del borde* si tiene un entorno homeomorfo a una semi-2-bola. Se dice que es un *punto del interior* si tiene un entorno homeomorfo a una 2-bola. Denotaremos por  $\partial\Gamma$  el subconjunto formado por los puntos que están en el borde y por  $\Gamma^\circ$  el subconjunto de los puntos del interior.

PROPOSICIÓN 4.1. Si  $\Gamma$  una superficie con borde, entonces

$$\partial\Gamma \cap \Gamma^\circ = \emptyset .$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $p \in \Gamma^\circ$ , entonces  $p$  tiene una base de entornos  $B(n)$  tales que  $B(n) \setminus \{p\}$  es 0-conexo, su grupo fundamental es cíclico infinito y si  $B(m) \subset B(n)$ , la inclusión  $B(m) \setminus \{p\} \subset B(n) \setminus \{p\}$  induce un isomorfismo en el grupo fundamental. Supongamos que  $p \in \partial\Gamma$ , para  $n = 1$ , existe un entorno  $N$  tal que  $N \setminus \{p\}$  es 0-conexo, tiene grupo fundamental trivial y además existe  $m$  tal que  $B(m) \setminus \{p\} \subset N \setminus \{p\} \subset B(1) \setminus \{p\}$ . Ello implica que isomorfismo del cíclico infinito inducido por la inclusión  $B(m) \setminus \{p\} \subset B(1) \setminus \{p\}$  factoriza a través del grupo trivial. Esta contradicción viene de suponer que  $p \in \partial\Gamma$ , luego se tiene que  $p \notin \partial\Gamma$ .  $\square$

DEFINICIÓN 4.2. Una *superficie semi-simplicial con borde* es un conjunto semi-simplicial  $(X, S)$  de dimensión 2 verificando las siguientes propiedades:

- a) cada arista incide exactamente con una o dos caras, y
- b) el halo de cada vértice es una circunferencia semi-simplicial o un camino semi-simplicial

DEFINICIÓN 4.3. Una *superficie triangulada con borde* es un espacio topológico  $\Sigma$  junto con un homeomorfismo  $\phi: |(X, S)| \rightarrow \Sigma$ , donde  $(X, S)$  es una superficie semi-simplicial con borde.

PROPOSICIÓN 4.2. Sea  $\phi: |(X, S)| \rightarrow \Sigma$  una superficie triangulada. Entonces  $\partial\Sigma = \phi(\cup\{|a| \mid a \text{ es una arista que incide con una sólo cara}\})$ . El conjunto semi-simplicial generado por las aristas que inciden con una sola cara es verifica que el halo de cada vértice está formado por dos puntos. Si además  $\Sigma$  es compacta, se tiene que este conjunto semi-simplicial es la reunión de un número finito de circunferencias semi-simpliciales.

Dada una circunferencia semi-simplicial, generada por aristas

$$\{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_n, v_0\}\},$$

se puede construir un nuevo conjunto semi-simplicial que lo llamaremos cono desde  $w$  y que es el generado por las caras

$$\{\{w, v_0, v_1\}, \{w, v_1, v_2\}, \dots, \{w, v_n, v_0\}\} .$$

La realización de un cono de una circunferencia semi-simplicial es un disco topológico. De su construcción se deduce que el halo del nuevo

vértice es un circunferencia semi-simplicial y el halo de uno del resto de los vértices es un camino semi-simplicial de dos aristas.

Sea  $\Gamma$  una superficie con borde compacta triangulada y supongamos que su borde  $\partial\Gamma$  tiene  $m$  componentes  $B_1, \dots, B_m$ . Sabemos que cada  $B_i$ , es una circunferencia semi-simplicial, entonces considerando nuevos vértices  $w_1, \dots, w_m$  se puede construir una nueva superficie compacta triangulada  $\tilde{\Gamma}$ , tomando los correspondientes conos desde los nuevos vértices. Es fácil comprobar que el conjunto semi-simplicial así construido satisface las propiedades a) y b) de la definición 3.2 .

Nos apoyaremos en el siguiente lema técnico para probar un teorema que clasifica superficies con borde:

LEMA 4.1. Sea  $\Gamma$  una superficie triangulada compacta y conexa y sean  $D_1, \dots, D_m$  discos disjuntos contenidos en  $\Gamma$  . Si  $D'_1, \dots, D'_m$  es otra familia de discos disjuntos contenidos en  $\Gamma$ , entonces existe un homeomorfismo  $\theta: \Gamma \rightarrow \Gamma$  tal que  $\theta(D_i) = D'_i, i \in \{1, \dots, m\}$  .

TEOREMA 4.1. Sean  $\Gamma$  y  $\Sigma$  superficies con borde trianguladas conexas y compactas, de modo que el número de componentes de sus bordes sea  $n, m$ , respectivamente. Entonces  $\Gamma$  y  $\Sigma$  son homeomorfas si y sólo si  $n = m$  y  $\tilde{\Gamma}$  y  $\tilde{\Sigma}$  son homeomorfas.

DEMOSTRACIÓN. Si  $\phi: \Gamma \rightarrow \Sigma$  es un homeomorfismo, se tiene que  $\phi(\partial\Gamma) = \partial\Sigma$  . Entonces la construcción cono permite la construcción de discos  $D_1, \dots, D_m$  para  $\Gamma$  y  $D'_1, \dots, D'_m$  para  $\Sigma$  y extender  $\phi$  a un nuevo homeomorfismo  $\psi: \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$  de modo que  $\psi(D_i) = D'_i, i \in \{1, \dots, m\}$  . Recíprocamente, si  $\psi': \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$  es un homeomorfismo, aplicado el lema anterior existe un homeomorfismo  $\theta: \Sigma \rightarrow \Sigma$  de modo que  $\theta\psi'(D_i) = D'_i, i \in \{1, \dots, m\}$  . Entonces  $\psi = \theta\psi'$  verifica que  $\psi|_{\Gamma}$  es un homeomorfismo de  $\Gamma$  en  $\Sigma$  .  $\square$

## PROBLEMAS

4.1. Demostrar que la suma conexa de una banda de Möbius con borde y un toro es homeomorfa a la suma conexa de una banda de Möbius con borde y una botella de Klein.

4.2. Demostrar que la característica de Euler de una superficie compacta  $\Gamma$  con borde que tenga  $k$  componentes en su borde satisface  $\xi(\Gamma) \leq 2 - k$  .

4.3. Clasifica la superficie con borde de la Figura 9 inmersa en el espacio euclidiano.

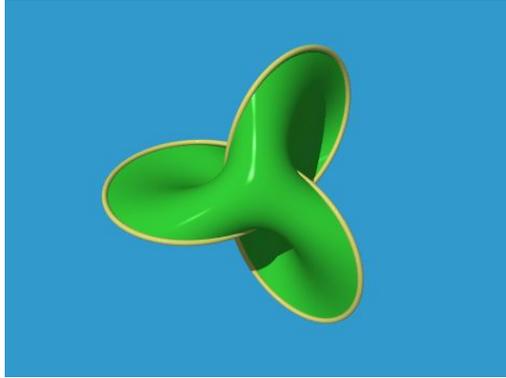


FIGURA 9. Superficie con borde inmersa en el espacio euclidiano y cuyo borde es el nudo trébol

## CAPÍTULO 6

# INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE NUDOS Y ENLACES

Algunos autores dicen que la teoría de nudos empezó en la primera década del siglo XIX con Johann Frederick Carl Gauss (1775-1855), ya que en su “analysis situs” se estudiaban las diferencias matemáticas entre nudos simples y complejos. A finales del siglo XIX Lord Kelvin, William Thomson (1824-1907) pensaba que el universo estaba lleno de un fluido llamado Eter en el que se situaban los átomos, que según Kelvin tenían forma de nudo. Según esta teoría una tabla de nudos sería la tabla de los elementos. P. G. Tait [T900], colaborador de Kelvin, enumeró a los nudos según el número de cruces de las proyecciones planas y planteó algunos descubrimientos que han sido llamados desde entonces las “Conjeturas de Tait”.

Señalaremos también que en 1953 James Watson y Francis Crick descubrieron que el ácido deoxyribonucleico, DNA, aparecía en forma de doble hélice y anudado de diversas formas. Hoy en día, la teoría de nudos es una herramienta más en el estudio estructural de biopolímeros como el DNA, el RNA y las proteínas. Todas estas moléculas son lo suficientemente largas y flexibles como para formar nudos. Algunas líneas de investigación intentan relacionar los invariantes de nudos con propiedades de estas moléculas.

La existencia de estudios sobre nudos y enlaces relacionados con ciertos temas científicos hizo que el estudio de sus propiedades e invariantes fuera abordado por algunos matemáticos. Citemos, entre otros, a Dehn, Alexander, Reidemeister y Seifert que realizaron los primeros trabajos sobre nudos. El primer texto sobre teoría de nudos fue el elaborado en 1932 por Reidemeister [30]. Los primeros artículos en español sobre esta teoría se deben a G. Torres<sup>1</sup> y A. Plans<sup>2</sup>. Un libro clásico que ha contribuido a la difusión de la teoría de nudos es el titulado “Introduction to Knot Theory” de R.H. Crowell y R.H. Fox [6], cuya redacción se basó en un curso dado por Fox en 1956 en el Haverford College.

---

<sup>1</sup>Sobre las superficies orientables extensibles en nudos, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, vol 8, (1951) 1–14

<sup>2</sup>Aportación al estudio de grupos de homología de los recubrimientos cíclicos ramificados correspondientes a un nudo, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid*, vol 47, 161-193 (1953)

### 1. Nudos y enlaces

Llamaremos *nudo* a un par  $(S^3, K)$  donde  $K$  es homeomorfo a una circunferencia  $S^1$  y en el caso que  $K$  sea homeomorfo a una reunión disjunta de  $\mu \geq 2$  circunferencias diremos que  $(S^3, K)$  es un *enlace*. Notemos que en este caso  $K = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$  y cada parte  $K_i$ , que es homeomorfa a una circunferencia, diremos que es una *componente* del enlace. Es decir que un nudo es un enlace con una sola componente. Diremos que dos enlaces  $(S^3, K_1)$ ,  $(S^3, K_2)$  son *semejantes* si existe un homeomorfismo  $f: S^3 \rightarrow S^3$  tal que  $f(K_1) = K_2$ .

Es importante recordar que  $S^3$  es homeomorfa a la compactificación de Alexandroff  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Por lo que podemos tomar en la clase de homeomorfía  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ .

Notemos también que una aplicación continua e inyectiva  $S^1 \rightarrow S^3$  no puede ser exhaustiva ya que entonces tendríamos una biyección continua de un compacto en un Hausdorff que también sería cerrada y en consecuencia un homeomorfismo. Sabemos que eso no es posible ya que  $S^3$  es simplemente conexa y  $S^1$  no lo es. Por otro lado, dados dos puntos  $p, q$  de  $S^3$  siempre existe un homeomorfismo de  $S^3$  que transforma  $p$  en  $q$ . En consecuencia, un nudo siempre tiene un nudo semejante contenido en  $\mathbb{R}^3$ . En la Figura 1 tenemos a la izquierda el nudo *trivial* y a la derecha el nudo *trébol*.

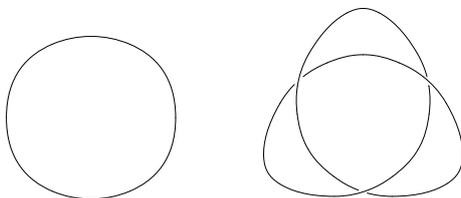


FIGURA 1. Nudo trivial y nudo trébol

En la Figura 2, a la izquierda está el enlace de Hopf, donde la curva se ha engrosado para formar toros macizos enlazados, y a la derecha, el enlace denominado “anillos borromeos”, esta escultura de Robinson está situada frente a la puerta del edificio de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

Sin embargo las clases de nudos y enlaces que estamos considerando en todavía muy amplia y puede contener nudos muy complejos que se suelen denominar *salvajes*. Un ejemplo de este tipo es el que contiene la Figura 3. En este caso se repite el nudo trébol infinitamente generando dos puntos de convergencia.

El estudio de nudos y enlaces salvajes es muy interesante, ahora bien, en estas notas nos limitaremos al estudio de nudos con buenas propiedades locales. Éstos los llamaremos regulares y su definición se introduce a continuación.



FIGURA 2. Enlace de Hopf y anillos borromeos

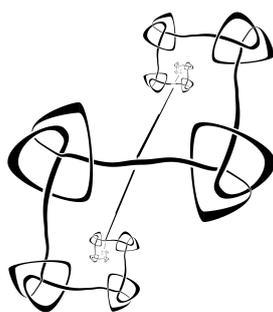


FIGURA 3. Nudo salvaje

Notemos que la circunferencia  $S^1$  se puede tomar como el cociente  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , es decir  $r \sim s$  si  $r - s \in \mathbb{Z}$ . Denotemos por  $\text{pr}: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  la aplicación cociente (En el capítulo 3 utilizábamos  $p$  en vez de  $\text{pr}$ ).

De este modo una aplicación continua  $\alpha: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que además tenga periodo igual a 1, factoriza a una aplicación continua  $\bar{\alpha}: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Un nudo corresponde al caso de que la aplicación inducida  $\bar{\alpha}$  sea inyectiva.

Notemos que un punto  $\text{pr}(t_0)$  de una circunferencia siempre tiene una base de entornos  $\{\text{pr}(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \mid 0 < \delta < 1/2\}$  de modo que  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  es homeomorfo a  $\text{pr}(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ . Un nudo inducido por una aplicación (continua con periodo 1)  $\alpha: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  diremos que es *regular* si para cada  $t \in \mathbb{R}^1$  existe un entorno abierto  $U$  de  $\alpha(t)$  y un homeomorfismo  $v: U \rightarrow B(0, \delta)$  tal que  $\alpha^{-1}(B(0, \delta)) = (t - \delta, t + \delta)$  y  $v\alpha(t) = (t, 0, 0)$ , para  $t \in (t - \delta, t + \delta)$ .

**PROPOSICIÓN 1.1.** Sea  $(S^3, K)$  un nudo regular con  $K \subset \mathbb{R}^3$ . Entonces

- (i)  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  y  $S^3 \setminus K$  son conexos por caminos.

(ii) Sea  $p_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ , entonces el homomorfismo inducido por la inclusión  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0) \rightarrow \pi_1(S^3 \setminus K, p_0)$  es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que un espacio  $X$  es la reunión de una familia de abiertos conexos por caminos  $\mathcal{U} = \{U_i | i \in I\}$ . Un camino de abiertos de  $U$  a  $V$  es una familia finita  $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_r}\}$  tal que  $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ ,  $1 \leq k < r$ ,  $U = U_{i_1}$ ,  $V = U_{i_r}$ . Diremos que  $\mathcal{U}$  es conexo si dados dos abiertos  $U, V \in \mathcal{U}$  existe un camino de abiertos de  $U$  a  $V$ . Es fácil de ver que  $X$  es conexo por caminos si y sólo si  $\mathcal{U}$  es conexo.

(i) Teniendo en cuenta que  $K$  es compacto y  $(S^3, K)$  un nudo regular existe un cubrimiento finito abierto  $K \subset U = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$  tal que cada  $U_i \setminus K$  es homeomorfo a  $B(0, \delta) \setminus \{(t, 0, 0) | -\delta < t < \delta\}$ , denotemos  $U_{m+1} = U_1$ . Además se puede suponer que  $(U_i \setminus K) \cap (U_{i+1} \setminus K) \neq \emptyset$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Puesto que  $U_i, U_i \setminus K$  son conexos por caminos, se deduce que  $U, U \setminus K$  son también conexos por caminos. Por otro lado, existe  $r > 0$  tal que  $\text{cl}(U) \subset B(0, r)$ . Puesto que  $D(0, 2r) \setminus U$  es compacto, podemos recubrirlo por una familia finita de bolas  $\{W_1, \dots, W_k\}$  que no corten a  $K$ . Teniendo en cuenta que  $\mathbb{R}^3 = U \cup (W_1 \cup \dots \cup W_k) \cup (\mathbb{R}^3 \setminus D(0, r))$  es conexo por caminos se sigue que la familia de abiertos  $\{U, W_1, \dots, W_k, \mathbb{R}^3 \setminus D(0, r)\}$  es conexa. Pero ahora fácilmente se obtiene que la familia de abiertos  $\{U \setminus K, W_1, \dots, W_k, \mathbb{R}^3 \setminus D(0, r)\}$  es también conexa y puesto que  $\mathbb{R}^3 \setminus K = (U \setminus K) \cup (W_1 \cup \dots \cup W_k) \cup (\mathbb{R}^3 \setminus D(0, r))$  utilizando el argumento dado el en inicio de esta demostración se concluye fácilmente que  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  es conexo por caminos. De modo análogo se puede ver que  $S^3 \setminus K$  es también conexo por caminos.

(ii) Tomemos  $r > 0$  tal que  $K \subset B(0, r) \subset D(0, r)$  y sea  $X_1 = \mathbb{R}^3 \setminus K$ ,  $X_2 = (\mathbb{R}^3 \setminus D(0, r)) \cup \{\infty\}$ . Notemos que  $X_2$  tiene el tipo de homotopía de un punto, y  $X_1 \cap X_2$  tiene el tipo de homotopía de una 2-esfera (por ejemplo la de radio  $2r$ ). Aplicando el teorema de Seifert-van Kampen (capítulo 4, teorema 2.1), se sigue que  $\pi_1(X_1, p_0) \rightarrow \pi_1(S^3 \setminus K, p_0)$  es un isomorfismo, donde  $p_0 \in X_1 \cap X_2$ .  $\square$

En la proposición anterior hemos impuesto la condición de que el nudo  $(S^3, K)$  fuera regular, para probar que  $\mathbb{R}^3 \setminus K$ ,  $S^3 \setminus K$  son conexos por caminos. Esta condición se puede omitir y el resultado sigue siendo válido. Una demostración de este hecho se puede abordar mediante los teoremas de dualidad que verifican las teoría de homología y cohomología. Una demostración de este resultado puede verse en [7].

DEFINICIÓN 1.1. Llamaremos *grupo fundamental de un nudo*  $(S^3, K)$  al grupo fundamental  $\pi_1(S^3 \setminus K, p_0)$  o equivalentemente  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, p_0)$  para un punto base  $p_0$ .

EJEMPLO 1.1. El grupo fundamental del nudo trivial es el grupo cíclico infinito.

Tomemos en la clase de homeomorfía de  $S^1$  el representante  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  y tomemos la aplicación continua  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\sigma(t) = (\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t, 0)$$

que es periódica e induce una aplicación continua e inyectiva  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que representa el nudo trivial  $(S^1, K)$ . Véase en la Figura 4 el nudo trivial dibujado en gris oscuro.

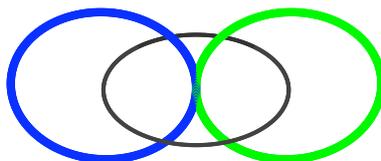


FIGURA 4. Generadores del nudo trivial

Tomemos los siguientes subespacios de  $\mathbb{R}^3 \setminus K$

$$X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus K \mid x \leq \frac{1}{2}\}$$

$$X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus K \mid x \geq -\frac{1}{2}\}$$

$$X_1 \cap X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus K \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$$

Es fácil ver que  $X_1$  y  $X_2$  tienen el tipo de homotopía de una circunferencia y por lo tanto  $\pi_1(X_1) \cong \langle a_1 \rangle$ ,  $\pi_1(X_2) \cong \langle a_2 \rangle$ . Si tomamos el punto base  $p_0 = (0,0,0)$  las clases  $a_1$   $a_2$  se pueden representar por el lazo  $\alpha$  dado por

$$\alpha(t) = (0, 1, 0) + (0, \cos 2\pi(t - \frac{1}{2}), \text{sen } 2\pi(t - \frac{1}{2}))$$

En la Figura 4 está representado por el lazo vertical colocado más hacia la derecha (color verde).

El grupo fundamental de  $X_1 \cap X_2$  es el grupo libre generado por dos elementos  $\pi_1(X_1 \cap X_2) \cong \langle a, b \rangle$  donde  $a$  está representado por el lazo  $\alpha$  y  $b$  por el lazo  $\beta$  dado por

$$\beta(t) = (0, -1, 0) + (0, \cos -2\pi t, \text{sen } -2\pi t)$$

En la Figura 4 está representado por el lazo vertical colocado más hacia la izquierda (color azul).

Los homomorfismos inducidos por las inclusiones

$$(\phi_1)_*: \pi_1(X_1 \cap X_2) \rightarrow \pi_1(X_1), (\phi_2)_*: \pi_1(X_1 \cap X_2) \rightarrow \pi_1(X_2)$$

verifican

$$(\phi_1)_*(a) = (\phi_1)_*(b) = a_1, (\phi_2)_*(a) = (\phi_2)_*(b) = a_2.$$

Aplicando el teorema de Seifert-van Kampen se obtiene

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \langle a_1, a_2 | a_1 = a_2 \rangle \cong \langle a_1 \rangle$$

que es el grupo cíclico infinito.

Podríamos mirar a un *nudo orientado*  $({}^o S^3, {}^{o'} K)$  como áquel determinado por la imagen de una circunferencia orientada  ${}^+ S^1$  mediante una aplicación continua e inyectiva en la 3-esfera orientada  ${}^o S^3$  (o en  ${}^{o'} \mathbb{R}^3$ ), donde hemos denotado con  $o, o', o''$  una de las dos posibles orientaciones  $\{+, -\}$  que tienen las variedades  $S^3, S^1$  o  $\mathbb{R}^3$ . Si en vez una copia tomamos  $\mu \geq 2$  copias de  ${}^+ S^1$ , el par  $({}^o S^3, {}^{o'} K)$  se denomina *enlace orientado*. Dos enlaces orientados  $({}^{o^1} S^3, {}^{o^1} K_1), ({}^{o^2} S^3, {}^{o^2} K_2)$  son *equivalentes* si existe un homeomorfismo  $h: S^3 \rightarrow S^3$  tal que  $h(K_1) = K_2$  y además  $h$  preserva las orientaciones. Un método para definir orientaciones consiste en introducir homología singular y analizar variedades topológicas compactas y conexas de dimensión  $m$  y cuyo grupo  $m$ -ésimo de homología sea isomorfo a un cíclico infinito, de modo que se puede tomar como orientación de una variedad compacta y conexas a cada uno de los dos generadores del grupo cíclico infinito. En el caso que no sea conexas, se toma una orientación para cada una de sus componentes. Existen también técnicas adecuadas para extender estos métodos homológicos para definir orientaciones en variedades no compactas.

En la Figura 5 vemos un nudo trébol orientado  $({}^+ S^3, {}^+ T)$  y a la derecha su imagen  $(-S^3, -T)$  reflejada en un espejo. La imagen de un nudo mediante una reflexión la llamaremos imagen especular del nudo. Una reflexión invierte las orientaciones de modo que  $({}^+ S^3, {}^+ T)$  es equivalente a  $(-S^3, -T)$  y por lo tanto también se tiene que  $(S^3, {}^+ T)$  es semejante a  $(S^3, -T)$ . Una pregunta interesante es la de averiguar si el nudo orientado  $({}^+ S^3, {}^+ T)$  es equivalente a  $({}^+ S^3, -T)$ . La respuesta es que no son equivalentes y la demostración se puede abordar a través de adecuados polinomios asociados a nudos orientados.

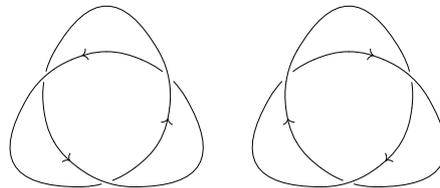


FIGURA 5. Nudo trébol y su imagen en un espejo

Por el contrario si en vez del nudo trébol tomamos la figura ocho,  ${}^+ O$  (el nudo  $4_1$ ), y su imagen en un espejo,  $-O$ , se obtiene que el nudo orientado  $({}^+ S^3, {}^+ O)$  es equivalente a  $({}^+ S^3, -O)$ . Esta afirmación se

puede probar considerando la composición de homeomorfismos que se indican en la Figura 6

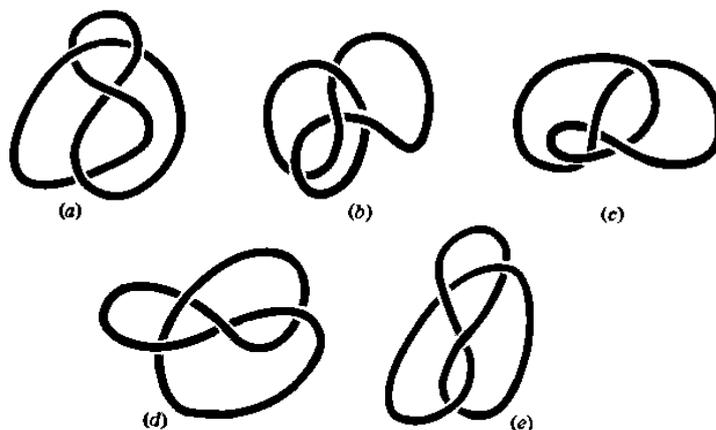


FIGURA 6. En nudo Figura Ocho es anfiqueiral

Aquelos nudos que son equivalentes a su imagen especular se llaman *anfiqueirales* (aquirales, ‘achiral’). Otros nudos anfiqueirales son los nudos  $6_3, 8_3, 8_9, 8_{12}, 8_{17}, 8_{18}$  de la tabla 21 . Se puede probar que el polinomio de Jones de un nudo anfiqueiral es simétrico  $V(t) = V(t^{-1})$  y puesto que el polinomio de Jones de un trébol dextrógiro ( $V(t) = t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$ ) no es simétrico, se obtiene que el nudo trébol no es anfiqueiral.

En la Figura 7, incluimos los dos rosetones de la ermita románica-protogótica de San Bartolomé (cerca de Burgo de Osma) Bartolomé, situada en el cañon de Rio Lobos, que formó parte de lo que fue el monasterio templario de San Juan de Otero. Se trata de del nudo primo  $10_{123}$  y de su imagen especular.

En la Figura 8 vemos un nudo trébol orientado  $(+S^3, +T)$  y en la derecha  $(+S^3, -T)$  hemos cambiado la orientación en  $T$  pero manteniendo la orientación de  $S^3$  . El nudo orientado  $(+S^3, +T)$  es equivalente a  $(+S^3, -T)$  . Para verlo basta con realizar un giro de 180 grados sobre un eje vertical. El nudo que verifica esta propiedad decimos que es *invertible*, así que el nudo trébol es invertible. La primera familia de nudos no invertibles fue estudiada por H.F. Trotter en 1964.

Sin embargo en estas notas no vamos a abordar el estudio de nudos orientados módulo equivalencia, sino el de nudos módulo semejanza. Para una un estudio más completo de nudos, que analice diversos invariantes polinómicos, el lector puede utilizar las referencias [6, 13].

## 2. Presentación de Wirtinger de un nudo

Para visualizar un nudo o un enlace utilizaremos un diagrama consistente en la proyección sobre un plano del nudo contenido en  $\mathbb{R}^3$  ya



FIGURA 7. Estrella pitagórica con proporciones áureas y en forma del nudo primo  $10_{123}$  y su imagen especular. Rosetones de la ermita de San Bartolomé.

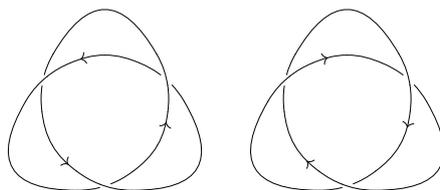


FIGURA 8. Nudos trébol con orientaciones opuestas

que podemos suponer que  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  y que el nudo no pasa por el punto del infinito.

Mediante un movimiento se puede conseguir que este plano sea  $\{(x, y, 0) | (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ . La imagen obtenida la llamaremos *diagrama del nudo*. Para cada punto  $q$  de diagrama, si  $\text{proy}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  denota la proyección,  $\text{proy}(x, y, z) = (x, y)$ , podemos considerar la fibra  $\text{proy}^{-1}(q) \cap K$ ,  $q \in \text{pr}(K)$ .

En la clase de semejanza de un nudo siempre existe un representante que tiene un *diagrama regular*; es decir, que se verifican las siguientes condiciones:

- (i) Salvo para un número finito  $F = \{q_1, \dots, q_n\}$  de puntos del diagrama se tiene que  $\text{proy}^{-1}(q) \cap K$ ,  $q \in \text{pr}(K)$  tiene un único elemento.
- (ii) Para cada,  $q_i$ ,  $\text{pr}^{-1}(q_i) \cap K$  tiene exactamente dos puntos  $p_i^+$ ,  $p_i^-$ .

Los puntos  $\{p_1^-, \dots, p_n^-\}$  se pueden ordenar en coherencia con la orientación determinada por la circunferencia. Estos puntos dividen a la imagen de la circunferencia en  $n$  arcos

$$A(p_1^-, p_2^-), A(p_2^-, p_3^-), \dots, A(p_n^-, p_1^-)$$

Donde  $A(p_i^-, p_{i+1}^-)$  denota el arco orientado determinado por los puntos  $p_i^-, p_{i+1}^-$ . Es conveniente utilizar la notación  $p_{n+1}^- = p_1^-$ .

(iii) Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  existen puntos de la imagen de la circunferencia  $u_i^+, u_i^-, v_i^+, v_i^-$ , véase la Figura 9 tales que el arco  $A(u_i^+, u_i^-)$  baja desde el plano  $z = 0$  hasta el plano  $z = -1$ , los arcos  $A(u_i^-, p_i^-)$ ,  $A(p_i^-, v_i^-)$  están en el plano  $z = -1$  y forman la parte inferior del cruce y finalmente el arco  $A(v_i^-, v_i^+)$  vuelve a subir al plano  $z = 0$ . Por otro lado, el resto de la imagen de la circunferencia está contenida en el plano  $z = 0$ .

Denotemos por  $c(K)$  el número mínimo de puntos de cruce de todos los diagramas regulares. El número  $c(K)$  es un invariante de nudos. Es conocido que el nudo trivial es el único nudo que posee diagramas regulares tales que  $c(D) = 0, 1, 2$ . El nudo trébol (ya sea dextrógiro o levógiro) tiene  $c(K) = 3$ . Mas aún, entre todos los nudos y enlaces es el único con  $c(K) = 3$ .

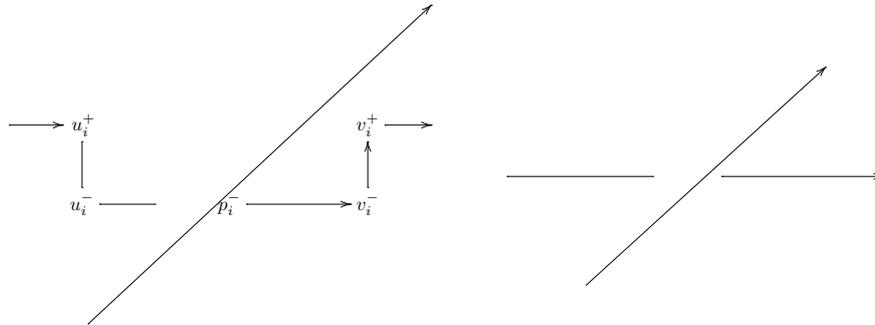


FIGURA 9. Cruces a distinto nivel

La presentación de Wirtinger asocia un generador a cada uno de los  $n$  arcos

$$A(p_1^-, p_2^-), A(p_2^-, p_3^-), \dots, A(p_n^-, p_1^-)$$

de modo que tenemos un generador  $a_i$  por cada arco  $A(p_i^-, p_{i+1}^-)$ . El cruce asociado a el punto  $p_i^-$  determina una relación  $r_i$ . En el cruce intervienen tres arcos, el correspondiente a paso superior, el que entra por debajo hasta  $p_i^-$  y el que sale desde este punto, debajo del cruce. Supongamos que los generadores asociados a éstos arcos sean  $a_j, a_i, a_{i+1}$ . En la Figura 10 hemos dibujado un pequeño cuadrado. Se elige un vértice del cuadrado, por ejemplo, el superior derecho, y un sentido de giro, digamos el contrario a las agujas del reloj. Cuando un arco entra en el cuadrado podemos considerar un exponente de valor 1 y en el caso que salga tomaremos el exponente  $-1$ . De este modo si damos una vuelta por el borde de cuadrado empezando en el vértice elegido y siguiendo el orientación prefijada, en el cuadrado de la izquierda se genera la siguiente palabra

$$r_i^i = a_j^1 a_i^1 a_j^{-1} a_{i+1}^{-1}$$

y en el de la derecha

$$r_i^d = a_j^{-1} a_i^1 a_j^1 a_{i+1}^{-1}$$

Notemos que cada cruce genera una relación del tipo anterior.

Si hubieramos elegido otro vértice del cuadrado o otro sentido de giro se obtienen relaciones distintas. Sin embargo es fácil de ver que si consideramos dos éstas relaciones distintas siempre se verifica que una de ellas es consecuencia de la otra.

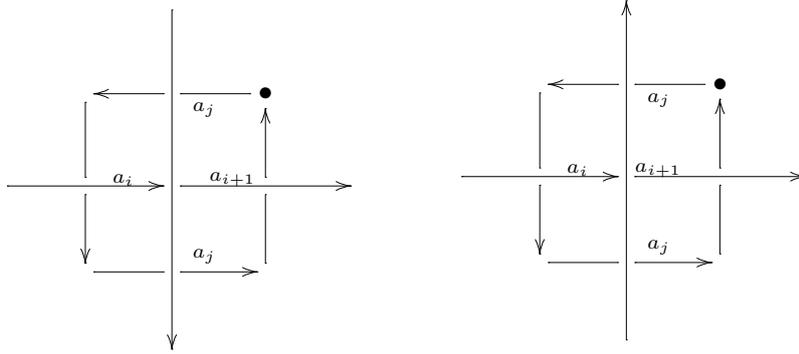


FIGURA 10. Izquierda:  $a_j^1 a_i^1 a_j^{-1} a_{i+1}^{-1}$ , Derecha:  $a_j^{-1} a_i^1 a_j^1 a_{i+1}^{-1}$

Utilizando la notación empleada en los párrafos anteriores se tiene:

**TEOREMA 2.1.** Sea un nudo  $(S^3, K)$  de modo que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) anteriores. Una presentación del grupo fundamental del nudo viene dada por

$$\langle a_1, \dots, a_n | r_1, \dots, \hat{r}_i, \dots, r_n \rangle$$

donde se puede eliminar una de las relaciones ya que cualquiera de ellas en consecuencia de las demás. La notación  $\hat{r}_i$  significa que la relación  $r_i$  se ha suprimido.

**DEMOSTRACIÓN.** Tomando la métrica cartesiana, ver el ejemplo 1.11 del capítulo 1, ponemos considerar un entorno

$$N = \{x \in \mathbb{R}^3 | \rho(x, K) < \frac{1}{3}\} .$$

Entonces  $\mathbb{R}^3 \setminus N$  es un retracto por deformación fuerte de  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  . En consecuencia  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus N) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$  . Así que calcularemos una presentación del grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus N)$  .

Consideremos los subconjuntos

$$X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus N | z > -1\}$$

$$X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus N | z < -1 + \frac{1}{3}\}$$

$$X_1 \cap X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus N | -1 < z < -1 + \frac{1}{3}\}$$

Se tiene que  $X_1$  tiene el tipo de homotopía del semiespacio con  $m$  túneles  $X'_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus N \mid z \geq -1 + \frac{1}{3}\}$  donde cada uno de sus  $m$  túneles tiene la forma representada en la Figura 11. Es decir que el grupo fundamental de  $X_1$  es el grupo libre generado por  $m$  elementos  $a_1, \dots, a_m$ . El lazo que genera el elemento  $a_j$  está asociado al arco  $A(p_j^-, p_{j+1}^-)$  de modo que se representa en la Figura 11.

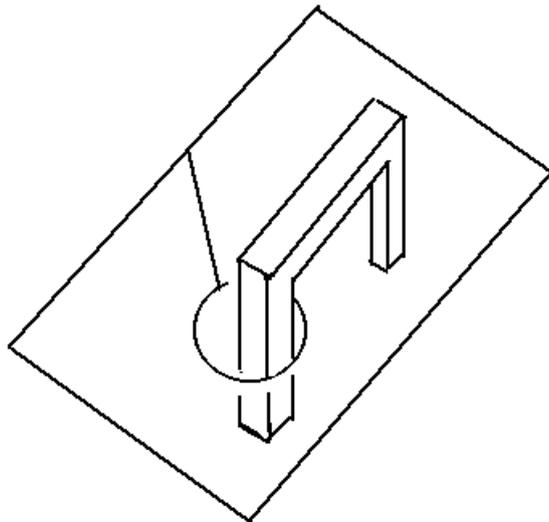


FIGURA 11. Generador  $a_j$  asociado al arco  $A(p_j^-, p_{j+1}^-)$

El subespacio  $X_2$  tiene el tipo de homotopía de  $X'_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus N \mid z \leq -1 - \frac{1}{3}\}$  que es un semiespacio, cuyo grupo fundamental es trivial.

El subespacio  $X_1 \cap X_2$  tiene el tipo de homotopía de un plano con  $m$  agujeros, que corresponden a los rectángulo determinados por los túneles, véase la Figura 10. Su grupo fundamental es el grupo libre con  $m$  generadores  $b_1, \dots, b_m$ . El homomorfismo inducido por la inclusión  $(\phi_1)_*: \pi_1(X_1 \cap X_2) \rightarrow \pi_1(X_1)$  verifica que  $(\phi_1)_*(b_i) = a_j^1 a_i^1 a_j^{-1} a_{i+1}^{-1}$  si corresponde al tipo de cruce de la izquierda, o,  $(\phi_1)_*(b_i) = a_j^{-1} a_i^1 a_j^1 a_{i+1}^{-1}$  si su tipo es el de la derecha.

El hecho de que una relación sea siempre una consecuencia de las demás, se debe a que un adecuado producto la relaciones anteriores (o sus inversas, o sus conjugadas) se puede representar por un lazo que contiene en su interior al diagrama del nudo.

□

**EJEMPLO 2.1.** El grupo del nudo trebol, que esta representado en la Figura 12, tiene la siguiente presentación de Wirtinger.

$$\langle x_1, x_2, x_3 \mid r_1, r_2, r_3 \rangle$$

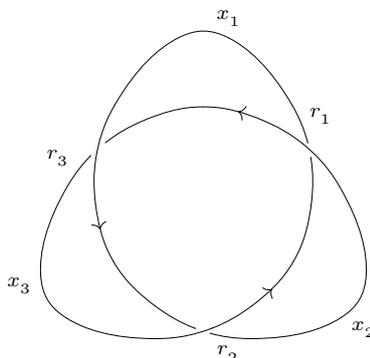


FIGURA 12. Nudo trébol

La primera relación  $r_1$  viene dada por

$$r_1 = x_2^{-1} x_3 x_2 x_1^{-1}$$

y corresponde al tipo de relación de la derecha de la Figura 10 . Las demás se obtienen del mismo modo

$$r_2 = x_3^{-1} x_1 x_3 x_2^{-1}$$

$$r_3 = x_1^{-1} x_2 x_1 x_3^{-1}$$

Notemos que:  $(x_3 r_2 x_3^{-1})(x_2 r_1 x_2^{-1})(x_1 r_3 x_1^{-1}) = 1$  . De esta igualdad se desprende que cualquiera de estas relaciones es consecuencia de las demás.

Consideremos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} & \langle x_1, x_2, x_3 | r_1, r_2, r_3 \rangle \\ & \equiv \langle x_1, x_2, x_3 | x_2^{-1} x_3 x_2 x_1^{-1}, x_3^{-1} x_1 x_3 x_2^{-1}, x_1^{-1} x_2 x_1 x_3^{-1} \rangle \\ & \equiv \langle x_1, x_2, x_3 | x_2^{-1} x_3 x_2 = x_1, x_3^{-1} x_1 x_3 = x_2, x_1^{-1} x_2 x_1 = x_3 \rangle \\ & \equiv \langle x_1, x_2 | x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 x_2 = x_1, x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_1 x_1^{-1} x_2 x_1 = x_2 \rangle \\ & \equiv \langle x_1, x_2 | x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 x_2 = x_1, x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 x_1 = x_2 \rangle \\ & \equiv \langle x_1, x_2 | x_2 x_1 x_2 = x_1 x_2 x_1, x_1 x_2 x_1 = x_2 x_1 x_2 \rangle \\ & \equiv \langle x_1, x_2 | x_2 x_1 x_2 = x_1 x_2 x_1 \rangle \end{aligned}$$

De este modo podemos considerar que la presentación del grupo fundamental del nudo trébol es la siguiente:

$$\langle x_1, x_2 | x_2 x_1 x_2 = x_1 x_2 x_1 \rangle$$

Consideremos el grupo simétrico  $S_3$  de orden 3, de modo que si primero aplicamos una permutación  $\sigma$  y después otra  $\tau$  denotamos a la composición por  $\sigma\tau$  . Es bien conocido que las transposiciones  $(ij)$  generan el grupo y que no es conmutativo. En efecto  $(12)(23) = (132) \neq (23)(12) = (123)$  .

Si definimos  $\varphi(x_2) = (13)$  y  $\varphi(x_1) = (23)$  se tiene que

$$\varphi(x_2 x_1 x_2) = (13)(23)(13) = (12) = (23)(13)(23) = \varphi(x_1 x_2 x_1) .$$

De este modo  $\varphi$  extiende a un epimorfismo del grupo fundamental del trébol en el grupo simétrico de orden tres que no es abeliano. Luego el grupo fundamental del trébol no es abeliano. Puesto que el grupo fundamental de nudo trivial es el cíclico infinito que sí que es abeliano, tenemos que el nudo trivial es distinto del nudo trébol.

### PROBLEMAS

2.1. Encontrar la presentación de Wirtinger del grupo fundamental del nudo de cinco hojas, que esta representado en la Figura 13.

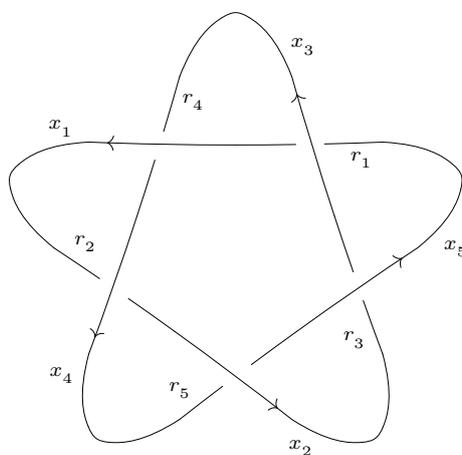


FIGURA 13. Nudo de cinco hojas

Solución: Este nudo tiene la siguiente presentación de Wirtinger.

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_3, x_5, x_5 | r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \rangle$$

La primera relación  $r_1$  viene dada por

$$r_1 = x_3 x_5 x_3^{-1} x_1^{-1}$$

y corresponde a tipo de relación de la izquierda de la Figura 10 . Las demás, que se obtienen del mismo modo, son las siguientes:

$$r_2 = x_4 x_1 x_4^{-1} x_2^{-1}$$

$$r_3 = x_5 x_2 x_5^{-1} x_3^{-1}$$

$$r_4 = x_1 x_3 x_1^{-1} x_4^{-1}$$

$$r_5 = x_2 x_4 x_2^{-1} x_5^{-1}$$

Una de estas relaciones es una consecuencia de las demás. Notemos que:  $r_1 r_4 r_2 r_5 r_3 = 1$  . De esta igualdad se desprende que cualquiera de ellas es consecuencia de las demás.

2.2. Encontrar la presentación de Wirtinger del grupo fundamental del nudos representados en la Figura 14, salvo las del primero y el tercero que ya han sido estudiadas.



FIGURA 14. Nudos primos con tres, cuatro, cinco y seis cruces dobles

2.3. Encontrar la presentación de Wirtinger del grupo fundamental del nudo primo representado en la Figura 7.

### 3. Nudos tóricos

Del mismo modo que la circunferencia  $S^1$  se puede tomar como el cociente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , el toro se puede tomar como el cociente  $T = S^1 \times S^1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Consideremos la aplicación  $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$E(\phi, \psi) = (2 \cos 2\pi\phi, 2 \operatorname{sen} 2\pi\phi, 0) + (\cos 2\pi\psi \cos 2\pi\phi, \cos 2\pi\psi \operatorname{sen} 2\pi\phi, \operatorname{sen} 2\pi\psi) =$$

$$= (2 \cos 2\pi\phi + \cos 2\pi\psi \cos 2\pi\phi, 2 \operatorname{sen} 2\pi\phi + \cos 2\pi\psi \operatorname{sen} 2\pi\phi, \operatorname{sen} 2\pi\psi)$$

Se tiene que  $E$  factoriza a través de dicho cociente para determinar una inyección continua  $\bar{E}$  de  $S^1 \times S^1$  en  $\mathbb{R}^3$ . Si ahora consideramos  $\alpha(t) = (n, m)t = (nt, mt)$ , donde  $(n, m)$  es una pareja de enteros primos entre sí, la composición  $E\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  factoriza a una inyección continua  $\bar{E}\alpha: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de modo que el diagrama siguiente es conmutativo:

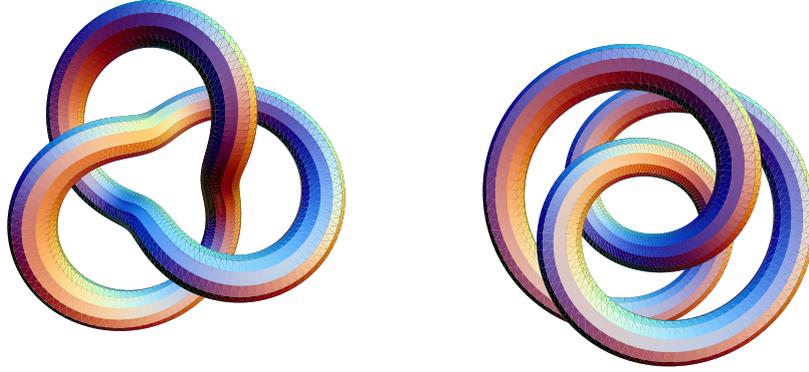
$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\bar{E}\alpha} & \mathbb{R}^3 \\ & \searrow \bar{E}\bar{\alpha} & \nearrow \text{in} \\ & \bar{E}(S^1 \times S^1) & \end{array}$$

donde  $\bar{\alpha}: S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  es la inducida por  $\alpha$  e in es la inclusión.

Llamaremos *nudo tórico de tipo*  $K(n, m)$  al inducido por la aplicación  $E\alpha(t) = (2 \cos 2\pi nt, 2 \operatorname{sen} 2\pi nt, 0) + (\cos 2\pi mt \cos 2\pi nt, \cos 2\pi mt \operatorname{sen} 2\pi nt, \operatorname{sen} 2\pi mt)$

Notemos que la aplicación  $\bar{\alpha}: S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  induce en los grupos fundamentales el homomorfismo  $(\bar{\alpha})_*: \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^1 \times S^1)$ , de modo que si denotamos  $\pi_1(S^1) \cong \langle c \rangle$ ,  $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \langle a, b | ab = ba \rangle$  se tiene que  $(\bar{\alpha})_*(c) = a^n b^m$ .

En la figura 15, hemos incluido los nudos  $K(2, 3)$  y  $K(3, 2)$ . Aunque parezcan nudos distintos se trata de dos representaciones distintas del nudo trébol.

FIGURA 15. Izquierda:  $K(2,3)$  . Derecha:  $K(3,2)$ 

TEOREMA 3.1. El grupo fundamental de un nudo tórico de tipo  $(n, m)$  admite la presentación siguiente

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K(n, m)) \cong \langle a, b | a^n = b^m \rangle$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $K$  la imagen de la circunferencia del nudo tórico  $K = K(n, m)$  y sea  $A$  la imagen de la aplicación periódica  $(2 \cos 2\pi nt, 2 \sin 2\pi nt, 0)$  que constituye el “ánima” del toro que contiene al nudo tórico. Tomando la distancia euclídeana, ver el ejemplo 1.11 del capítulo 1, podemos considerar un entorno suficientemente pequeño para que no tenga autointersecciones y además no corte al “ánima” del toro.  $N = \{x \in \mathbb{R}^3 | d(x, K) < \epsilon\}$ . Entonces  $\mathbb{R}^3 \setminus N$  es un retracto por deformación fuerte de  $\mathbb{R}^3 \setminus K$ . En consecuencia  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus N) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ . Así que calcularemos una presentación del grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus N)$ .

Consideremos los subconjuntos

$$X_1 = \{(u \in \mathbb{R}^3 \setminus N | d(u, A) < 1 + \frac{\epsilon}{2}\}$$

$$X_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 \setminus N | d(u, A) > 1 - \frac{\epsilon}{2}\}$$

$$X_1 \cap X_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 \setminus N | 1 - \frac{\epsilon}{2} < d(u, A) < 1 + \frac{\epsilon}{2}\}$$

Se tiene que  $X_1$  tiene el tipo de homotopía de un toro macizo. Es decir que el grupo fundamental de  $X_1$  es el grupo libre generado por un elemento  $a$ .

El subespacio  $X_2$  tiene el tipo de homotopía de otro toro macizo, cuyo grupo fundamental es libre y está generado por  $b$ .

El subespacio  $X_1 \cap X_2$  tiene el tipo de homotopía de una circunferencia. Su grupo fundamental es el grupo libre generado por  $c$ . El homomorfismo inducido por la inclusión  $(\phi_1)_* : \pi_1(X_1 \cap X_2) \rightarrow \pi_1(X_1)$

verifica que  $(\phi_1)_*(c) = a^n$  y el homomorfismo inducido por la otra inclusión  $(\phi_2)_*: \pi_1(X_1 \cap X_2) \rightarrow \pi_1(X_2)$  satisface que  $(\phi_2)_*(c) = b^m$ .

En consecuencia, una presentación del grupo fundamental fundamental del nudo tórico de tipo  $K(n, m)$  es la siguiente:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K(n, m)) \cong \langle a, b \mid a^n = b^m \rangle$$

□

Notemos que para un nudo tórico, podemos considerar la presentación anterior y también la de Wirtinger. Aplicando, el teorema de Tietze, se puede encontrar una sucesión finita de equivalencias de Tietze que transformen una presentación en otra.

**EJEMPLO 3.1.** Hemos visto que grupo del nudo trebol, que está representado en la Figura 12, tiene la siguiente presentación de Wirtinger:  $\langle x_1, x_2 \mid x_2 x_1 x_2 = x_1 x_2 x_1 \rangle$

Pero por otra parte, como se ve en la Figura 15, al ser también el nudo tórico  $K(3, 2)$  por el teorema anterior su grupo fundamental es isomorfo a

$$\langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle$$

Notemos que para  $a = x_1 x_2$  y  $b = x_1 x_2 x_1$  se tiene que

$$a^3 = x_1 x_2 x_1 x_2 x_1 x_2 = x_1 x_2 x_1 x_1 x_2 x_1 = b^2$$

Por lo que las presentaciones anteriores son equivalentes.

#### 4. Nudos primos y alternantes

En la teoría de números y estudio de polinomios, la existencia de una operación permite la definición de elementos primos como aquellos que no se pueden descomponer en factores más sencillos. La noción de primo es un concepto eficaz y con numerosas aplicaciones. Por otro lado, el encuentro de aspectos comunes en contextos diferentes, permite a veces transportar entre ellos algunas nociones y técnicas.

A continuación explicaremos como se puede construir la suma de dos nudos, esto nos permite definir el concepto de nudo primo, de manera que un nudo arbitrario esencialmente solo se puede descomponer como una suma de nudos primos.

Dados dos nudos, en los que las imágenes de las circunferencias están orientadas, se procede a colocarlos juntos (véase la Figura 17), después se suprime un pequeño arco en cada uno de ellos y finalmente se adjuntan dos nuevos arcos orientados de modo que determinen una orientación coherente en la suma con las que se disponía inicialmente (véase la Figura 18). La suma de nudos, también se conoce como composición y suma conexa de nudos.

La suma de nudos, es conmutativa, asociativa y el nudo trivial actúa como elemento neutro. Existen nudos que tienen la propiedad adicional de que si se descomponen como suma de otros dos, entonces uno de ellos es trivial y el otro es el propio nudo, éstos se llaman *nudos*

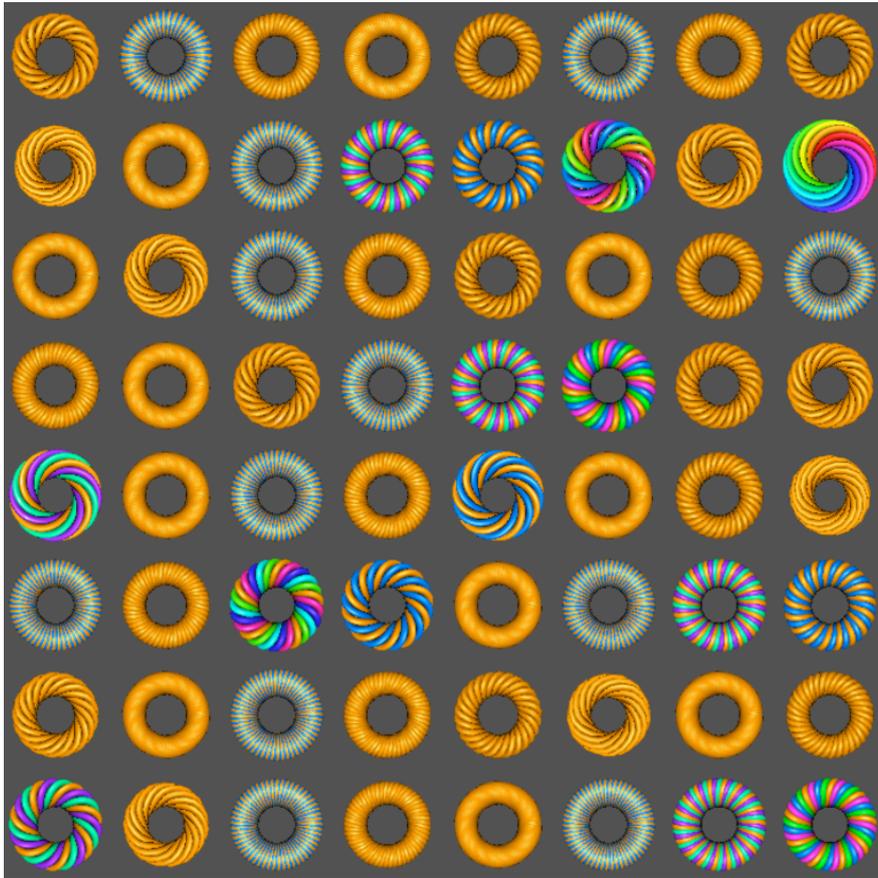


FIGURA 16. Algunos nudos y enlaces tóricos

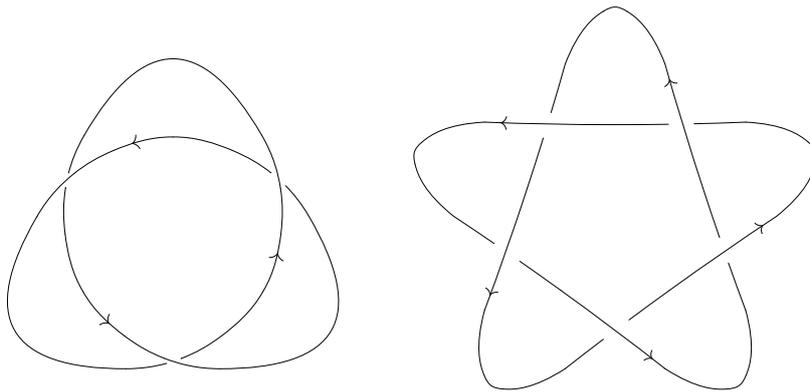


FIGURA 17. El nudo treból más el nudo de cinco hojas

*primos* En 1949, Schubert probó que todo nudo se puede descomponer esencialmente de modo único como suma de nudos primos. Esta es la razón por la cual las tablas de clasificación de nudos normalmente

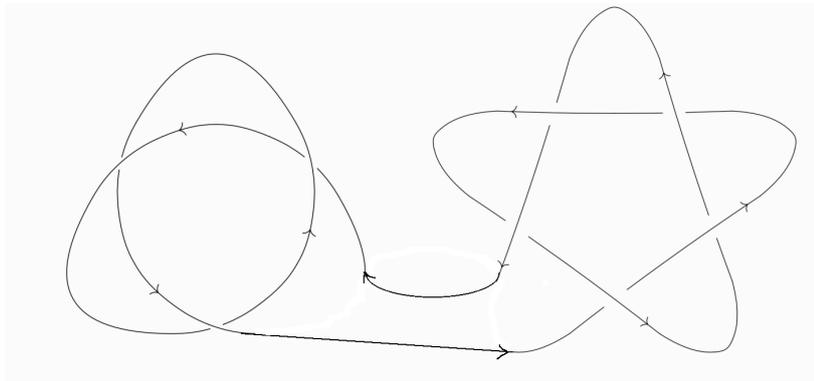


FIGURA 18. Suma de los nudos trébol y cinco hojas

únicamente contienen nudos primos. Atendiendo al número de cruces hemos adjuntado en la Figura 21 los nudos primos con menos de 9 cruces, de los 49 nudos primos de 9 cruces se incluyen 36 y también contiene en la parte inferior enlaces primos con menos de nueve cruces y con una dos o tres componentes.

Es frecuente utilizar algunas codificaciones para trabajar con diagramas de nudos y enlaces. Por ejemplo, el código de Gauss del diagrama un nudo o enlace  $L$  con  $n$  cruces se obtiene del modo siguiente: 1) Numera los cruces de  $L$  de 1 a  $n$  de modo arbitrario. 2) Ordena las componentes del enlaces de modo arbitrario. 3) Camina a lo largo de la primera componente tomando nota de los números de los cruces que van pasando. Si lo cruzas por encima, anota el número del cruce pero si lo pasas por debajo anota con signo menos el número del cruce. 4) Si quedan más componentes repite el proceso anterior.

Por ejemplo, en la Figura 12, para el trébol disponemos de tres vértices: 1, 2, 3. Su código de Gauss será  $(1, -3, 2, -1, 3, -2)$ . Si tomamos el nudo de la Figura 13, cuyo diagrama tiene cinco vértices, le podemos asociar el código de Gauss  $(-1, 4, -2, 5, -3, 1, -4, 2, -5, 3)$ .

Notemos que en el código de Gauss los vértices del diagrama aparecen dos veces, cada vez con un signo distinto. Observemos que en el dos los primeros ejemplos, los signos cambian alternativamente de positivo a negativo, pero ello no sucede en los diagrama de los nudos de la Figura 19.

Estos ejemplos facilitan la introducción de la siguiente noción. Un *nudo alternante* es aquél que tiene un diagrama de modo que si describimos una vuelta completa al mismo, se van alternando los pasos sobre el nivel con los pasos bajo el nivel. Equivalentemente, podemos decir que en el código de Gauss del diagrama los signos se van alternando.

Podemos resumir en la siguiente tabla el número de nudos alternantes y no alternantes en función del número de cruces.

Número de nudos primos alternantes y no alternantes												
Nº cruces	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
Alternantes	1	1	2	3	7	18	41	123	367	1288	4878	...
No alternantes	0	0	0	0	0	3	8	42	185	888	5110	...

Los tres nudos no alternantes de ocho cruces son  $8_{19}$ ,  $8_{20}$ ,  $8_{21}$  mostrados en la Figura 19

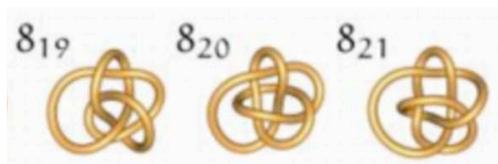


FIGURA 19. Nudos no alternantes

Es también frecuente el uso de la siguiente codificación de diagramas planos de nudos y enlaces basada en sucesiones de cruces bajo nivel. Pensemos en el diagrama plano como un grafo donde los cruces se pueden interpretar como vértices. De este modo la aristas o arcos quedan bien determinadas. Ahora se procede del siguiente modo: Elige una arista y una orientación de la imagen del nudo y describe una vuelta completa a nudo, numerando las aristas que vayas encontrando. Después describe una segunda vuelta y cada vez que encuentres un cruce bajo el nivel, asocia un símbolo de la forma  $X[i, j, k, l]$ , o bien  $X_{ijkl}$ , que significa que cuando pasas del arco  $i$  al  $k$  queda a la derecha el  $j$  y a la izquierda el  $l$ . Equivalentemente, que si estás en el arco  $i$  y antes del cruce bajo nivel y se toma la orientación contraria a las agujas del reloj, de modo consecutivo los arcos que inciden en el cruce son  $i, j, k, l$ . El nudo del Instituto Miller, que es la imagen en un espejo del nudo  $6_2$ , aparece en la Figura 20 y tiene el siguiente código:

$$PD[X[1, 9, 2, 8], X[3, 10, 4, 11], X[5, 3, 6, 2], \\ X[7, 1, 8, 12], X[9, 4, 10, 5], X[11, 7, 12, 6]] .$$

Donde  $X[1, 9, 2, 8]$  significa que cuando se pasa del tramo 1 al 2 se encuentran el tramo 9 a la derecha y 8 a la izquierda.

Numerando los vértices (cruces) del nudo anterior se obtiene:

$$V_1 \simeq X[1, 9, 2, 8], V_2 \simeq X[5, 3, 6, 2], V_3 \simeq X[3, 10, 4, 11],$$

$$V_4 \simeq X[9, 4, 10, 5], V_5 \simeq X[11, 7, 12, 6], V_6 \simeq X[7, 1, 8, 12]$$

El código de Gauss del nudo del Instituto Miller es el siguiente:

$$(-1, 2, -3, 4, -2, 5, -6, 1, -4, 3, -5, 6)$$

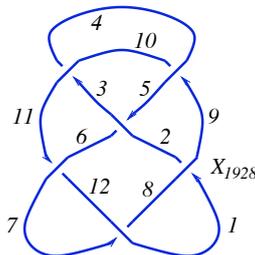


FIGURA 20. Sucesión de cruces

Otra notación que también se utiliza es la de Dowker. Para la imagen orientada de un nudo alternantes con  $n$  cruces, se procede del siguiente modo: Nos situamos en cualquier cruce y lo etiquetamos con el 1, después empezamos a avanzar siguiendo la rama que va por debajo hasta el siguiente cruce que etiquetamos con un dos, seguimos al mismo procedimiento hasta recorrer dos veces los  $n$  cruces. De este modo cada cruce tiene dos numeraciones, una impar y otra par. Podemos generar una fila con los números impares utilizados, y colocar debajo otra fila con los correspondientes pares. Por ejemplo, para el nudo de la Figura 20, podemos utilizar la numeración anterior que determina las dos filas siguientes:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & 11 \\ 8, & 10, & 2, & 12, & 4, & 6 \end{array}$$

Este procedimiento se puede extender para nudos no alternantes asignando valor positivo a los pares que si están en la rama superior de cruce y negativo si están en la rama inferior.

## 5. Superficie de Seifert de un nudo

Hemos estudiado superficies y también nudos y enlaces, nos podemos preguntar sobre las relaciones entre superficies y nudos. Uno de las relaciones más interesantes viene dado por el siguiente resultado que probó Seifert.

**TEOREMA 5.1.** Dado un nudo  $(\mathbb{R}^3, K)$ , existe una superficie conexa compacta y orientable  $S$  cuyo borde es precisamente  $K$ .

## 6. Software sobre nudos

Haremos una descripción de algunos programas sobre nudos y enlaces que se pueden obtener libremente en Internet. No se han realizado búsquedas intensivas, es por ello que pueden existir programas importantes que no hayan sido mencionados.

**6.1. Knot Theory.** Para la aplicación MATHEMATICA se puede utilizar el paquete “KnotTheory” de Dror Bar-Natan que se encuentra en la página web:

<http://www.math.toronto.edu/~drorbn/KAtlas/index.html>.

Con este paquete su autor ha producido la mayor parte del “Knot Atlas” anterior. El manual de este paquete se encuentra en

<http://www.math.toronto.edu/~drorbn/KAtlas/Manual/>

Este programa de Mathematica calcula los polinomios de Alexander-Conway, Jones, HOMFLY-PT, Kauffman, otros invariantes de tipo finito (Vassiliev) y la homología de Khovanov. Dibuja diagramas planos mediante el comando DrawPD, aunque la versión actual genera la imagen del nudo en un espejo. Incluye también una función TubePlot que dibuja un tubo del radio que se indique alrededor de la imagen del nudo. Los nudos tóricos de la Figura 15 han sido construidos con el programa anterior.

El paquete anterior suele utilizar la codificación basada en sucesiones de los cruces bajo nivel mencionada en la sección anterior.

**6.2. Knotscape.** “Knotscape” es una gran herramienta para calcular nudos que fue desarrollada por Jin Hoste y Morwen Thistlethwaite con Jeff Weeks

**6.3. KhoHo.** Es un programa para calcular y estudiar la homología de Khovanov. Ha sido realizado por Alexander Shumakovitch y puede descargarse, y redistribuirse libremente bajo el nombre de GPL v.2, de

<http://www.geometrie.ch/KhoHo> .

**6.4. Knot Plot.** La aplicación Knot Plot, cuyo responsable es Robert Scharein, es una aplicación con la cual se pueden obtener imágenes muy bonitas sobre nudos y enlaces. La aplicación se instala con facilidad y tiene numerosos ejemplos con nudos y enlaces muy espectaculares. Contiene el catálogo de nudos y enlaces del Apéndice C del libro de D. Rolfsen “Knots and Links” [31] y también una colección de nudos y enlaces tóricos. Para su instalación y diversas informaciones relacionadas con nudo y enlaces, se puede visitar su página web personal:

<http://www.cecm.sfu.ca/~scharein/>

También se puede acceder a un servidor de nudos y enlaces que provee información sobre cada nudo de la base de datos y además se pueden visualizar de forma “suave” o en versiones poligonales que pueden ser equiláteras.

**6.5. Knotlilus.** Una de las aplicaciones que se pueden utilizar a través de un interface html es el programa Knotlilus. Se introduce el código Gauss del nudo o se puede seleccionar un nudo de una base de datos que contiene los nudos alternantes primos cuyo número de cruces

mínimo es 22. El interface web y el programa que dibuja los nudos ha sido escrito por R. Furmaniak bajo la dirección de S. Rankin y O. Flint. El programa ha utilizado “Prime Alternating Knot Generator” (PAKG) para producir la base de datos hasta los 22 cruces. La versión actual ha sido escrita por Peter de Vries (2003) basada en una versión preliminar de J. Schermann in 1999. A esta aplicación se puede acceder desde la página web siguiente:

<http://srankin.math.uwo.ca/cgi-bin/retrieve.cgi/html/start.html>

PAKG genera nudos primos alternantes asociados a un determinado número de cruces, para ello aplica varios operadores a la colección completa de nudos primos alternantes asociados al anterior número de cruces.

Es interesante observar que en esta página para cada nudo existen imágenes de sus diagrama planos en distintos formatos (también xy-pic, que se puede utilizar para incluirlo en documentos elaborados con tex).

## 7. Algunas páginas web sobre nudos y enlaces

La siguiente página sugiere unos cuantos hiperenlaces relacionados con nudos y enlaces:

<http://www.maths.warwick.ac.uk/~bjs/MA3F2-page.html> Es un curso sobre teoría de nudos.

<http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/various/OtherLinks.html>

<http://www2.math.uic.edu/~kauffman/>

Las siguientes contienen información sobre curvatura total de nudos y enlaces:

<http://www.ma.utexas.edu/~og/curvature.html>,

<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/knot-curvature.html>,

<http://www.chem.utoronto.ca/~rkapral/Papers/knotsfn/node5.html>.

La siguiente contiene sucesiones importantes de enteros, en particular están sucesiones del siguiente tipo. Sucesión cuyo  $n$ -ésimo término es el número de nudos primos con  $n$  cruces.

<http://www.research.att.com/~njas/sequences/Seis.html>



FIGURA 21. Tabla de nudos y enlaces primos



## ESPACIOS RECUBRIDORES

La noción de aplicación recubridora (cubierta) se ha visto en la definición 1.3 del capítulo 3 .

En este capítulo clasificamos las aplicaciones recubridoras de algunos espacios en términos de su grupo fundamental. Incluimos los teoremas de clasificación para el caso más usual de espacios conexos por caminos, localmente conexos y semilocalmente simplemente conexos. Además de las versiones más clásicas basadas en la familia de subgrupos de grupo fundamental presentamos las versiones equivalentes en términos de representaciones del grupo fundamental.

En la última sección hemos abordado el caso en el que se elimina la condición de semilocalmente simplemente conexo. Hemos completado los resultados de Spanier [34] con nuevas versiones formuladas a través de representaciones continuas del grupo fundamental provisto de una adecuada topología.

### 1. Propiedades de elevación

Ya hemos visto algunas propiedades de elevación para caminos y homotopías. De estas propiedades se desprende que el grupo fundamental de la cubierta se puede considerar como un subgrupo del espacio recubierto. Más exactamente:

**PROPOSICIÓN 1.1.** Sea  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora y  $x \in X$  un punto base. Entonces  $p_*: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, p(x))$  es un homomorfismo inyectivo. El subgrupo  $p_*(\pi_1(X, x))$  está formado por aquellos elementos representados por lazos cuya elevación empezando en  $x$  es también un lazo.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $f: I \rightarrow X$  un lazo basado en  $x$  y supongamos que  $p_*[f] = 1$  , entonces existe una homotopía  $F: I \times I \rightarrow Y$  tal que  $F\partial_0 = pf$  ,  $F\partial_1 = e_{p(x)}$  ,  $F(0, t) = p(x)$  ,  $F(1, t) = p(x)$  para  $t \in I$  . Aplicando la propiedad de elevación de las homotopías, proposición 1.2 del capítulo 3, se obtiene una homotopía  $\tilde{F}: I \times I \rightarrow X$  tal que  $\tilde{F}\partial_0 = f$  . Puesto que  $(0 \times I) \cup (I \times 1) \cup (1 \times I)$  es conexo, y su imagen está contenida en  $p^{-1}p(x)$  ,  $\tilde{F}(0, 0) = x$  y  $\{x\}$  es una componente conexa de  $p^{-1}p(x)$  se tiene que  $\tilde{F}((0 \times I) \cup (I \times 1) \cup (1 \times I)) = \{x\}$  . Por lo tanto  $f \simeq_{\partial I} e_x$  , entonces  $[f] = 1$  . En consecuencia  $p_*$  es un monomorfismo.

Sea ahora un elemento  $a$  de  $p_*(\pi_1(X, x))$ , supongamos que  $a = [pf]$  donde  $f$  es un lazo de  $X$  basado en  $x$ . Si  $a = [g]$  donde  $g$  es un lazo de  $Y$  basado en  $p(x)$ . Entonces existe una homotopía  $G: I \times I \rightarrow Y$  tal que  $G\partial_0 = pf$ ,  $G\partial_1 = g$ ,  $G(0, t) = p(x)$ ,  $G(1, t) = p(x)$  para  $t \in I$ . Aplicando la propiedad de elevación de las homotopías, se obtiene una homotopía  $\tilde{G}: I \times I \rightarrow X$  tal que  $\tilde{G}\partial_0 = f$ . Puesto que  $0 \times I$  es conexo, su imagen está contenida en  $p^{-1}p(x)$ ,  $\tilde{G}(0, 0) = x$  y  $\{x\}$  es una componente conexa de  $p^{-1}p(x)$  se tiene que  $\tilde{G}(0 \times I) = \{x\}$ . Por lo tanto  $\tilde{G}\partial_1 = g^x$ . Teniendo en cuenta que  $1 \times I$  es conexo, su imagen está contenida en  $p^{-1}p(x)$ ,  $\tilde{G}(1, 0) = x$  y  $\{x\}$  es una componente conexa de  $p^{-1}p(x)$  se tiene que  $\tilde{G}(1 \times I) = \{x\}$ . Entonces  $g^x(1) = \tilde{G}(1, 1) = x$ . Luego  $g^x$  es un lazo.  $\square$

**PROPOSICIÓN 1.2.** Sea  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora. Si  $Y$  es localmente conexo, entonces  $X$  es localmente conexo. Si  $Y$  es localmente conexo por caminos, entonces  $X$  es localmente conexo por caminos.

**DEMOSTRACIÓN.** Recordemos que si  $z$  es un punto de un espacio topológico  $Z$  y  $W$  es un entorno abierto de  $z$ , entonces  $Z$  es localmente conexo (por caminos) en  $z$  si y sólo si  $W$  es localmente conexo (por caminos) en  $z$ .

Puesto que  $p$  es una aplicación recubridora, se tiene que  $p$  es un homeomorfismo local. Por lo tanto, dado  $x \in X$  existe un entorno abierto  $U$  tal que  $p(U)$  es un abierto de  $Y$  y además  $p|_U: U \rightarrow p(U)$  es un homeomorfismo. Si  $Y$  es localmente conexo (por caminos), se obtiene que  $p(U)$  es localmente conexo (por caminos). Luego  $U$  es localmente conexo por caminos. Por lo tanto  $X$  es localmente conexo (por caminos) en  $x$ , para cada  $x \in X$ . Entonces  $X$  es localmente conexo (por caminos).  $\square$

**PROPOSICIÓN 1.3.** Sea  $p: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  una aplicación recubridora y  $\phi: (Z, z) \rightarrow (Y, y)$  una aplicación continua. Supongamos que  $Z$  es conexo por caminos y localmente conexo. Entonces existe una elevación  $\tilde{\phi}: (Z, z) \rightarrow (X, x)$  si y sólo si  $\phi_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(X, x))$

**DEMOSTRACIÓN.** Si existe elevación, se tiene que  $p\tilde{\phi} = \phi$ , entonces  $\phi_*(\pi_1(Z, z)) = p_*\tilde{\phi}_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(X, x))$ .

Supongamos ahora que  $\phi_*(\pi_1(Z, z)) \subset p_*(\pi_1(X, x))$ . Sea ahora un punto  $z' \in Z$ , teniendo en cuenta que  $Z$  es conexo por caminos, existe un camino  $f$  en  $Z$  tal que  $f(0) = z$  y  $f(1) = z'$ . Definamos  $\tilde{\phi}: (Z, z) \rightarrow (X, x)$  por  $\tilde{\phi}(z') = (\phi f)^x(1)$ . Veamos que está bien definida. Sea  $g$  otro camino de  $z$  a  $z'$ , entonces tomemos  $(\phi\bar{g})^{(\phi f)^x(1)}$  la única elevación de  $\phi\bar{g}$  que empieza en  $(\phi f)^x(1)$ , recordemos que  $\bar{g}$  denota el camino opuesto al camino  $g$ . Entonces se tiene que  $p((\phi f)^x \cdot (\phi\bar{g})^{(\phi f)^x(1)}) = (p(\phi f)^x) \cdot (p(\phi\bar{g})^{(\phi f)^x(1)}) = (\phi f) \cdot (\phi\bar{g}) = \phi(f \cdot \bar{g})$ . Puesto que  $(\phi f)^x \cdot (\phi\bar{g})^{(\phi f)^x(1)}$  es la elevación de un lazo que representa un elemento de  $p_*(\pi_1(X, x))$ ,

aplicando proposición 1.1, se tiene que dicha elevación es también un lazo que termina en  $x$ . Entonces  $x = (\phi\bar{g})^{(\phi f)^x(1)}(1)$ . En consecuencia  $(\phi g)^x = \overline{(\phi\bar{g})^{(\phi f)^x(1)}}$ . Por lo tanto  $(\phi g)^x(1) = (\phi\bar{g})^{(\phi f)^x(1)}(0) = (\phi f)^x(1)$ . Es decir, la definición de  $\tilde{\phi}(z')$  no depende del camino elegido entre  $z$  y  $z'$ .

Veamos que  $\tilde{\phi}$  es continua en  $z'$ . Sea  $V$  un entorno abierto conexo de  $\phi(z')$  tal que  $p$  trivializa sobre  $V$ . Entonces sea  $U$  la única componente de  $p^{-1}(V)$  que contiene a  $\tilde{\phi}(z')$ . Puesto que  $\phi$  es continua existe un entorno conexo  $W$  de  $z'$  tal que  $\phi(W) \subset V$ . Por lo tanto,  $\tilde{\phi}(W) \subset p^{-1}(V)$ , y como  $\tilde{\phi}(z') \in U$ , se tiene que  $\tilde{\phi}(W) \subset U$ . Entonces  $p|_U \tilde{\phi}|_W = \phi|_W$ , por lo tanto  $\tilde{\phi}|_W = \phi|_W(p|_U)^{-1}$  es continua. Así que  $\tilde{\phi}$  es continua en cada  $z' \in Z$ . Consecuentemente  $\tilde{\phi}$  es continua. □

**PROPOSICIÓN 1.4.** Sea  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora y supongamos que una aplicación continua  $\phi: Z \rightarrow Y$  tiene dos elevaciones  $\phi_1, \phi_2: Z \rightarrow X$  que coinciden en un punto de  $Z$ . Entonces si  $Z$  es conexo, estas elevaciones coinciden en todo  $Z$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $A = \{z \in Z | \phi_1(z) = \phi_2(z)\}$ . Notemos que  $A$  es no vacío. Además si  $a \in A$  entonces existen  $U$  entorno abierto de  $\phi_1(a) = \phi_2(a)$  en  $X$  y  $W$  entorno abierto de  $a$  en  $Z$  tales que  $\phi_1(W) \subset U$ ,  $\phi_2(W) \subset U$  y  $p|_U$  es homeomorfismo. Entonces  $p|_U \phi_1|_W = \phi|_W = p|_U \phi_2|_W$ . Por lo tanto  $\phi_1|_W = \phi|_W(p|_U)^{-1} = \phi_2|_W$ . Luego  $W \subset A$ . Entonces  $A$  es un abierto no vacío de  $Z$ .

Sea  $B = \{z \in Z | \phi_1(z) \neq \phi_2(z)\}$ . Si  $b \in B$  entonces existen  $W$  entorno abierto de  $b$  en  $Z$ ,  $U_1, U_2$  abiertos de  $X$  y  $V$  abierto de  $Y$  tales que  $\phi_1(W) \subset U_1$ ,  $\phi_2(W) \subset U_2$ ,  $p(U_1) = p(U_2) = V$ ,  $p$  es trivial sobre  $V$  y  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Luego  $W \subset B$ . Entonces  $B$  es un abierto de  $Z$ ,  $A \cup B = Z$  y  $A \cap B = \emptyset$ . Aplicando que  $Z$  es conexo se obtiene que  $A = Z$ . Por lo tanto  $\phi_1 = \phi_2$ . □

## PROBLEMAS

1.1. Sea  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora con fibras finitas. Probar que  $X$  es Hausdorff si y sólo si  $Y$  es Hausdorff. Similarmente para la propiedad de compacidad.

1.2. Probar que  $p_n: S^1 \rightarrow S^1$  definidas por  $p_n(z) = z^n$  son aplicaciones recubridoras para  $n \neq 0$  entero. Estudiar bajo que condiciones la aplicación  $p_n$  tiene una elevación respecto la aplicación  $p_m$ .

1.3. Sea  $p_n: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  la aplicación definida por  $p_n(z) = z^n$ . Probar que  $p_n$  es una aplicación recubridora para  $n \neq 0$  entero.

1.4. Sea  $p_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la aplicación definida por  $p_n(z) = z^n$ . Determinar los enteros  $n$  para los que  $p_n$  es una aplicación recubridora.

1.5. Sea la aplicación exponencial  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Probar que  $\exp$  es una aplicación recubridora. Si  $U$  es un abierto simplemente conexo de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , probar que para cada entero  $k \geq 0$  existe una sección de  $\exp$  definida en  $U$  que es precisamente la rama  $k$ -ésima de la función logarítmica  $\text{Log}$ .

1.6. Probar que si  $f: \mathbb{R}P^2 \rightarrow S^1$  es continua y  $p: X \rightarrow S^1$  es una aplicación recubridora de  $S^1$ , entonces existe una elevación de  $f$ .

1.7. Se suele llamar circunferencia polaca  $\Sigma$  o a la formada por una parte de la gráfica de  $y = \text{sen}(1/x)$ , el segmento  $\{0\} \times [-1,1]$  y un arco conectando ambas piezas. Colapsando segmentos verticales se obtiene una aplicación  $f: \Sigma \rightarrow S^1$ . Probar que  $f$  no tiene una elevación para la aplicación recubridora  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ . Probar que la conexión local por caminos es una hipótesis necesaria en las condiciones que se dan para el criterio de elevación en la proposición 1.3.

1.8. Probar que si  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es continua, entonces existe  $x \in S^2$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .

1.9. Probar que en cada instante existen una pareja de puntos antípodas en la superficie de la tierra con la misma temperatura y presión atmosférica.

1.10. Probar que si dividimos una esfera en tres ‘regiones’, entonces al menos una de ellas contiene a dos puntos antípodas.

1.11. Probar que si un pastel tiene tres tipos de ingredientes lo podemos cortar con un cuchillo en dos trozos con la misma, digamos, nata, bizcocho y chocolate, en cada uno de ellos.

1.12. Sea  $G$  un grupo topológico, conexo por caminos y localmente conexo por caminos y  $p: (G', e') \rightarrow (G, e)$  una aplicación recubridora con  $G'$  espacio conexo por caminos. Probar que existe una única estructura de grupo en  $G'$  tal que  $e'$  sea elemento neutro y  $p$  homomorfismo.

1.13. Sea  $p_n: S^1 \rightarrow S^1$  la aplicación recubridora definida por  $p_n(z) = z^n$ ,  $n \neq 0$  entero. Teniendo en cuenta que  $S^1$  tiene estructura de grupo topológico, estudiar la estructura de grupo inducida en el espacio recubridor (problema anterior) y calcular  $\text{Ker}(p_n)$ .

1.14. Probar que un espacio recubridor de un grafo es un grafo.

## 2. Acción del grupo fundamental de la base en la fibra

En esta sección se analiza una construcción que asocia a cada aplicación recubridora de un espacio  $Y$ , que tenga buenas condiciones de conectividad local, un  $\pi$ -conjunto, donde  $\pi$  es el grupo fundamental de  $Y$  (grupoide en el caso no conexo). En consecuencia aquellos problemas, que se puedan formular mediante objetos y morfismos y que sean invariantes por isomorfismos, es suficiente resolverlos en uno de los dos

contextos. El uso de  $\pi$ -conjuntos a derecha puede sustituirse por el de  $\pi$ -conjuntos a izquierda ya que ello depende de los convenios notaciones que se hayan establecido. Empezaremos la sección con la definición de  $\pi$ -conjunto a derecha y la correspondiente noción de morfismo.

Dado un conjunto  $F$  y un grupo  $\pi$ , una estructura sobre  $F$  de  $\pi$ -conjunto a derecha consiste en una acción a derecha de  $\pi$  sobre  $F$ ; es decir, una aplicación  $\theta: F \times \pi \rightarrow F$ ,  $(x, g) \rightarrow x \cdot g$ , que verifica,  $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$ ,  $x \cdot 1 = x$ , donde  $x \in F$ ,  $g, h \in \pi$ . Equivalentemente, esta estructura viene determinada por el antihomomorfismo  $\bar{\theta}: \pi \rightarrow \text{Aut}(F)$ , definido por  $\bar{\theta}(g)(x) = \theta(x, g) = x \cdot g$ , donde  $\text{Aut}(F)$  denota el grupo de las biyecciones (permutaciones) de  $F$  en  $F$ . Un morfismo de  $\pi$ -conjuntos a derecha es una aplicación  $\varphi: F \rightarrow F'$  tal que  $\varphi(x \cdot g) = \varphi(x) \cdot g$  para  $x \in F$  y  $g \in \pi$ . Equivalentemente que para cada  $g \in \pi$  se verifique que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\bar{\theta}(g)} & F \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ F' & \xrightarrow{\bar{\theta}'(g)} & F' \end{array}$$

sea conmutativo. Si además  $\varphi$  es una biyección diremos que  $\varphi$  es un isomorfismo de  $\pi$ -conjuntos a derecha. Denotaremos por  $\text{Aut}_\pi(F)$  el grupo de los isomorfismos de  $\pi$ -conjuntos de  $F$  en  $F$ .

Sea  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora y tomemos un punto base  $y \in Y$ , entonces podemos definir la siguiente acción a derecha del grupo fundamental  $\pi_1(Y, y)$  en  $p^{-1}(y)$ :

$$p^{-1}(y) \times \pi_1(Y, y) \rightarrow p^{-1}(y), \quad x \cdot [f] = f^x(1),$$

donde  $f$  es un lazo basado en  $y$  y  $x \in p^{-1}(y)$ . Es fácil observar que efectivamente es una acción a derecha y diremos que  $p^{-1}(y)$  es un  $\pi = \pi_1(Y, y)$ -conjunto a derecha asociado a la aplicación recubridora  $p$ .

Sean ahora  $p: X \rightarrow Y$  y  $p': X' \rightarrow Y$  dos aplicaciones recubridoras y  $\phi: X \rightarrow X'$  una aplicación continua sobre  $Y$ ; es decir, verifica  $p'\phi = p$ . Una aplicación del tipo anterior diremos también que es una transformación recubridora. Veamos que  $\phi|_{p^{-1}(y)}: p^{-1}(y) \rightarrow p'^{-1}(y)$  es un morfismo de  $\pi = \pi_1(Y, y)$ -conjuntos a derecha. En efecto, si  $x \in p^{-1}(y)$ ,  $\phi|_{p^{-1}(y)}(x \cdot [f]) = \phi(f^x(1)) = (\phi f^x)(1) = f^{\phi(x)}(1) = \phi(x) \cdot [f] = \phi|_{p^{-1}(y)}(x) \cdot [f]$ .

La construcción anterior asocia a cada aplicación recubridora sobre  $Y$  un  $\pi$ -conjunto a derecha y a cada morfismo recubridor un morfismo de  $\pi$ -conjuntos a derecha. Además se verifica que

$$\text{id}_X |_{p^{-1}(y)} = \text{id}_{p^{-1}(y)}$$

para una aplicación recubridora  $p: X \rightarrow Y$ , además si  $p: X \rightarrow Y$ ,  $p': X' \rightarrow Y$  y  $p'': X'' \rightarrow Y$  son aplicaciones recubridoras y  $\phi: X \rightarrow X'$ ,

$\phi': X' \rightarrow X''$  son aplicaciones continuas sobre  $Y$ , entonces

$$\phi' \phi|_{p^{-1}(y)} = \phi'|_{p'^{-1}(y)} \phi|_{p^{-1}(y)}$$

de donde se concluye que esta construcción es un funtor de la categoría de aplicaciones recubridoras sobre  $Y$  en la categoría de los  $\pi$ -conjuntos a derecha con  $\pi$  el grupo fundamental de  $Y$ .

**OBSERVACIÓN 2.1.** Es interesante notar que si el espacio  $Y$  es conexo por caminos, si en vez de tomar un punto base  $y$  se toma otro  $y'$ , entonces los  $\pi$ -conjuntos asociados  $p^{-1}(y)$ ,  $p^{-1}(y')$  son isomorfos. La construcción anterior tendrá su mayor utilidad para el caso que el espacio  $Y$  sea conexo por caminos. En casos más generales se puede proceder o bien a tomar un punto base en cada componente conexa y construir varios  $\pi$ -conjuntos o arternativamente y de manera más efectiva, se puede considerar el grupoide fundamental y acciones de grupoidees en conjuntos.

**DEFINICIÓN 2.1.** Sea  $F$  un  $\pi$ -conjunto a derecha, dado  $x \in F$  se llama *sugbrupo de isotropía* de  $x$  a el subgrupo  $\pi_x = \{g \in \pi | x \cdot g = x\}$ .

**PROPOSICIÓN 2.1.** Sea  $Y$  un espacio y  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora. Para cada  $x \in p^{-1}(y)$ ,  $y \in Y$ , se tiene que el subgrupo de isotropía de  $x$  es precisamente  $p_*(\pi_1(X, x))$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $a \in \pi_1(Y, p(x))$  y supongamos que  $a = [f]$ . Entonces aplicando la proposición 1.1 se tiene que  $a$  está en  $p_*(\pi_1(X, x))$  si y sólo si  $x = f^x(1) = x \cdot a$  es decir si y sólo si  $a$  está en el grupo de isotropía de  $x$ .  $\square$

**DEFINICIÓN 2.2.** Sea  $F$  un  $\pi$ -conjunto a derecha, dados  $x, x' \in F$  diremos que están en la misma *órbita* si existe  $g \in \pi$  tal que  $x' = x \cdot g$ . Nótese que esta relación es de equivalencia de modo que  $F$  se puede poner como suma disjunta de sus órbitas. Un  $\pi$ -conjunto a derecha se dice *transitivo* si tiene una sola órbita. Si  $A \subset F$ , diremos que  $F$  es transitivo en  $A$  si para cada  $x, x' \in A$  existe un  $g \in \pi$  tal que  $x' = x \cdot g$ . Equivalentemente, diremos que  $\theta: \pi \rightarrow \text{Aut}(F)$  es una *representación transitiva* si dados  $x, y \in F$  existe  $g \in G$  tal que  $\theta(g)(x) = y$ .

**PROPOSICIÓN 2.2.** Sea  $F$  un  $\pi$ -conjunto a derecha y supongamos que  $x, x' \in F$  están en la misma órbita; es decir, existe  $g \in \pi$  tal que  $x' = x \cdot g$ . Entonces si el grupo de isotropía de  $x$  es  $H$ , se tiene que el grupo de isotropía de  $x'$  es  $g^{-1}Hg$ . Además los grupos de isotropía de los elementos de la órbita de  $x$  son exactamente los subgrupos conjugados de  $H$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Notemos que  $a$  está en el grupo de isotropía de  $x'$  si y sólo si  $x' \cdot a = x'$  si y sólo si  $(x \cdot g) \cdot a = x \cdot g$  si y sólo si  $gag^{-1} \in H$  si y sólo si  $a \in g^{-1}Hg$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.3.** Sea  $Y$  un espacio basado, conexo por caminos y localmente conexo por caminos y sea  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora. Sean  $\{X_\alpha | \alpha \in A\}$  las componentes conexas por caminos de  $X$  y  $p_\alpha$  la restricción de  $p$  a  $X_\alpha$ . Entonces cada  $p_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y$  es una aplicación recubridora. Además cada componente por caminos corta a la fibra  $p^{-1}(y)$  donde  $y$  es el punto base de  $Y$  y si  $x, x' \in p^{-1}(y)$  se tiene que  $x$  y  $x'$  están en la misma componente conexa por caminos si y sólo si  $x$  y  $x'$  están en la misma órbita.

**DEMOSTRACIÓN.** Podemos suponer que  $p$  trivializa sobre un cubrimiento cuyos miembros  $V$  son abiertos y conexos. Si  $p^{-1}V = \sqcup_{i \in I(V)} U_i$  se tiene que cada  $U_i$  es conexo por caminos. Notemos que  $p_\alpha^{-1}V = X_\alpha \cap p^{-1}V = X_\alpha \cap \sqcup_{i \in I(V)} U_i = \sqcup_{i \in I_\alpha(V)} X_\alpha \cap U_i = \sqcup_{i \in I_\alpha(V)} U_i$ , donde  $I_\alpha(V) = \{i \in I(V) | X_\alpha \cap U_i \neq \emptyset\}$ . Por lo tanto  $p_\alpha$  es también una aplicación recubridora.

Sea  $x_0 \in X_\alpha$ . Puesto que  $Y$  es conexo por caminos, existe un camino  $g$  en  $Y$  de  $p(x_0)$  a  $y$ . Entonces el camino  $g^{x_0}$  está contenido en  $X_\alpha$  y  $g^{x_0}(1)$  está en la fibra de  $y$ . Si  $x, x'$  punto de la misma fibra están en la misma componente, existe un camino  $f$  tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = x'$ . Entonces si  $a = [pf] \in \pi_1(Y, y)$  se tiene que  $x \cdot a = (pf)^x(1) = f(1) = x'$ . Luego  $x, x'$  están en la misma órbita. Recíprocamente si  $x' = x \cdot a$  con  $a = [g]$  entonces  $g^x$  es un camino tal que  $g^x(0) = x$  y  $g^x(1) = x'$ . Por lo tanto están en la misma componente por caminos.  $\square$

**COROLARIO 2.1.** Sea  $Y$  un espacio basado, conexo por caminos y localmente conexo por caminos y sea  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora. Entonces  $X$  es conexo por caminos si y sólo si  $p^{-1}(y)$  es transitivo. Además si  $X$  es conexo por caminos los subgrupos  $\{p_*(\pi_1(X, x)) | x \in p^{-1}(y)\}$  forman una clase de conjugación completa.

**DEMOSTRACIÓN.** Como consecuencia de la proposición anterior, el número de componentes conexas de  $X$  está en correspondencia biunívoca con el conjunto de órbitas de  $p^{-1}(y)$ . Entonces  $X$  es conexo por caminos si y sólo si  $p^{-1}(y)$  tiene una órbita; es decir, si y sólo si  $p^{-1}(y)$  es transitivo.

Por otra parte la familia de subgrupos  $\{p_*(\pi_1(X, x)) | x \in p^{-1}(y)\}$  según se desprende de la proposición 2.1 son los grupos de isotropía de los elementos de una órbita que, como consecuencia de la proposición 2.2, efectivamente forman una clase de conjugación completa  $\square$

**TEOREMA 2.1.** Sea  $Y$  un espacio basado, conexo por caminos y localmente conexo por caminos y sean  $p: X \rightarrow Y$ ,  $p': X' \rightarrow Y$  aplicaciones recubridoras. Entonces la correspondencia que asocia a cada morfismo recubridor  $\phi: X \rightarrow X'$  el morfismo de  $\pi$ -conjuntos a derecha  $\phi|_{p^{-1}(y)}: p^{-1}(y) \rightarrow p'^{-1}(y)$  es una biyección.

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $\phi, \phi': X \rightarrow X'$  dos morfismos recubridores tales que  $\phi|_{p^{-1}(y)} = \phi'|_{p^{-1}(y)}$ . Sea  $X_\alpha$  una componente conexa por

caminos de  $X$ . Entonces por la proposición 2.3, existe un punto  $x_\alpha \in X_\alpha \cap p^{-1}(y)$ . Por lo tanto  $\phi_\alpha = \phi|_{X_\alpha}$ ,  $\phi'_\alpha = \phi'|_{X_\alpha}$  son elevaciones de  $p_\alpha = p|_{X_\alpha}$  que coinciden en el punto  $x_\alpha$ . Aplicando la proposición 1.4 se tiene que  $\phi_\alpha = \phi'_\alpha$  y esto sucede para cada componente conexa por caminos. Entonces  $\phi = \phi'$ .

Sea ahora una morfismo de  $\pi$ -conjuntos a derecha  $\theta: p^{-1}(y) \rightarrow p'^{-1}(y)$ . Entonces si  $X_\alpha$  es una componente conexa por caminos y  $x_\alpha \in X_\alpha \cap p^{-1}(y)$ , se tiene que el grupo de isotropía de  $x_\alpha$  está contenido en el de  $\theta(x_\alpha)$ ; es decir,  $(p_\alpha)_*(\pi_1(X_\alpha, x_\alpha)) = p_*(\pi_1(X, x_\alpha)) \subset p'_*(\pi_1(X', \theta(x_\alpha)))$ . Aplicando proposición 1.3 se tiene que existe una aplicación continua  $\phi_\alpha: X_\alpha \rightarrow X'$  tal que  $p'\phi_\alpha = p_\alpha$  y  $\phi_\alpha(x_\alpha) = \theta(x_\alpha)$ . Puesto que  $\phi_\alpha|_{X_\alpha \cap p^{-1}(y)}$  y  $\theta|_{X_\alpha \cap p^{-1}(y)}$  son morfismos de  $\pi$ -conjuntos, el  $\pi$ -conjunto inicial es transitivo y ambos morfismos coinciden en un punto, entonces son iguales. Tomando ahora la suma disjunta de elevaciones  $\phi = \Sigma \phi_\alpha$  se tiene que  $\phi$  es un morfismo recubridor tal que  $\phi|_{p^{-1}(y)} = \theta$ . □

**DEFINICIÓN 2.3.** Sea  $H$  un subgrupo de  $G$ . Se llama *normalizador* de  $H$  en  $G$  al subgrupo  $N(H) = \{g \in G | gH = Hg\}$ . Nótese que  $H$  es un subgrupo normal si y sólo si su normalizador es  $G$ .

**PROPOSICIÓN 2.4.** Sea  $F$  un  $\pi$ -conjunto a derecha transitivo,  $x \in F$  y  $\pi_x$  su grupo de isotropía. Para cada  $h \in N(\pi_x)$  la aplicación  $\hat{h}: F \rightarrow F$  definida por  $\hat{h}(x \cdot g) = (x \cdot h) \cdot g$  está bien definida y es un morfismo de  $\pi$ -conjuntos a derecha. Además la aplicación inducida  $N(\pi_x)/\pi_x \rightarrow \text{Aut}_\pi(F)$ ,  $[h] \rightarrow \hat{h}$  es un isomorfismo.

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $x \cdot g = x \cdot g'$ , entonces  $g'g^{-1} \in \pi_x$ . Puesto que  $h \in N(\pi_x)$  se sigue que  $hg'g^{-1}h^{-1} \in \pi_x$ . En consecuencia,  $x \cdot (hg'g^{-1}h^{-1}) = x$ , o equivalentemente  $(x \cdot h) \cdot g' = (x \cdot h) \cdot g$ . Por lo tanto  $\hat{h}$  no depende del elemento  $g$  elegido y está bien definida. Por otra parte se tiene que  $\hat{h}((x \cdot g_0) \cdot g_1) = \hat{h}(x \cdot (g_0g_1)) = (x \cdot h) \cdot (g_0g_1) = ((x \cdot h) \cdot g_0) \cdot g_1 = \hat{h}(x \cdot g_0) \cdot g_1$ . Por lo tanto se tiene que  $\hat{h}$  es un morfismo de  $\pi$ -conjuntos.

Si  $h, h' \in N(\pi_x)$ , entonces  $\widehat{hh'}(x \cdot g) = (x \cdot (hh')) \cdot g = (x \cdot h) \cdot h'g = \hat{h}((x \cdot h') \cdot g) = \hat{h}(\hat{h}'(x \cdot g)) = \hat{h}\hat{h}'(x \cdot g)$ . Por lo tanto la aplicación inducida  $N(\pi_x) \rightarrow \text{Aut}_\pi(F)$  es un homomorfismo. Notemos que  $\hat{h}(x \cdot g) = x \cdot g$  para todo  $g$  si y sólo si  $(x \cdot h) \cdot g = x \cdot g$  si y sólo si  $x \cdot h = x$  si y sólo si  $h \in \pi_x$ . Por lo tanto queda inducido un monomorfismo  $N(\pi_x)/\pi_x \rightarrow \text{Aut}_\pi(F)$ . Por otro lado si  $\theta: F \rightarrow F$  es un morfismo de  $\pi$ -conjuntos a derecha se tiene que por ser  $F$  transitivo existe  $h \in \pi$  tal que  $x \cdot h = \theta(x)$ . Entonces  $\theta(x \cdot g) = \theta(x) \cdot g = (x \cdot h) \cdot g = \hat{h}(x \cdot g)$ . Así que  $\theta = \hat{h}$  y se obtiene que  $N(\pi_x)/\pi_x \rightarrow \text{Aut}_\pi(F)$  es un isomorfismo. □

**COROLARIO 2.2.** Sea  $Y$  un espacio basado, conexo por caminos y localmente conexo por caminos y sea  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora con  $X$  conexo por caminos. Entonces el grupo de transformaciones recubridoras de  $p: X \rightarrow Y$  es isomorfo a  $N(p_*(\pi_1(X, x)))/p_*(\pi_1(X, x))$ .

Notemos que si  $F$  es un  $\pi$ -conjunto a derecha, también se le puede dar estructura de  $\text{Aut}_\pi(F)$ -conjunto a izquierda a través de la acción  $\text{Aut}_\pi(F) \times F \rightarrow F$  que aplica  $(\theta, x)$  en  $\theta(x)$ , donde  $\theta$  es un isomorfismo de  $\pi$ -conjuntos y  $x$  un elemento de  $F$ .

De modo similar, si tenemos una aplicación recubridora  $p: X \rightarrow Y$  en  $X$  queda inducida de modo natural una acción a izquierda de  $\text{Aut}(p: X \rightarrow Y)$  que aplica  $(\varphi, x)$  en  $\varphi(x)$ , donde  $\varphi$  es una transformación recubridora y  $x$  un elemento de  $X$ .

**DEFINICIÓN 2.4.** Un  $\pi$ -conjunto a derecha transitivo  $F$  se dice que es *normal (regular)* si la acción a izquierda de  $\text{Aut}_\pi(F)$  en  $F$  es transitiva. Sea una aplicación recubridora  $p: X \rightarrow Y$  con  $X$  conexo por caminos, diremos que es *normal (regular)* si la acción a izquierda de  $\text{Aut}(p: X \rightarrow Y)$  en  $X$  es transitiva en cada fibra.

**COROLARIO 2.3.** Sea  $Y$  un espacio basado, conexo por caminos y localmente conexo por caminos y sea  $p: X \rightarrow Y$  una aplicación recubridora con  $X$  conexo por caminos. Entonces  $p$  es normal si y sólo si  $p^{-1}(y)$  es normal si y sólo si para  $x \in p^{-1}(y)$  se tiene que  $p_*(\pi_1(X, x))$  es un subgrupo normal de  $\pi_1(Y, p(x))$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Por el corolario 2.1 se tiene que  $p^{-1}(y)$  es transitivo. Por el teorema 2.1 se tiene que  $\text{Aut}(p: X \rightarrow Y)$  es isomorfo a  $\text{Aut}_\pi(F)$ , donde  $F = p^{-1}(y)$  es el  $\pi$ -conjunto asociado. Supongamos que la acción a izquierda de  $\text{Aut}(p: X \rightarrow Y)$  en cada fibra es transitiva, entonces la acción de  $\text{Aut}_\pi(F)$  en  $F$  es transitiva. Recíprocamente, si  $x', z' \in p^{-1}(y')$  entonces tomemos un camino  $f$  en  $Y$  de  $y$  a  $y'$ . Sean  $f^x, f^z$  las únicas elevaciones tales que  $f^x(0) = x$ ,  $f^x(1) = x'$  y  $f^z(0) = z$ ,  $f^z(1) = z'$ . Puesto que la acción de  $\text{Aut}_\pi(F)$  en  $F$  es transitiva se tiene que existe  $\phi \in \text{Aut}(p: X \rightarrow Y)$  tal que  $\phi(x) = z$ . Entonces  $\phi(x') = \phi(f^x(1)) = (\phi f^x)(1) = f^z(1) = z'$ . Por lo tanto la acción de  $\text{Aut}(p: X \rightarrow Y)$  en cada fibra es transitiva.

Teniendo en cuenta que  $p^{-1}(y)$  es transitivo, aplicando el corolario 2.1 se obtiene que los subgrupos  $\{p_*(\pi_1(X, x)) | x \in p^{-1}(y)\}$  forman una clase de conjugación completa. Por otro lado, puesto que la acción de  $\text{Aut}_\pi(F)$  en  $F$  es transitiva, se tiene que dos puntos distintos tienen los mismos grupos de isotropía. Por lo tanto, cada subgrupo  $p_*(\pi_1(X, x))$  es normal en  $\pi_1(Y, p(x))$ . Recíprocamente, si éste subgrupo es normal, como consecuencia del corolario 2.2 se tiene que  $\text{Aut}(p: X \rightarrow Y)$  es isomorfo a  $\pi_1(Y, p(x))/p_*(\pi_1(X, x))$ . Dados dos elementos  $x, x' \in F$ , teniendo en cuenta que  $F$  es transitivo, existe  $h \in \pi_1(Y, y)$  tal que  $x \cdot h = x'$ . Ahora por el modo como se define el isomorfismo anterior

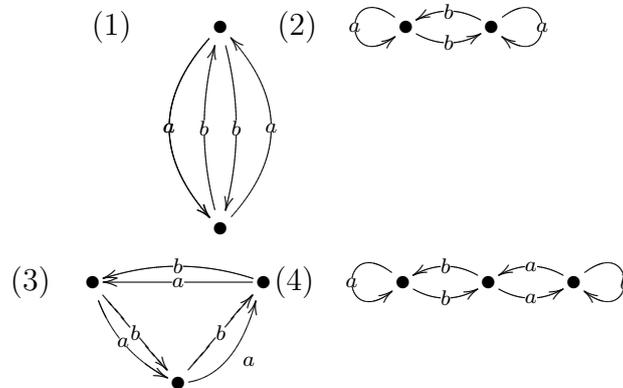
se sigue que para  $\hat{h} \in \text{Aut}(p: X \rightarrow Y)$  se tiene que  $\hat{h}(x) = x'$ . Por lo tanto  $F$  es normal. □

*PROBLEMAS*

2.1. Sea  $\tilde{X}$  un grafo con 1-celdas orientadas de tipo a y de tipo b de tal modo que en cada vértice llegan y salen una 1-celda orientada de tipo a y otra de tipo b. Sea  $X = S_a^1 \vee S_b^1$  y consideremos la aplicación que aplica todos los vértices de  $\tilde{X}$  en el único vértice de  $X$  y cada 1-celda orientada de tipo a sobre la 1-celda orientada de  $S_a^1$  y las de tipo b sobre la de  $S_b^1$ . Probar que  $p$  es una aplicación recubridora y que todo recubridor conexo de  $X$  es del tipo anterior.

Para cada uno de los siguientes grafos recubridores

- a) Calcular los subgrupos  $p_*\pi_1(\tilde{X}, v)$ , donde  $v$  es un vértice de  $\tilde{X}$ ,
- b) Describir la estructura de  $\pi$ -conjunto del conjunto de los vértices de  $\tilde{X}$ .



2.2. Sea  $X$  el subespacio de  $\mathbb{R}^2$  formado por las circunferencias tangentes al eje  $OX$  de centro  $(0, 1/n)$  y de radio  $1/n$ , donde  $n$  es un entero positivo. Probar que si  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es una aplicación recubridora entonces  $\tilde{X}$  no es simplemente conexo.

2.3. Determinar el grupo de transformaciones de la cubierta universal de un espacio conexo, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo.

2.4. Determinar el grupo de transformaciones de las aplicaciones recubridoras de los problemas 1.2, 1.3.

### 3. Clasificación de las aplicaciones recubridoras

En primer lugar veamos que los  $\pi$ -conjuntos a derecha transitivos salvo isomorfismo son isomorfos a  $\pi$ -conjuntos de clases a derecha asociadas a un subgrupo del grupo  $\pi$ .

**PROPOSICIÓN 3.1.** Sea  $F$  un  $\pi$ -conjunto a derecha transitivo,  $x \in F$  y  $\pi_x$  su grupo de isotropía. Consideremos el  $\pi$ -conjunto a derecha  $\pi_x \backslash \pi = \{\pi_x g | g \in \pi\}$ , donde la acción se define por  $\pi_x g \cdot h = \pi_x gh$ . Entonces la aplicación  $\Phi: \pi_x \backslash \pi \rightarrow F$  definida por  $\Phi(\pi_x g) = x \cdot g$  es un isomorfismo de  $\pi$ -conjuntos.

**DEMOSTRACIÓN.** En efecto del hecho que  $F$  sea transitivo se deduce que  $\Phi$  es exhaustiva. Supongamos ahora que  $\Phi(\pi_x g) = x \cdot g = x \cdot g' = \Phi(\pi_x g')$ . Entonces,  $g'g^{-1} \in \pi_x$ . Por lo tanto  $\pi_x g = \pi_x g'$ .  $\square$

**COROLARIO 3.1.** Sean  $F, F'$   $\pi$ -conjuntos a derecha transitivos y supongamos que  $x \in F$  y  $x' \in F'$ . Entonces  $F$  es isomorfo a  $F'$  si y sólo si  $\pi_x$  y  $\pi_{x'}$  son subgrupos conjugados.

**DEMOSTRACIÓN.** Si existe un isomorfismo  $\theta: F \rightarrow F'$  de  $\pi$ -conjuntos a derecha, entonces el grupo de isotropía  $\pi_x$  es el grupo de isotropía  $\pi_{\theta(x)}$ . Utilizando que  $F'$  es transitivo aplicando la proposición 2.2 se obtiene que  $\pi_x$  es conjugado de  $\pi_{x'}$ .

Supongamos ahora que  $\pi_x$  es conjugado de  $\pi_{x'}$ ; es decir, existe  $h \in \pi$  tal que  $\pi_x = h\pi_{x'}h^{-1}$ . Aplicando la proposición anterior 3.1 se infiere que  $F$  es isomorfo a  $\pi_x \backslash \pi$  y  $F'$  es isomorfo a  $\pi_{x'} \backslash \pi$ . Consideremos la aplicación  $\theta: \pi_x \backslash \pi \rightarrow \pi_{x'} \backslash \pi$  dada por  $\theta(\pi_x g) = \pi_{x'} hg$ . Veamos que está bien definida si  $\pi_x g = \pi_x g'$  entonces  $g'g^{-1} \in \pi_x$ . Luego  $hg'g^{-1}h^{-1} \in \pi_{x'}$  entonces  $\pi_{x'} hg' = \pi_{x'} hg$ . Además es un morfismo de  $\pi$ -conjuntos. En efecto  $\theta(\pi_x g_0 \cdot g_1) = \pi_{x'} hg_0 g_1 = \pi_{x'} hg_0 \cdot g_1 = \theta(\pi_{x'} g_0) \cdot g_1$ . Fácilmente se comprueba que  $\theta$  es un isomorfismo. Por lo tanto  $F$  es isomorfo a  $F'$ .  $\square$

**DEFINICIÓN 3.1.** Un espacio se dice que es *localmente simplemente conexo* si cada punto tiene una base de entornos simplemente conexos. Un espacio  $X$  se dice que es *semilocalmente simplemente conexo* si cada punto  $x$  tiene una base de entornos  $\{U\}$  tal que el homomorfismo inducido por la inclusión  $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  es trivial.

**TEOREMA 3.1.** Sea  $Y$  un espacio basado, conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Entonces para cada subgrupo  $H$  de  $\pi_1(Y, y)$  existe una aplicación recubridora  $p_H: (X_H, x_H) \rightarrow (Y, y)$  tal que  $X_H$  es conexo por caminos y  $(p_H)_*(\pi_1(X_H, x_H)) = H$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos el grupoide fundamental  $\Pi Y$  y sea el conjunto  $X = \{a \in \Pi_1 Y | d(a) = y\}$ . Sea la aplicación  $c: X \rightarrow Y$

donde  $c$  es la aplicación codominio del grupoide. Consideremos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto  $X$ , dos de sus elementos  $a, b$  están relacionados si  $c(a) = c(b)$  y  $ab^{-1} \in H$ . Denotemos por  $X_H$  el conjunto cociente,  $[a]$  la clase de equivalencia de  $a$  y  $p_H: X_H \rightarrow Y$  la aplicación inducida  $p_H([a]) = c(a)$ . Para cada  $W$  abierto de  $Y$  y cada  $a \in X_H$  tal que  $c(a) \in W$ , consideremos  $W[a] = \{[a i_*^W(w)] \mid w \in \Pi_1 W, c(a) = d(w)\}$  donde  $i^W: W \rightarrow Y$  es la inclusión canónica.

Notemos que si  $W \subset U$ ,  $[c] \in U[a]$  con  $c(c) \in W$ , entonces  $W[c] \subset U[a]$ . En efecto,  $[c i_*^W w] = [a i_*^U u i_*^W w] = [a i_*^U (u (i_U^W)_* w)]$  donde  $i_U^W: W \rightarrow U$  es la inclusión canónica y  $w \in \Pi_1 W$ ,  $u \in \Pi_1 U$ .

Tomemos ahora la siguiente familia de subconjuntos  $\mathcal{B} = \{W[a] \mid W \text{ abierto conexo por arcos y tal que } \pi_1(W, y') \rightarrow \pi_1(Y, y') \text{ es trivial para } y' \in W\}$ . Veamos que existe una única topología que tiene como base la familia anterior. Claramente la reunión de los miembros de la familia es el espacio total. Por otra parte si  $[c] \in U[a] \cap V[b]$ , sea  $W \subset U \cap V$  tal que  $W$  entorno abierto de  $c(c)$  y además  $W$  es conexo por caminos y  $\pi_1(W, y') \rightarrow \pi_1(Y, y')$  es trivial para  $y' \in W$ . Entonces por lo que acabamos de probar se tiene que  $W[c] \subset U[a] \cap V[b]$ . Consecuentemente existe una única topología que tiene a la familia  $\mathcal{B}$  como base. Puesto que  $p_H(W[a]) = W$  se sigue que  $p_H$  es continua y abierta. Además si  $y' \in W$  se tiene que

$$p_H^{-1}(W) = \cup_{[a] \in p_H^{-1}(y')} W[a].$$

Esta reunión es disjunta ya que si  $[c] \in W[a] \cap W[b]$  entonces  $W[c] = W[a] = W[b]$ .

Sean ahora dos elementos  $[a i_*^W(w)], [a i_*^W(w')] \in W[a]$  tales que  $p_H([a i_*^W(w)]) = p_H([a i_*^W(w')])$ , entonces

$$a i_*^W(w') (i_*^W(w))^{-1} a^{-1} = a i_*^W(w' w^{-1}) a^{-1} = a a^{-1} = 1.$$

Por lo tanto  $[a i_*^W(w)] = [a i_*^W(w')]$ . De aquí se tiene que  $p_H|_{W[a]}: W[a] \rightarrow W$  es un homeomorfismo. Por lo tanto  $p_H$  es una aplicación recubridora.  $\square$

**PROPOSICIÓN 3.2.** Sea  $F$  un  $\pi$ -conjunto a derecha y sea  $Y$  un espacio basado, conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Entonces existe una aplicación recubridora  $p: X \rightarrow Y$  tal que  $F$  y  $p^{-1}(y)$  son  $\pi$ -conjuntos a derecha isomorfos.

**DEMOSTRACIÓN.** El  $\pi$ -conjunto  $F$  es la suma de sus órbitas  $F_\alpha$  que son  $\pi$ -conjuntos transitivos. Por el teorema 3.1 existe una aplicación recubridora  $p_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y$  con  $X_\alpha$  conexo. Entonces  $p = \sum_\alpha p_\alpha: \sum_\alpha X_\alpha \rightarrow Y$  es una aplicación recubridora tal que  $p^{-1}(y) = \sum_\alpha p_\alpha^{-1}(y) \cong \sum_\alpha F_\alpha = F$ .  $\square$

DEFINICIÓN 3.2. Diremos que una aplicación recubridora  $p: X \rightarrow Y$  es la *cubierta universal* si  $X$  es simplemente conexo.

TEOREMA 3.2. Sea  $Y$  un espacio basado, conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Entonces

- (i) La clase de las aplicaciones recubridoras de  $Y$  módulo isomorfismos sobre  $Y$  está en correspondencia biunívoca con la clase de los  $\pi$ -conjuntos a derecha módulo isomorfismos de  $\pi$ -conjuntos.
- (ii) La clase de aplicaciones recubridoras con espacio recubridor conexo por caminos módulo isomorfismos sobre  $Y$  está en correspondencia biunívoca con la clase de  $\pi$ -conjuntos transitivos módulo isomorfismos que a su vez es biyectiva al conjunto de todos los subgrupos del grupo fundamental de  $Y$  módulo conjugación.
- (iii) La clase de las aplicaciones recubridoras de  $Y$  módulo isomorfismos sobre  $Y$  con fibra el espacio discreto  $F$  está en correspondencia biunívoca con el conjunto de representaciones de la forma  $\pi^{op} \rightarrow \text{Aut}(F)$ , módulo conjugación, donde  $\pi^{op}$  denota el grupo opuesto del grupo fundamental del espacio basado  $Y$ .
- (iv) La clase de las aplicaciones recubridoras con espacio recubridor conexo por caminos de  $Y$  módulo isomorfismos sobre  $Y$  con fibra el espacio discreto  $F$  está en correspondencia biunívoca con el conjunto de representaciones transitivas de la forma  $\pi^{op} \rightarrow \text{Aut}(F)$ , módulo conjugación, donde  $\pi^{op}$  denota el grupo opuesto del grupo fundamental del espacio basado  $Y$ .

DEMOSTRACIÓN. Como consecuencia de la proposición 3.2 y del teorema 2.1, se tiene que para cada  $\pi$ -conjunto a derecha  $F$  existe una aplicación recubridora  $p: X \rightarrow Y$  tal que  $p^{-1}y$  es isomorfo a  $F$ , donde  $y$  es el punto base de  $Y$ . Por otro lado, se tiene que dadas cubiertas  $p: X \rightarrow Y$ ,  $p': X' \rightarrow Y$  son isomorfas si y sólo si  $p^{-1}y$  es isomorfo a  $p'^{-1}y$ . De aquí se obtiene de modo inmediato el resultado señalado en (i). De hecho utilizando la noción de categoría se puede dar una versión más fuerte de este resultado como se indica en la observación 3.1.

Aplicando el corolario 2.1 vemos que los espacios recubridores conexos se corresponden con  $\pi$ -conjuntos transitivos. De aquí se deduce la primera parte de (ii). Por otra parte, como consecuencia de la proposición 2.2 cada  $\pi$ -conjunto transitivo  $F$  tiene asociada una clase de conjugación en la familia de los subgrupos de  $\pi$ . Ahora por el corolario 3.1 se tiene que dos  $\pi$ -conjuntos son isomorfos si y sólo si le corresponde la misma clase de conjugación. También hay que tener en cuenta que para cada subgrupo  $H$  de  $\pi$  se tiene que  $H \setminus \pi$ , es un  $\pi$ -conjunto al que le corresponde la clase de conjugación de subgrupos representada por  $H$ . De este modo obtenemos la versión “clásica” del teorema de

clasificación de los espacios recubridores conexos en términos de clases de conjugación de subgrupos.

Aplicando el apartado (i) ya probado, se obtiene inmediatamente que las aplicaciones recubridoras que tengan como fibra el espacio discreto  $F$  se corresponden con los  $\pi$ -conjuntos a derecha que tengan como conjunto subyacente  $F$ . Como hemos visto al principio de la sección 2 una estructura de  $\pi$ -conjunto a derecha viene dada por un homomorfismo  $\theta: \pi^{op} \rightarrow \text{Aut}(F)$ . Dos de estas estructuras  $\theta, \theta'$  serán isomorfas si y sólo si existe una biyección  $\phi: F \rightarrow F$  tal que para cada  $g \in \pi$  es diagrama

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\bar{\theta}(g)} & F \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ F & \xrightarrow{\bar{\theta}'(g)} & F \end{array}$$

es conmutativo. Equivalentemente, si la representación  $\theta$  es conjugada de la representación  $\theta'$ .

El apartado (iv) se deduce del corolario 2.1 y del lo que acabamos de probar en (iii).  $\square$

**OBSERVACIÓN 3.1.** Sea  $Y$  un espacio basado, conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo con punto base  $y \in Y$ . Entonces el functor que asocia a una aplicación recubridora  $p: X \rightarrow Y$  el  $\pi$ -conjunto  $p^{-1}(y)$  es una equivalencia de categorías. Denotemos por  $\text{ApliRec}(Y, y)$  la categoría de las aplicaciones recubridoras sobre  $Y$  que tiene como morfismos las aplicaciones continua sobre  $Y$ . Entonces  $\text{ApliRec}(Y, y)$  es equivalente a  $\text{Con}^{\pi_1(Y, y)}$  la categoría de funtores de  $\pi_1(Y, y)$  en la categoría de los conjuntos, que es equivalente a la categoría de  $\pi_1(Y, y)$ -conjuntos, donde  $\pi_1(Y, y)$  se interpreta como el grupoide con un solo objeto y que tiene como morfismos los elementos del grupo. Es decir, que con la notación exponencial anterior, el grupo fundamental  $\pi_1(Y, y)$  se puede considerar como el “logaritmo” de la categoría de las aplicaciones recubridoras con base la categoría de los conjuntos.

No es difícil obtener una versión basada del teorema anterior. Un  $\pi$ -conjunto a derecha basado  $(F, x)$  es un  $\pi$ -conjunto a derecha  $F$  en el que además se ha tomado un punto base. Un homomorfismo  $\varphi: (F, x) \rightarrow (F', x')$  de  $\pi$ -conjuntos a derecha basados es un homomorfismo de  $\pi$ -conjuntos a derecha que preserva el punto base. Para un espacio basado  $(Y, y)$  una *aplicación recubridora basada* es una aplicación continua basada  $p: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  tal que  $p: X \rightarrow Y$  es una aplicación recubridora. Queremos hacer notar que si a una aplicación recubridora basada  $p: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  se le hace corresponder de modo natural un  $\pi$ -conjunto a derecha basado  $(p^{-1}(y), x)$ . Una aplicación continua

basada sobre  $(Y, y)$  es una aplicación continua sobre  $Y$  que preserva puntos base.

TEOREMA 3.3. Sea  $Y$  un espacio basado, conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Entonces

- (i) La clase de las aplicaciones recubridoras basadas de  $(Y, y)$  módulo isomorfismos sobre  $(Y, y)$  está en correspondencia biunívoca con las clase de los  $\pi$ -conjuntos a derecha basados módulo isomorfismos de  $\pi$ -conjuntos basados.
- (ii) La clase de aplicaciones recubridoras basadas con espacio recubridor conexo por caminos módulo isomorfismos basados sobre  $Y$  está en correspondencia biunívoca con la clase de  $\pi$ -conjuntos transitivos basados módulo isomorfismos basados que a su vez es biyectiva al conjunto de todos los subgrupos del grupo fundamental de  $Y$ .
- (iii) La clase de las aplicaciones recubridoras basadas con espacio recubridor conexo por caminos de  $(Y, y)$  módulo isomorfismos basados sobre  $(Y, y)$  con fibra el espacio discreto basado  $(F, x)$  está en correspondencia biunívoca con el conjunto de representaciones transitivas de la forma  $\pi^{op} \rightarrow \text{Aut}(F)$ , donde  $\pi^{op}$  denota el grupo opuesto del grupo fundamental del espacio basado  $Y$ .

DEMOSTRACIÓN. Notemos que si tomamos puntos base  $x \in p^{-1}(y)$ ,  $x' \in p'^{-1}(y)$ , donde  $p: X \rightarrow Y$  y  $p': X' \rightarrow Y$  son aplicaciones recubridoras y  $\phi: X \rightarrow X'$  es una transformación recubridora se tienen los  $\pi$ -conjuntos basados  $(p^{-1}(y), x)$ ,  $(p'^{-1}(y), x')$  y además el morfismo inducido  $\phi|_{p^{-1}(y)}$  preserva el punto base. Recíprocamente, si  $\theta: (F, x) \rightarrow (F', x')$  es un morfismo de  $\pi$ -conjuntos que preserva el punto base, entonces en las aplicaciones recubridoras construidas en el teorema 3.1 y la proposición 3.2, quedan inducidos puntos bases de modo natural y el teorema 2.1 determina una única transformación recubridora  $\phi$  tal que salvo isomorfismo natural se tiene que  $\phi|_{p^{-1}(y)} = \theta$ . Por lo tanto puesto que  $\theta$  preserva el punto base, también  $\phi$  lo preserva. Teniendo en cuenta que la correspondencia entre aplicaciones basadas y  $\pi$ -conjuntos basados preserva y refleja isomorfismos se obtiene el resultado (i).

Como antes, aplicando el corolario 2.1 vemos que los espacios recubridores conexos se corresponden con  $\pi$ -conjuntos transitivos. De aquí se deduce la primera parte de (ii). Por otra parte, a cada  $\pi$ -conjunto transitivo basado  $(F, x)$  tiene asociado el subgrupo de isotropía  $\pi_x$ . Ahora por el corolario 3.1 y los argumentos empleados en su demostración se tiene que dos  $\pi$ -conjuntos transitivos y basados son isomorfos si y sólo si les corresponde el mismo subgrupo de isotropía. También hay que tener en cuenta que para cada subgrupo  $H$  de  $\pi$  se

tiene que  $H \setminus \pi$ , es un  $\pi$ -conjunto transitivo basado que tiene como grupo de isotropía  $H$ . Obtenemos de este modo la versión “clásica” del teorema de clasificación de los espacios recubridores conexos y basados en términos de subgrupos.

Aplicando el apartado (i) ya probado, se obtiene inmediatamente que las aplicaciones recubridoras que tengan como fibra el espacio discreto basado  $(F, x)$  se corresponden con los  $\pi$ -conjuntos a derecha basados que tengan como conjunto basado subyacente  $(F, x)$ . Como en el teorema anterior, dos de estas estructuras  $\theta, \theta'$  serán isomorfas si y sólo si existe una biyección  $\phi: (F, x) \rightarrow (F, x)$  tal que para cada  $g \in \pi$  es diagrama

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\bar{\theta}(g)} & F \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ F & \xrightarrow{\bar{\theta}'(g)} & F \end{array}$$

es conmutativo. Puesto que  $\phi(x) = x$  y  $F$  es transitivo se tiene que  $\phi = \text{id}$ . Consecuentemente,  $\theta, \theta'$  serán isomorfas si y sólo si  $\theta = \theta'$ .  $\square$

**COROLARIO 3.2.** Sea  $Y$  un espacio basado, conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo. Entonces son equivalentes:

- (i) El grupo fundamental de  $Y$  tiene un subgrupo de índice dos,
- (ii) El espacio  $Y$  tiene salvo isomorfismo al menos dos recubridores de dos hojas, uno no conexo, que es el trivial, y otro conexo por caminos,
- (iii) El grupo fundamental de  $Y$  tiene una representación transitiva en el grupo simétrico de orden dos,

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\pi$  el grupo fundamental de  $Y$  y sea  $H$  un subgrupo de índice dos. Entonces  $H \setminus \pi$  es un  $\pi$ -conjunto transitivo al que le corresponde una aplicación recubridora de dos hojas y además determina una representación transitiva en el grupo simétrico de orden dos.  $\square$

**EJEMPLO 3.1.** Los siguientes espacios tienen dos recubridores de dos hojas:

- a) La circunferencia  $S^1$  tiene dos recubridores de dos hojas. Uno el trivial  $S^1 \times \{0, 1\} \rightarrow S^1$  la proyección canónica y otro conexo,  $q: S^1 \rightarrow S^1$  definido por  $q(z) = z^2$ , donde en este caso  $S^1$  denota los complejos de módulo uno.
- b) La banda de Moebius  $M = I \times [-1, 1]/(0, t) \sim (1, -t)$ . Además del trivial tenemos el cubrimiento  $q: I/\partial I \times [-1, 1] \rightarrow M$ ,  $q(s, t) = [(2s, t)]$ , para  $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$  y  $q(s, t) = [(2s-1, -t)]$ , para  $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ .

- c) El plano proyectivo real  $\mathbb{R}P^2$  tiene dos recubridores, de dos hojas, el trivial y  $q: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  definida por la identificación de antípodas.

### PROBLEMAS

3.1. Describir las representaciones del grupo fundamental de  $S^1 \vee S^1$  asociadas a las aplicaciones recubridoras descritas en el problema 2.1

3.2. Clasificar salvo isomorfismo las aplicaciones recubridoras de dos y de tres hojas de  $S^1 \vee S^1$ .

3.3. Describir el recubridor universal de  $S^1 \vee S^1$ .

3.4. Encontrar el espacio recubridor de  $S^1 \vee S^1$  tal que su grupo fundamental satisface que  $p_*\pi_1(\tilde{X}, *)$  es el subgrupo normal del grupo fundamental de  $S^1 \vee S^1$  generado por los cubos de cada uno de sus elementos.

3.5. Sean  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$  las cubiertas universales de espacios  $X$  e  $Y$  conexos por caminos y localmente conexos por caminos. Demostrar que si  $X \simeq Y$ , entonces  $\tilde{X} \simeq \tilde{Y}$ .

3.6. Encontrar todos los espacios recubridores de  $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ .

3.7. Encontrar todos los espacios recubridores de  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ , dando explícitamente una aplicación recubridora de cada clase.

3.8. Sea  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la transformación lineal  $\phi(x, y) = (2x, y/2)$ . Esta transformación determina una acción de  $\mathbb{Z}$  en  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Describir el espacio de las órbitas y calcular su grupo fundamental.

3.9. Probar que, para todo entero positivo  $n$ , existe una superficie conexa no compacta y un grupo de transformaciones  $G$  que es un grupo abeliano libre de rango  $2n$  y  $S/G$  es una superficie compacta orientable de genero  $n$ .

3.10. Probar que un subgrupo de un grupo libre es libre.

### 4. Espacios localmente conexos por caminos

En esta sección damos una clasificación de las aplicaciones recubridoras eliminando la condición de semilocalmente simplemente conexo. Mantenemos la condición de conexo por caminos y localmente conexo por caminos. La condición de conexo por caminos se puede eliminar fácilmente utilizando grupoides en vez de grupos o estudiando las aplicaciones recubridoras inducidas sobre cada una de las componentes conexas por caminos.

Dado un cubrimiento abierto  $\mathcal{G}$  cuyos miembros son conexos por caminos podemos considerar el subgrupo normal de  $\pi_1(Y, y)$  generado

por los elementos de la forma  $a((i_G)_*g)a^{-1}$  donde  $a \in \Pi_1 Y$ ,  $d(a) = y$ ,  $g \in \pi_1(G, c(a))$ ,  $G \in \mathcal{G}$ , e  $i_G: G \rightarrow Y$  es la inclusión canónica. Este subgrupo normal lo denotaremos por  $\pi_1(Y, \mathcal{G}, y)$ . El siguiente teorema es la clave para caracterizar los  $\pi_1(Y, y)$ -conjuntos a derecha que son realizables por alguna aplicación recubridora. Notése que su demostración es casi idéntica a la teorema 3.1. A pesar de ello, hemos considerado oportuno su inclusión para poner en evidencia las diferencias existentes y el papel que juegan los cubrimientos de abiertos conexos por caminos.

**TEOREMA 4.1.** Sea  $Y$  un espacio basado, conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Entonces si  $H$  es un subgrupo de  $\pi_1(Y, y)$  tal que existe un cubrimiento abierto  $\mathcal{G}$  cuyos abiertos son conexos por caminos y  $H \supseteq \pi_1(Y, \mathcal{G}, y)$ , entonces existe una aplicación recubridora  $p_H: (X_H, x_H) \rightarrow (Y, y)$  tal que  $X_H$  es conexo por caminos y  $(p_H)_*(\pi_1(X_H, x_H)) = H$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos el grupoide fundamental  $\Pi Y$  y sea el conjunto  $X = \{a \in \Pi_1 Y \mid d(a) = y\}$ . Sea la aplicación  $c: X \rightarrow Y$  donde  $c$  es la aplicación codominio del grupoide. Consideremos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto  $X$ , dos de sus elementos  $a, b$  están relacionados si  $c(a) = c(b)$  y  $ab^{-1} \in H$ . Denotemos por  $X_H$  el conjunto cociente,  $[a]$  la clase de equivalencia de  $a$  y  $p_H: X_H \rightarrow Y$  la aplicación inducida  $p_H([a]) = c(a)$ . Para cada  $W$  abierto de  $Y$  y cada  $a \in X$  tal que  $c(a) \in W$ , consideremos  $W[a] = \{[a i_*^W(w)] \mid w \in \Pi_1 W, c(a) = d(w)\}$  donde  $i^W: W \rightarrow Y$  es la inclusión canónica. Es claro que si  $a' \in X$ ,  $c(a) = c(a')$  y  $a'a^{-1} \in H$ , entonces  $W[a] = W[a']$ .

Notemos que si  $W \subset U$ ,  $[c] \in U[a]$  con  $c(c) \in W$ , entonces  $W[c] \subset U[a]$ . En efecto,  $[c i_*^W w] = [a i_*^U u i_*^W w] = [a i_*^U (u (i_U^W)_* w)]$  donde  $i_U^W: W \rightarrow U$  es la inclusión canónica y  $w \in \Pi_1 W$ ,  $u \in \Pi_1 U$ .

Tomemos ahora la siguiente familia de subconjuntos  $\mathcal{B} = \{W[a] \mid W \text{ abierto conexo por caminos tal que existe } G \in \mathcal{G}, W \subseteq G \text{ y } c(a) \in W\}$ . Veamos que existe una única topología que tiene como base la familia anterior. Claramente la reunión de los miembros de la familia es el espacio total. Por otra parte si  $[c] \in U[a] \cap V[b]$ , sea  $W \subset U \cap V$  tal que  $W$  entorno abierto de  $c(c)$ ,  $W$  es conexo por caminos y además  $W \subset G$ , para algún  $G \in \mathcal{G}$ . Entonces por lo que acabamos de probar se tiene que  $W[c] \subset U[a] \cap V[b]$ . Consecuentemente existe una única topología que tiene a la familia  $\mathcal{B}$  como base. Puesto que  $p_H(W[a]) = W$  se sigue que  $p_H$  es continua y abierta. Además si  $y' \in W$  se tiene que

$$p_H^{-1}(W) = \cup_{[a] \in p_H^{-1}(y')} W[a].$$

Esta reunión es disjunta ya que si  $[c] \in W[a] \cap W[b]$  entonces  $W[c] = W[a] = W[b]$ .

Sean ahora dos elementos  $[a i_*^W(w)], [a i_*^W(w')] \in W[a]$  tales que  $p_H([a i_*^W(w)]) = p_H([a i_*^W(w')])$ , entonces

$$a i_*^W(w')(i_*^W(w))^{-1}a^{-1} = a i_*^W(w'w^{-1})a^{-1} \in \pi_1(X, \mathcal{G}, y) \subseteq H .$$

Por lo tanto  $[a i_*^W(w)] = [a i_*^W(w')]$ . De aquí se tiene que la restricción  $p_H|_{W[a]}: W[a] \rightarrow W$  es un homeomorfismo. Por lo tanto  $p_H$  es una aplicación recubridora.  $\square$

Al eliminar la condición de semilocalmente simplemente conexo el problema de clasificación se aborda considerando únicamente los  $\pi_1(Y, y)$ -conjuntos a derecha que tienen grupos de isotropía verificando propiedades especiales respecto los subgrupos normales de la forma  $\pi_1(Y, \mathcal{G}, y)$ . En este caso, en vez de una sola cubierta universal se dispone de toda una familia de cubiertas universales que recubren al resto de la cubiertas conexas por caminos.

Es conveniente considerar la noción de  $\pi$ -conjunto continuo. Sea un conjunto  $F$  en el que podemos considerar la topología discreta y un grupo topológico  $\pi$ . Una estructura sobre  $F$  de  $\pi$ -conjunto continuo a derecha consiste en una acción a derecha de  $\pi$  sobre  $F$ ; es decir, una aplicación continua  $\theta: F \times \pi \rightarrow F$ ,  $(x, g) \rightarrow x \cdot g$ , que verifica,  $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$ ,  $x \cdot 1 = x$ , donde  $x \in F$ ,  $g, h \in \pi$ .

Equivalentemente, esta estructura viene determinada por el antihomomorfismo continuo  $\bar{\theta}: \pi \rightarrow \text{Aut}^{\text{ca}}(F)$ , definido por  $\bar{\theta}(g)(x) = \theta(x, g) = x \cdot g$ , donde  $\text{Aut}^{\text{ca}}(F)$  está provisto con la topología compacto-abierta.

Notemos que una base de la topología compacto-abierta de  $\text{Aut}^{\text{ca}}(F)$  está dada por los subgrupos de permutaciones que dejan fijo un conjunto finito  $S$  de  $F$ ; es decir,  $\mathcal{B} = \{\text{Fijos}(S) | S \subset F, S \text{ finito}\}$ , donde  $\text{Fijos}(S) = \{\theta \in \text{Aut}^{\text{ca}}(F) | \theta(s) = s, s \in S\}$ . En el caso que  $F$  sea finito se tiene que  $\text{Fijos}(F) = \{\text{id}_F\}$ . Esto implica que la topología compacto-abierta es precisamente la topología discreta. En el caso que  $F$  no sea finito, notemos que para  $S$  finito se tiene que  $\text{Fijos}(S)$  tiene más de un elemento, basta tomar una transposición de dos puntos que no esten en  $S$ . De aquí se concluye que  $\{\text{id}_F\}$  no puede ser abierto y en consecuencia la topología compacto-abierta no es la discreta. Entonces  $\text{Aut}^{\text{ca}}(F)$  es discreto si y sólo si  $F$  es finito.

Análogamente se define la noción de *morfismo de  $\pi$ -conjuntos continuos a derecha* es una aplicación  $\varphi: F \rightarrow F'$  tal que  $\varphi(x \cdot g) = \varphi(x) \cdot g$  para  $x \in F$  y  $g \in \pi$ .

**DEFINITION 4.1.** Sea  $(Y, y)$  un espacio basado conexo y localmente conexo por caminos. Un subgrupo  $H$  se dice que es  $S$ -abierto si existe un cubrimiento abierto  $\mathcal{G}$  tal que  $H \supseteq \pi_1(Y, \mathcal{G}, y)$ . Consideremos in  $\pi_1(Y, y)$  la única estructura de grupo topológico que hace que una base de entornos del elemento neutro es precisamente la familia de subgrupos normales  $\pi_1(Y, \mathcal{G}, y)$ . Puesto que la definición de estos subgrupos

normales es debida a Spanier [34] lo llamaremos grupo fundamental topológico de Spanier y lo denotaremos por  $\pi_1^S(Y, y)$ .

**PROPOSICIÓN 4.1.** Sea  $(Y, y)$  un espacio basado conexo y localmente conexo por caminos. Si tenemos un  $\pi_1^S(Y, y)$ -conjunto continuo  $F$ , entonces para cualquier  $x \in F$  el grupo de isotropía  $H_x$  de  $x$  es  $S$ -abierto. Además se tiene un morfismo canónico  $\phi: H_x \backslash \pi_1^S(Y, y) \rightarrow F$  tal que  $F$  es transitivo si y sólo si  $\phi$  es un isomorfismo.

**TEOREMA 4.2.** Sea  $(Y, y)$  un espacio basado, conexo, localmente conexo por caminos. Entonces para cada subgrupo  $S$ -abierto  $H$  de  $\pi_1(Y, y)$  existe una aplicación recubridora  $p_H: (X_H, x_H) \rightarrow (Y, y)$  tal que  $X_H$  es conexo por caminos y  $(p_H)_*(\pi_1(X_H, x_H)) = H$ .

También disponemos del resultado análogo a la proposición 3.2 para  $\pi$ -conjuntos continuos a derecha.

**PROPOSICIÓN 4.2.** Sea  $F$  un  $\pi$ -conjunto continuo a derecha y sea  $Y$  un espacio basado, conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Entonces existe una aplicación recubridora  $p: X \rightarrow Y$  tal que  $F$  y  $p^{-1}(y)$  son  $\pi$ -conjuntos continuos a derecha isomorfos.

Ahora incluimos los teoremas de clasificación. Hemos estimado que no es necesario desarrollar las demostraciones ya que es suficiente copiar la de los correspondientes resultados obtenidas con la condición adicional de semilocalmente simplemente conexo y aplicar el teorema 4.2 en vez del 3.1 y la proposición 4.2 en vez de la 3.2.

**TEOREMA 4.3.** Sea  $Y$  un espacio basado, conexo y localmente conexo por caminos. Entonces

- (i) La clase de las aplicaciones recubridoras de  $Y$  módulo isomorfismos sobre  $Y$  está en correspondencia biunívoca con la clase de los  $\pi$ -conjuntos continuos a derecha módulo isomorfismos de  $\pi$ -conjuntos.
- (ii) La clase de aplicaciones recubridoras con espacio recubridor conexo por caminos módulo isomorfismos sobre  $Y$  está en correspondencia biunívoca con la clase de  $\pi$ -conjuntos continuos transitivos módulo isomorfismos que a su vez es biyectiva al conjunto de todos los subgrupos  $S$ -abiertos del grupo fundamental topológico de Spanier de  $Y$  módulo conjugación.
- (iii) La clase de las aplicaciones recubridoras de  $Y$  módulo isomorfismos sobre  $Y$  con fibra el espacio discreto  $F$  está en correspondencia biunívoca con el conjunto de representaciones continuas de la forma  $(\pi^S)^{op} \rightarrow \text{Aut}^{ca}(F)$ , módulo conjugación, donde  $(\pi^S)^{op}$  denota el grupo opuesto del grupo fundamental topológico de Spanier del espacio basado  $Y$ .
- (iv) La clase de las aplicaciones recubridoras con espacio recubridor conexo por caminos de  $Y$  módulo isomorfismos sobre  $Y$  con

fibra el espacio discreto  $F$  está en correspondencia biunívoca con el conjunto de representaciones continuas transitivas de la forma  $(\pi^S)^{op} \rightarrow \text{Aut}^{ca}(F)$ , módulo conjugación.

De modo análogo al caso semilocalmente simplemente conexo se tiene la clasificación para aplicaciones recubridoras basadas.

**TEOREMA 4.4.** Sea  $Y$  un espacio basado, conexo, localmente conexo por caminos. Entonces

- (i) La clase de las aplicaciones recubridoras basadas de  $(Y, y)$  módulo isomorfismos sobre  $(Y, y)$  está en correspondencia biunívoca con la clase de los  $\pi$ -conjuntos continuos a derecha basados módulo isomorfismos de  $\pi$ -conjuntos continuos basados.
- (ii) La clase de aplicaciones recubridoras basadas con espacio recubridor conexo por caminos módulo isomorfismos basados sobre  $Y$  está en correspondencia biunívoca con la clase de  $\pi$ -conjuntos continuos transitivos basados módulo isomorfismos basados que a su vez es biyectiva al conjunto de todos los subgrupos  $S$ -abierto del grupo fundamental topológico de Spanier de  $Y$ .
- (iii) La clase de las aplicaciones recubridoras basadas con espacio recubridor conexo por caminos de  $(Y, y)$  módulo isomorfismos basados sobre  $(Y, y)$  con fibra el espacio discreto basado  $(F, x)$  está en correspondencia biunívoca con el conjunto de representaciones continuas transitivas de la forma  $(\pi^S)^{op} \rightarrow \text{Aut}^{ca}(F)$ , donde  $(\pi^S)^{op}$  denota el grupo opuesto del grupo fundamental topológico de Spanier del espacio basado  $Y$ .

**EJEMPLO 4.1.** El pendiente Hawayano  $E$  es un espacio métrico compacto formado por la unión de círculos tangentes en el mismo punto y tal que la sucesión de sus radios converge a cero. En la Figuras 4, 4, 4 podemos ver las cubiertas conexas de dos hojas del pendiente Hawayano que, salvo las dos circunferencias de mayor radio, trivializan sobre todas las circunferencias.

## 5. Espacios recubridores sobre espacios generales

Los resultados de la sección anterior, se han planteado para otras clases de espacios y a través de distintas técnicas. Citaremos brevemente algunas de ellas.

1) Artin y Mazur [AM67] probaron en su corolario 10.6, que si  $C$  es un sitio localmente conexo (una generalización de topología localmente conexa), cerrado bajo coproductos arbitrarios y  $K$  es un hipercubrimiento (ver sección 8 de [AM67], se trata de un objeto simplicial que generaliza la noción de cubrimiento abierto), entonces la categoría de

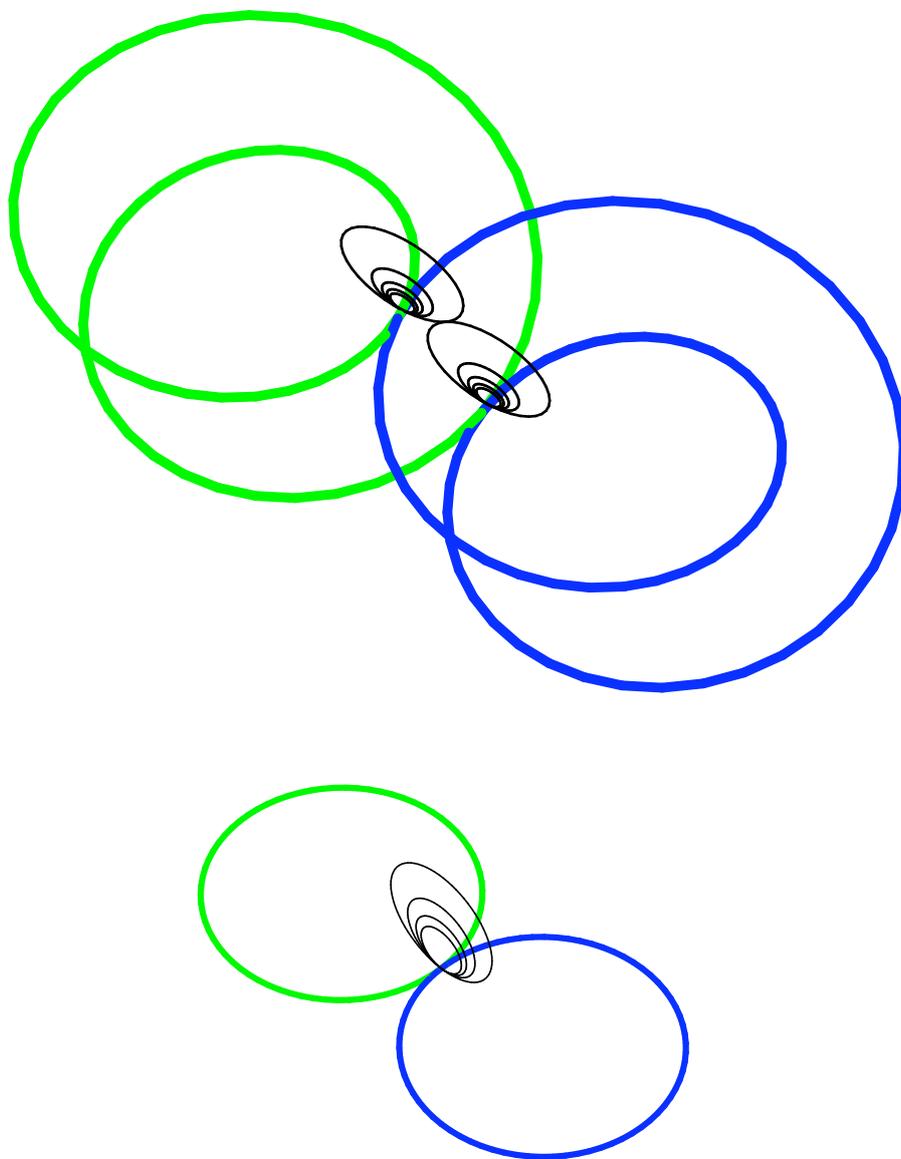


FIGURA 1. 2-cubierta del pendiente Hawayano

morfismos localmente triviales sobre el objeto final de  $\mathcal{C}$ , que son triviales sobre  $K_0$  (aplicaciones recubridoras sobre un espacio que trivializan sobre un abierto), es equivalente a la categoría de aplicaciones simpliciales recubridoras sobre el conjunto simplicial  $c_0(K)$  (generalización del conjunto simplicial llamado nervio de Čech).

De este modo si se asocia a un espacio localmente conexo la categoría distributiva localmente conexa de los haces del espacio. Para una

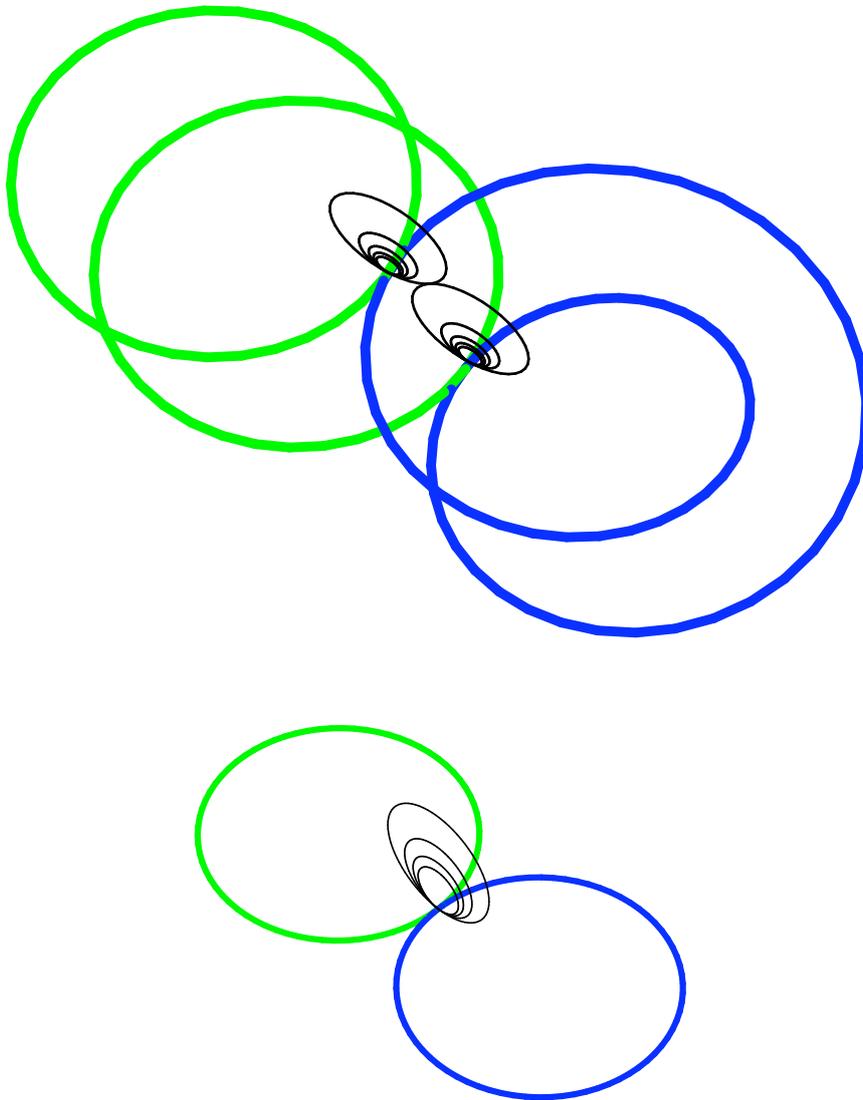


FIGURA 2. 2-cubierta del pendiente Hawayano

categoría de este tipo resulta que el proconjunto simplicial de los hiper-cubrimientos resulta ser isomorfo al nervio de Čech de todos los cubrimientos abiertos del espacio. Como consecuencia de esta construcción se puede obtener mediante el corolario anterior la clasificación de las aplicaciones recubridoras que trivializan sobre un cubrimiento abierto.

Notemos que este resultado es más fuerte que el obtenido en la sección anterior ya que un espacio localmente conexo por caminos es localmente conexo. Sin embargo mediante el procedimiento anterior el

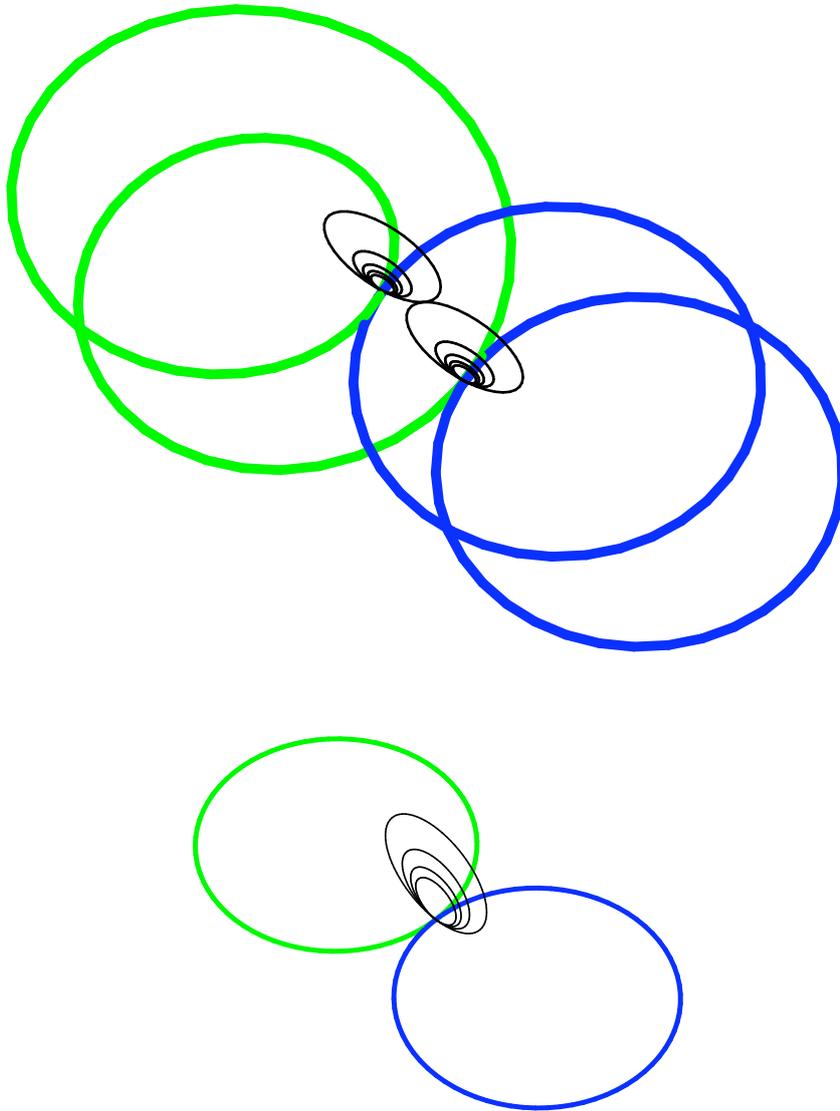


FIGURA 3. 2-cubierta del pendiente Hawayano

corolario 10.6 de Artin y Mazur no se puede aplicar al caso no localmente conexo.

Si aplicamos el grupo fundamental al proconjunto simplicial anterior se obtiene los que denominaremos progrupo fundamental de Artin-Marzur.

2) La noción de “overlay” fue introducida por Fox [Fox72]. Para el caso en el que el espacio base sea localmente conexo o haya un número finito de fibras ésta coincide con la de aplicación recubridora. Fox utilizó invariantes de la teoría de la forma, introducida por Borsuk, para dar un resultado que clasifica “overlays” con fibras finitas sobre

espacios metrizable. Notemos que Fox impone la condición de que el espacio base sea metrizable pero no se exige la condición de localmente conexo.

3) Si  $G$  es un grupo profinito, se puede considerar la categoría de  $G$ -conjuntos finitos continuos. Una categoría se dice que es de Galois si es equivalente a una del tipo anterior. Grothendieck [Gro71] dio una descripción axiomática de estas categorías y probó que el grupo profinito  $G$  asociado es único salvo isomorfismo. Este resultado permite definir el grupo fundamental profinito de un topos de Grothendieck conexo y punteado como el grupo profinito determinado por la categoría de Galois de los objetos localmente constantes del topos. Por ejemplo, si  $X$  es un espacio basado, conexo por caminos, localmente conexo por caminos y semilocalmente simplemente conexo, entonces la categoría de aplicaciones recubridoras con fibras finitas es equivalente a la categoría de  $\pi$ -conjuntos finitos, como ya hemos visto en estos apuntes, pero también será equivalente a la categoría de  $\hat{\pi}$ -conjuntos finitos continuos, siendo  $\hat{\pi}$  el grupo profinito del topos de los haces del espacio, que resulta ser la completación profinita de  $\pi$ . En el caso que  $X$  sea una variedad algebraica no singular sobre el cuerpo de los complejos con espacio asociado  $X(\mathbb{C})$ , entonces el grupo fundamental etale de  $X$  es la completación finita del grupo fundamental de  $X(\mathbb{C})$ .

4) Moerdijk [M89] dio una caracterización de los topos de la forma  $BG$  para  $G$  un grupo localico prodiscreto. Probó que la categoría de los grupos localicos prodiscretos es equivalente a la categoría de progrupos con transiciones exhaustivas. Para un espacio localmente conexo (conexo) esta equivalencia lleva el progrupo fundamental de Artin-Mazur al grupo localico fundamental considerado por Moerdijk. De nuevo resulta que esta construcción no es aplicable a espacios que no sean localmente conexos.

5) En [He98] se introdujo una nueva noción de proyección recubridora que para espacios localmente conexos coincide con la noción usual de aplicación recubridora. Con esta nueva noción se verifica que el progrupoide fundamental  $\pi$  de un espacio  $X$  clasifica las proyecciones recubridoras. Es decir que la categoría de proyecciones recubridoras de un espacio (sin ninguna condición adicional) es equivalente a la categoría de  $\pi$ -conjuntos. Es importante observar que existen progrupoides no isomorfos  $\pi, \pi'$  que determinan categorías de  $\pi$ -conjuntos y  $\pi'$ -conjuntos equivalentes. Se conocen algunos resultados parciales de que ciertas equivalencias entre los progrupoides  $\pi, \pi'$  determinan equivalencias de categorías entre  $\pi$ -conjuntos y  $\pi'$ -conjuntos, pero se desconoce las caracterizaciones precisas del tipo de equivalencia necesaria para que el recíproco sea cierto. Una generalización de los resultados anteriores para ciertos fibrados con cociclos localmente constantes puede verse en [B22].

6) Una clasificación de “overlays” sobre un espacio topológico conexo, utilizando resoluciones del espacio base formadas por retractos de entornos absolutos, puede verse en el trabajo de Mardešić-Matijević [MM01]. En este artículo, los “overlays” del espacio base se presentan inducidos por cubiertas sobre los espacios que forman su resolución. Un estudio de “overlays” de espacios obtenidos como límites inversos de toros ha sido realizado por Eda, Mandić y Matijević en [EMM].

7) Nuevos estudios sobre categorías conexas atómicas pueden verse en [Du03]. En este trabajo se prueba que un topos con un punto es conexo y atómico es el topos clasificante de un grupo localico que es precisamente el grupo localico de los automorfismos del punto. En un trabajo posterior ([Du04]) establece un teorema que caracteriza un topos de Galois como el topos clasificante de un grupoide conexo con espacio discreto de objetos y con hom-sets espacios localicos prodiscretos. Anteriormente y en esta dirección, Joyal-Tierney ya habían desarrollado una teoría que culmina con un teorema que asegura que un topos arbitrario es el topos clasificante de un grupoide localico. Señalaremos que otros trabajos sobre topos clasificantes de grupoide localicos han sido realizados por M. Bunge y I. Moerdijk. Estos resultados tienen importantes aplicaciones a la teoría de las aplicaciones recubridoras debido a que una categoría de este tipo, bajo ciertas condiciones sobre el espacio base, es un topos clasificante de un grupoide localico.

## Índice alfabético

- abelianización, 63
- abiertos, 9
- aplicación basada, 16
- aplicación continua sobre un espacio, 44
- aplicación de conjuntos semi-simpliciales, 80
- aplicación recubridora, 43
- aplicación recubridora basada, 138
- aplicación simplicial, 80
  
- base de entornos, 10
- base de la topología, 10
  
- camino, 29, 81
- camino constante, 29
- camino inverso, 29
- camino semi-simplicial, 81
- característica de Euler, 82
- cerrado, 10
- cilindro, 14
- circunferencia, 81
- circunferencia semi-simplicial, 81
- clausura, 10
- cociente, 12
- complejo celular, 82
- conexo, 11
- conexo por caminos, 11
- conjunto de clases de homotopía, 16
- conjunto de generadores, 59
- conjunto de relaciones, 59
- conjunto semi-simplicial, 79
- conmutador, 63
- continua, 9
- contráctil, 20
- cubierta conexa normal (regular), 133
- cubierta universal, 137
  
- deformación fuerte, 21
- deformación, 20
  
- diagrama del nudo, 108
- dimensión de un complejo semi-simplicial, 79
  
- entorno, 10
- equivalencia de homotopía, 20
- equivalencia de homotopía basada, 20
- equivalencia de presentaciones, 60
- espacio métrico, 13
- espacio topológico, 9
- espacio triangulable, 80
- espacio triangulado, 80
- espacios basados, 16
- estrella de un símplice, 81
  
- finitamente generado, 59
- finitamente presentado, 59
  
- grupo abeliano libre, 61
- grupo fundamental, 35
- grupo libre, 57
- grupoide, 34
- grupoide fundamental, 35
  
- halo, 81
- Hausdorff, 11
- homótopas, 14
- homótopas relativamente, 14
- homeomorfismo local, 43
- homeomorfos, 9, 20
- homotópicamente equivalentes, 20
- homotopía, 14
- homotopía basada, 16
  
- interior, 10
- isomorfismo de  $\pi$ -conjuntos, 129
- isomorfismo sobre un espacio, 44
  
- lazo, 35
- localmente conexo, 11
- localmente conexo por caminos, 11

- localmente inyectiva, 43
- localmente simplemente conexo, 135
- metrizable, 13
- morfismo de  $\pi$ -conjuntos, 129, 143
- métrica, 13
- métrica cartesiana, 13
- métrica euclidiana, 13
- normalizador, 132
- órbita, 130
- $\pi$ -conjunto transitivo normal, 133
- $\pi$ -conjunto a derecha, 129
- $\pi$ -conjunto a derecha basado, 138
- $\pi$ -conjunto continuo a derecha, 143
- presentación abeliana, 62
- presentación del grupo, 59
- primera especie, 86
- primero contable, 10
- producto, 12
- producto de caminos, 29
- punteados, 16
- punto del borde, 98
- punto del interior, 98
- realización canónica de un conjunto
  - semi-simplicial, 80
- representación transitiva, 130
- retracción, 20
- retracto, 20
- retracto por deformación, 20
- retracto por deformación fuerte, 21
- segunda especie, 86
- segundo contable, 10
- semilocalmente simplemente conexo, 135
- simplemente conexo, 37
- subgrupo conmutador, 63
- sugbrupo de isotropía, 130
- suma amalgamada, 81
- suma disjunta, 11
- superficie, 79
- superficie con borde, 97
- superficie semi-simplicial, 84
- superficie semi-simplicial con borde, 98
- superficie triangulada, 84
- superficie triangulada con borde, 98
- tipo de homotopía, 20
- tipo de homotopía basada, 20
- topología, 9
- topología relativa, 10
- transformación recubridora, 44, 129
- transitivo, 130
- triangulación, 80

## Bibliografía

1. L. V. Ahlfors and L. Sario *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, 1960.
2. Armstrong, M.A. *Basic Topology*, Springer, 1997.
3. Brown, R. *Elements of modern topology*, McGraw Hill, 1968.
4. Cisneros Molina, J. L. *Introducción a la Teoría de Nudos*, [www.matcuer.unam.mx/~j lcm/nudos.pdf](http://www.matcuer.unam.mx/~j lcm/nudos.pdf), 2000.
5. Contreras, L. *250 problemas de Topología Algebraica y Geométrica*, Ediciones de la Univ. Aut. de Madrid, 1989.
6. Crowell, R.H. and Fox, R.H. *Introduction to Knot Theory*, Ginn, 1963.
7. Dold, A. *Lectures on algebraic topology*, Springer-Verlag, 1972.
8. Dugundji, J. *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.
9. Eilenberg, S. and Steenrod, N. E. *Foundations of algebraic topology*, Princeton, 1952.
10. Eisenberg, M. *Topology*, Holt Rinehart Winston, 1974.
11. Franz, W. *Topología general y algebraica*, Selecciones científicas. Madrid, 1968.
12. Giblin, P.J. *Graphs, surfaces and homology*, Chapman and Hall, 1977.
13. Gilbert, N.D. and Porter, T. *Knots and surfaces*, Oxford University Press, Oxford, 1994.
14. Godbillon, C. *Eléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971.
15. Graimain, A. *Topologie des surfaces*, P.U.F. Paris, 1971.
16. Greenberg, M. *Lectures on algebraic topology*, Benjamin, 1967.
17. Henle, M. *A combinatorial introduction to topology*, W.H. Freeman, San Francisco, 1979.
18. Hilton, P.J. and Stammach, U. *A course in homological algebra*, Springer-Verlag, 1971.
19. Hu, S.T. *Homology theory. A first course in algebraic topology*, Holden-Day, 1970.
20. Ivorra, C. *Topología algebraica con aplicaciones a la geometría diferencial* <http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Libros.htm> , 2004.
21. Keesee, J.W. *Introducción a la topología algebraica*, Alhambra, 1971.
22. Kelley, J. *Topología general*, Eudeba, 1975.
23. Kosniowski, C. *A first course in algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, 1980.
24. Massey, W.S. *Introducción a la topología algebraica*, Reverté, 1972.
25. Massey, W.S. *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag (GTM 127), 1991.
26. Massey, W.S. *Singular homology theory*, Springer-Verlag , 1980.
27. Massey, W.S. *Homology and cohomology theory*, Marcel Decker, 1978.
28. Maunder, C.R.F. *Algebraic topology* , Van Nostrand , 1972.
29. Munkres, J.R. *Elements of algebraic topology*, Addison- Wesley , 1984.
30. Reidemeister, K. *KnotenTheorie*, in *Ergebnisse der Mathematik*, vol.1 no.1, 1932.

31. Rolfsen, D. *Knots and Links*, Publish or perish, Berkeley, Ca., 1976.
32. Rourke, C. P. and Sanderson, B. J. *Introduction to Piecewise-Linear Topology*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
33. Seifert, H. and Threlfall, W. *A textbook of topology*, Academic Press, 1980.
34. Spanier, Edwin H. *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
35. Vick, J.W. *Homology theory: An introduction to algebraic topology*, Academic Press, 1973.
36. Wall, C.T.C. *A geometric introduction to algebraic topology*, Addison-Wesley, 1972.
37. Wallace, A.H. *Algebraic topology. Homology and cohomology*, Benjamin. New York, 1970.
38. Wallace, A.H. *Introducción á la topologie algebrique*, Gauthier- Villars, 1973.
39. Willansky, A. *Topology for analysis*, Xeros College Publ., 1970.
40. Willard, S. *General topology*, Addison-Wesley, 1970.
41. Zisman, M. *Topología algebraica elemental*, Paraninfo, 1970.

## Referencias de artículos y monografías

- AH99. Ardanza-Trevijano,S and Hernández, L.J. *Fundamental progroupoid and bundles with a structural category*, Top. and its Appl. 92 (1999) 85-99.
- B22. Ardanza-Trevijano,S and Hernández, L.J. *Fundamental progroupoid and bundles with a structural category*, Top. and its Appl. 92 (1999) 85-99.
- AM67. M. Artin and B. Mazur, *Etale Homotopy*, Springer Lect. Notes in Math., no. 100, Springer-Verlag, Berlin , 1967.
- Du03. Dubuc, E. *Localic Galois Theory*, Adv. in Math. 175 (2003) 144-167.
- Du04. Dubuc, E. *On the representation theory of Galois and Atomic Topoi*, to appear JPAA.
- EMM. Eda,K, Mandić,J and Matijević, V *Torus-like continua which are not self-covering spaces*, preprint 2004.
- F83. Fenn, R. A. *Techniques of Geometric Topology*, Lecture Note Series 57, Cambridge Univ. Press, 1983.
- Fox72. R. Fox, *On Shape*, Fund. Math. 74 (1972), pp. 47-71
- Fox74. R. Fox *Shape theory and covering spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 375 (1974), pp. 77-90.
- Gro71. Grothendieck, A. *Revêtements Etales et Groupe Fondamental (SGA1)*, Springer Lect. Notes in Math., no. 222, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- He98. Hernández, L.J. *Fundamental progroupoids and covering projections*, Fund. Math., 156 (1998) 1-31.
- L62. Lubkin, S. *Theory of Covering Spaces*, Transactions of the Amer. Math. Soc., vol 104, (1962), pp. 205-238.
- MM01. Mardešić and Matijević *Classifying overlays structures of topological spaces*, Top. and its appl. 113 (2001) 167-209.
- M89. Moerdijk, I. *Prodiscrete groups and Galois toposes*, Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 92 (1989) 219-234.
- R25. T. Radó *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*, Acta Litt. Szeged., 2, 1925, 101-121..
- T900. Tait, P. G. *On knots I,II,III*, In Scientific Papers, Cambridge University Press, 1900.