

El concepto de libertad

F.J. DÍAZ, S. RODRÍGUEZ-MACHÍN

Febrero de 2003

Al trabajar con las teorías de homotopía proyectiva e inyectiva para R -módulos, relacionándolas con las teorías de homotopía cónica y cocónica (ver [H] [D]), hemos observado que la definición clásica de objeto proyectivo en una categoría arbitraria (ver [M]) no representa adecuadamente dicha noción. Uno de los hechos que hace pensar esto es la imposibilidad de relacionar el concepto de objeto proyectivo con una definición categórica adecuada de objeto libre.

Esto ocurre porque en la categoría de R -módulos, así como en otras cuyos objetos tienen como soporte un conjunto, los epimorfismos son exactamente los morfismos suprayectivos, esto es, aquellos que como aplicaciones son una retracción, pero este hecho no ha sido tenido en cuenta en la definición de objeto proyectivo.

Considerando un funtor cualquiera $U : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, es posible generalizar la propiedad universal que verifican los R -módulos libres para obtener lo que hemos denominado *objeto U -libre con base un objeto de la categoría $\mathbf{D}$* . Esta idea es ya conocida en teoría de categorías, aunque con el nombre de “flechas universales”, y sin ser relacionada con el concepto de “objeto libre” (ver [M]).

Nosotros hemos reformulado la definición de objeto proyectivo, relacionándolo con el funtor U fijado, de forma que que en el contexto de categorías cualesquiera se relaciona con el de objeto U -libre de la forma clásica, esto es, U -libre implica U -proyectivo. Además, para un funtor U adecuado, el concepto clásico de objeto proyectivo es un caso particular del aquí introducido, y en las categorías usuales (R -módulos, grupos, etc.) las definiciones categóricas que proponemos siguen generando los objetos libres y proyectivos conocidos.

Las principales propiedades que uno puede esperar de los proyectivos se siguen verificando. Además, es posible definir un “functor libre” que, usado como co-cono, permite construir una teoría de homotopía cuyos objetos contráctiles son los U -proyectivos, lo cual nos suministra otra caracterización de estos objetos.

Todo lo hecho tiene una dualización obvia. Además, las teorías de homotopía proyectiva e inyectiva de R -módulos pueden ser obtenidas por este camino.

Recíprocamente, ya Kleisli [K] demostró que todo cono (o co-cono) es generado por un par de funtores adjuntos. Luego los objetos contráctiles en este tipo de homotopías son los inyectivos (o respectivamente los proyectivos) respecto a un cierto funtor.

Bibliografía

- [D] Díaz, F.J.; Remedios, J.; Rodríguez-Machín, S. *Generalized homotopy in C -categories*. Extracta Math. Vol. **16**, Num. 3, 393-403.
- [H] Hilton, P.J. *Homotopy theory and duality*. Nelson Gordon and Breach (1965).
- [Hu] Huber, P.J. *Homotopy theory in general categories*. Math. Ann., **144** (1961), 361-385.
- [K] Kleisli, H. *Every Standard construction is induced by a pair of Adjoint Functors*. Proc. Am. Math. Soc., **16** 3 (1965) 544-546.
- [M] Mac LANE, S. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics **5**. Springer-Verlag (1971).