Espacios Clasificadores de 2-categorías

M. Bullejos y A.M. Cegarra
Departamento de Álgebra, Universidad de Granada

Con la construcción de nervios y espacios clasificadores se pretende asociar objetos geométricos a estructuras categóricas, de manera que tales objetos mantengan la información de la estructura categórica. El proceso de tomar espacio clasificador permite construir la teoría de homotopía de dichas estructuras categóricas y el interés de este proceso es de sobra conocido; por ejemplo, Quillen [4] define una K-teoría algebraica superior tomando grupos de homotopía de espacios clasificadores de ciertas categorías, recuérdese también que los espacios clasificadores de categorías monoidales simétricas proporcionan los ejemplos más notorios de espacios con la estructura adicional requerida para definir un Ω-espectro.

Grothendieck [3] fue el primero en asociar un conjunto simplicial $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ a una categoría pequeña $\mathcal{C}$, el espacio clasificador de la categoría pequeña se define entonces como la realización geométrica de su nervio $B(\mathcal{C}) = |\mathrm{N}(\mathcal{C})|$. Posteriormente Segal [6] extiende este proceso a categorías topológicas, él observa que si $\mathcal{C}$ es una categoría topológica su nervio $\mathrm{N}(\mathcal{C})$ tiene una estructura natural de espacio simplicial y entonces define el espacio clasificador de $\mathcal{C}$ como el espacio clasificador del espacio simplicial $\mathrm{N}(\mathcal{C})$. Esta construcción general dada por Segal permite, por ejemplo, definir el espacio clasificador de una 2-categoría. Una 2-categoría $\mathbf{C}$ es una categoría (pequeña) enriquecida en la categoría $\mathbf{Cat}$ de categorías (pequeñas), por tanto para cada par de objetos $x, y \in \mathbf{C}$ se tiene una categoría $\mathbf{C}(x,y)$ de flechas de x en y, de manera que la composición $\mathbf{C}(x,y) \times \mathbf{C}(y,z) \to \mathbf{C}(x,z)$ es un funtor. Reemplazando entonces cada categoría $\mathbf{C}(x,y)$ por su espacio clasificador $B\mathbf{C}(x,y)$ tenemos una categoría topológica (con espacio de objetos discreto) cuyo espacio clasificador es por definición el espacio clasificador $\mathcal{B}\mathbf{C}$ de la 2-categoría $\mathbf{C}$ de partida.

Sin embargo hay otro método también convincente de asociar un espacio a una 2-categoría. Este método pasa por la construcción que Duskin [1] llamó nervio geométrico de una 2-categoría. El nervio geométrico $\Delta\mathbf{C}$ es un conjunto simplicial que encierra toda la estructura de 2-categoría de $\mathbf{C}$, sus símplices tienen la siguiente descripción geométrica: Los vértices de $\Delta\mathbf{C}$ son los objetos $x_0 \in \mathbf{C}$, los 1-símplices son las flechas $x_0 \xrightarrow{x_{0,1}} x_1$ en $\mathbf{C}$, los 2-símplices son triángulos

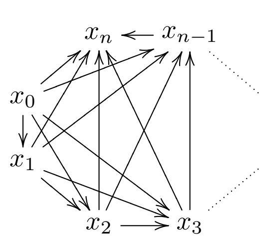
$$\begin{tikzcd} & x_1 \arrow[dr, "x_{1,2}"] & \\ x_0 \arrow[ur, "x_{0,1}"] \arrow[rr, "x_{0,2}"'] & \Uparrow x_{0,1,2} & x_2 \end{tikzcd}$$

con $x_{0,1,2} : x_{0,2} \Rightarrow x_{1,2}x_{0,1}$ una deformación (o 2-celda) en $\mathbf{C}$, los 3-símplices de $\Delta\mathbf{C}$ son tetraedros conmutativos

$$\begin{tikzcd} & x_3 & \\ x_0 \arrow[ur, "x_{0,3}"] \arrow[rr, "x_{0,2}"] \arrow[dr, "x_{0,1}"'] & & x_2 \arrow[ul, "x_{2,3}"'] \\ & x_1 \arrow[uu, "x_{1,3}"] \arrow[ur, "x_{1,2}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} x_{0,1,2} &: x_{0,2} \Rightarrow x_{1,2}\, x_{0,1} \\ x_{0,1,3} &: x_{0,3} \Rightarrow x_{1,3}\, x_{0,1} \\ x_{0,2,3} &: x_{0,3} \Rightarrow x_{2,3}\, x_{0,2} \\ x_{1,2,3} &: x_{1,3} \Rightarrow x_{2,3}\, x_{1,2} \end{aligned}$$

En general, para $n \geq 3$, los n-símplices de $\mathbf{C}$ son diagramas en $\mathbf{C}$ con la forma del 2-esqueleto de un n-símplice orientado estándar



con objetos $x_0, \ldots, x_n \in \mathbf{C}$ como vértices, flechas $x_i \xrightarrow{x_{i,j}} x_j$ como aristas y como caras triángulos:

$$
\begin{tikzcd}
& x_j \arrow[dr, "x_{j,k}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow x_{i,j,k}"] & \\
x_i \arrow[ur, "x_{i,j}"] \arrow[rr, "x_{i,k}"'] & {} & x_k
\end{tikzcd}
$$

con $x_{i,j,k} : x_{i,k} \Rightarrow x_{j,k}\, x_{i,j}$ una deformación, para cada $0 \leq i < j < k \leq n$, con la condición de que cada tetraedro con vértices x_i, x_j, x_k y x_ℓ es conmutativo.

De esta forma tenemos dos espacios $\mathcal{B}\mathbf{C}$ y $|\Delta\mathbf{C}|$ asociados a una 2-categoría $\mathbf{C}$, habiendo mostrado ambos su utilidad, es entonces natural pensar en compararlos. Existe un morfismo canónico

$$\mathcal{B}\mathbf{C} \longrightarrow |\Delta\mathbf{C}|. \tag{1}$$

Moerdijk y Svensson probaron que en el caso en que toda flecha y toda deformación de $\mathbf{C}$ sea invertible este morfismo es una equivalencia homotópica, en su demostración es esencial la condición sobre las flechas y deformaciones de $\mathbf{C}$, de modo que esta no puede trasladarse a un contexto general. Nuestro objetivo es probar que en general, para cualquier 2-categoría $\mathbf{C}$, el morfismo canónico (1) es siempre una equivalencia homotópica.

Como aplicación probamos la siguiente generalización del Teorema A de Quillen para 2-categorías:

Teorema.- *Sea $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un 2-funtor. Para cada objeto $y' \in \mathbf{C}'$ sea $y'//F$ la 2-categoría fibra homotópica de F en y' en el sentido de Gray [2]. Entonces, si $\mathcal{B}(y'//F)$ es contráctil para todo $y' \in \mathbf{C}'$ la aplicación inducida $\mathcal{B}F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ es una equivalencia homotópica.*

Referencias

[1] Duskin J.: A simplicial-matrix approach to higher dimensional category theory I: Nerves of bicategories, II: Nerves of morphisms of bicategories. *preprints* 2001.

[2] Gray J. W.: Closed categories, lax limits and homotopy limits, *Journal of Pure and Applied Algebra* **19** (1980), 127-158.

[3] Grothendieck A.: Théorie de la descente,... *Séminaire Bourbaki* **195** (1959-1960).

[4] Quillen D.: Higher algebraic K-theory:I, in Algebraic K-theory I, *Lecture Notes in Math.* **341** (1973), 77-139.

[5] Moerdijk I. and Svensson J. A.: Algebraic classification of equivariant homotopy 2-types,I, *J. of Pure and Appl. Algebra* **89** (1993), 187-216.

[6] Segal G.B.: Classifying spaces and spectral sequences, *Publ. Math. Inst. des Hautes Etudes Scient. (Paris)* **34** (1968), 105-112.