

LA DIVINA RAZÓN DE LA BELLEZA

J. IGNACIO EXTREMIANA ALDANA, L. JAVIER HERNÁNDEZ PARICIO
Y M. TERESA RIVAS RODRÍGUEZ

RESUMEN. La belleza, una noción difícil de precisar, relacionada con la armonía, bondad, simplicidad y orden, está presente en todas las culturas a lo largo del tiempo y puede constatarse que de alguna manera hay un sentido universal de lo que es bello. El objetivo de crear algo bello, que en cierto modo representaría un reflejo de la perfección divina, aparece en la naturaleza, en las creaciones artísticas musicales, pictóricas, escultóricas y arquitectónicas, y también en las creaciones técnicas y científicas.

Estas notas están dedicadas a exponer cómo, quizás de una manera sorprendente para los que consideren las matemáticas algo frío y aislado, es precisamente un maravilloso número, $\phi = 1,61803\cdots$, uno de los que está contenido con más profusión en las creaciones más bellas.

Resaltamos también algunas de las numerosas propiedades geométricas, aritméticas y algebraicas de este singular número que se obtiene al dividir un segmento en media y extrema razón. La belleza matemática de ϕ parece transmitirse a toda obra que lo contenga, convirtiéndolo en un generador por excelencia de belleza. Los diferentes nombres que ha recibido este “irracional” número: Sección áurea, proporción áurea, razón áurea, número de oro, santa proporción, divina proporción, etc., son sólo una muestra del carácter mágico, misterioso, secreto, simbólico, poderoso y divino que en muchos casos se le ha otorgado.

ÍNDICE

1. Retorna a lo antiguo y serás moderno (G. Verdi)	2
1.1. Pitágoras y los Pitagóricos	3
1.2. Creación y belleza	6
1.3. Experimento	10
2. Proporciones: El número de oro	12
2.1. Proporciones	12
2.2. Orígenes de ϕ	16
3. Propiedades de ϕ	23
3.1. Las sucesiones de Fibonacci y Lucas	25
4. Relaciones de ϕ	28
4.1. Triángulo de Pascal.	28

4.2. Triángulos rectángulos	29
4.3. Relaciones “trascendentes” de ϕ	30
5. Volvamos a Egipto	31
6. La Divina Proporción	33
Referencias	42
Páginas web	43

1. RETORNA A LO ANTIGUO Y SERÁS MODERNO (G. VERDI)

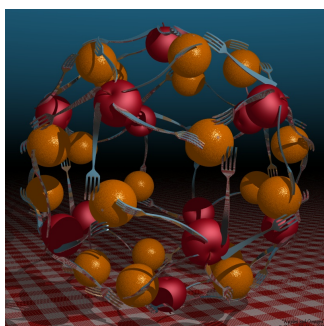


FIGURA 1. Manzanas y naranjas

Comenzamos mostrando una imagen (Figura 1) tomada de la página web de George W. Hart. Esta ilustración aparecía en el cartel anunciador de la edición 2003-04 del Seminario Permanente de Actualización en Matemáticas que organiza el Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja desde hace 25 años.

Se trata de un dodecaedro y un icosaedro cuyos vértices son naranjas y manzanas respectivamente. Cuando los organizadores del Seminario eligieron la imagen se nos ocurrió que podíamos preparar un pequeño trabajo sobre la proporción que rige la construcción de ambos poliedros: la Divina Proporción; quizá porque, como dice Luca Pacioli en el tratado [15] dedicado a ella, “*no hay nada en el intelecto que previamente no se haya ofrecido de alguna manera a los sentidos*”.

Nuestros sentidos se inclinan hacia lo que les resulta más agradable y atractivo, lo que les resulta bello. Ahora bien, ¿qué es la belleza? , ¿por qué unos objetos son bellos y otros no? Estas preguntas han tratado de ser respondidas muchas veces en diferentes culturas.

La idea más extendida es que la belleza podría consistir en las proporciones armoniosas de las dimensiones. Esta idea se atribuye a Pitágoras, quien habría descubierto el hecho de que ciertas proporciones aritméticas en los instrumentos musicales, como las longitudes de las cuerdas,

producen armonía de tonos. En la Figura 2 mostramos una ilustración de la *Theorica Musice*, de Gafurio [6], 1492, en la que aparecen los números marcando o dirigiendo la escala musical. Sobre la base de estas armonías, los antiguos griegos intentaron explicar también la belleza en las proporciones del cuerpo humano, en la arquitectura y otros ámbitos.



FIGURA 2. Escala musical

1.1. Pitágoras y los Pitagóricos. Recordaremos algunos aspectos de la geometría en la cultura helénica¹. Herodoto (485-425 a.C.) afirma que los orígenes de la geometría griega están en Egipto:

“... Dijeron también que este rey (Sesostris) dividió la tierra entre todos los egipcios de modo que a cada uno le tocara un cuadrángulo de igual tamaño y tomara de cada uno sus ingresos, estableciendo un impuesto que se exigía anualmente. Pero cuando el río invadía una parte de alguno, éste tenía que ir a él y notificar lo que había sucedido. Enviaba entonces supervisores, quienes tenían que medir en cuánto se había reducido el terreno, para que el propietario pudiera pagar sobre lo que le quedaba, en proporción al impuesto total que se había fijado. En esta forma, me parece que se originó la geometría y pasó entonces a Hélade (Grecia).”

La principal fuente de información que tenemos sobre la geometría griega es el *Sumario de Eudemo* de Proclo, que es un esbozo muy breve del desarrollo de la geometría griega desde los tiempos primitivos hasta Euclides (en torno a 300 a.C.). Proclo vivió en el siglo V d. C. pero tuvo acceso a varios trabajos históricos y críticos que ahora se han perdido; entre ellos, una historia completa de la geometría griega escrita por Eudemo, el cuál había sido alumno de Aristóteles.

¹Para una introducción a la geometría que también incluye aspectos históricos recomendamos la lectura de los libros de H.Eves [5]



FIGURA 3. Tales y Pitágoras

El primer gran matemático al que hace referencia es Tales de Mileto², véase la Figura 3, aprox. 624-546 a. C. . El segundo gran matemático que se cita en el Sumario es Pitágoras de Samos, 580-500 a. C. , véase la Figura 3. Ambos viajaron a Egipto y Mesopotamia. El primero pudo haber iniciado al segundo en la matemática³.

Pitágoras juega un papel decisivo en la historia de las matemáticas. Nació en la isla de Samos, colonia jónica en la costa del mar Egeo cercana a Mileto; su padre fue Menesarco. Se distinguen tres etapas en su vida. En la primera se destaca su relación con Tales; también pudo haber participado en los Juegos de la XLVIII Olimpiada, en los que habría obtenido la corona de olivo en las competencias de pugilato.

La segunda etapa corresponde a sus viajes, de los que regresa a Samos en la que gobierna el tirano Policrates. Por “divergencias” con éste, Pitágoras se exilia a Crotona, en el golfo de Tarento, al sur de la actual Italia y en donde se sitúa el inicio de la tercera etapa. En esta ciudad se asienta y crea la hermandad Pitagórica, fraternidad esotérica, dedicada a la práctica del ascetismo, la comunidad de bienes y el estudio de las matemáticas para obtener la realización de la armonía interior, acorde con la gran armonía del cosmos, a la que se accede por la gnosis numeral (“Todo está dispuesto conforme al Número”). En Crotona, Pitágoras vive en la casa de Milo, con cuya hija, Theano, se casa. De Theano se dice que fue la primera mujer matemática y que dirigió la hermandad después de la muerte de Pitágoras, a pesar de que en ella no se permitía la participación de las mujeres. Esta hermandad se extendió rápidamente y llegó a alcanzar el poder político en varias ciudades como Crotona o Síbaris, rival de la anterior y famosa en el mundo griego por sus riquezas y su vida lujosa.

²Uno de los siete sabios de Grecia junto con Pítaco de Mitilene, Bías de Priene, Cleóbulo de Linde, Periandro de Corinto, Quilón de Lacedemonia y Solón de Atenas (Platón en el diálogo Protágoras señala a Mirón en lugar de Periandro).

³ Como curiosidad señalemos que el siglo VI a. C. fue el de los grandes místicos; en ese periodo vivieron: Zoroastro (Zaratustra) (660-583 a. C.), Lao Tse (604-510 a. C.), Confucio (551-479 a. C.), Buda (560-477 a. C.) y Pitágoras (580-500 a. C.).

Los Pitagóricos, que se dividían en dos tipos: Matemáticos (conocedores) y Acusmáticos (oídores), recopilaron las enseñanzas del Maestro en el *Ieros Logos* (Discurso sagrado).

En Crotona se produce la primera gran rebelión contra los pitagóricos y durante una revuelta se incendia la casa de Milo, en la que aún vivía Pitágoras. Éste se refugia en Tarento y luego en Metaponto, donde muere. En Metaponto, años más tarde, hacia el 450 a. C., durante otras revueltas, mueren en un incendio gran parte de los miembros de la comunidad. Entre los que lograron salvarse se encuentran Filolao de Crotona, Hipaso de Metaponto e Hipócrates de Chios. Filolao fue acusado de haber divulgado los secretos matemáticos y filosóficos de la hermandad en sus escritos y de haber vendido a Dionisio de Siracusa tres libros que contenían la doctrina secreta del pitagorismo. Platón pudo tener acceso a estos escritos dada su amistad con el hermano de Dionisio, Dión. Arquitas de Tarento, discípulo de Filolao, que fue regente de Tarento y siete veces generalísimo, fue quien inició a Platón en el pitagorismo. Hipaso fue expulsado de la comunidad por dar a conocer a los profanos el secreto “*de la esfera de los doce pentágonos*” y de “*la naturaleza de lo conmensurable y lo inconmensurable*”. Sus excompañeros le construyeron una tumba para escenificar que para ellos ya había muerto; moriría años más tarde en un naufragio del que se sospecha que fueron responsables aquéllos. Parece que fue Hipaso quien planteó la existencia de magnitudes inconmensurables estudiando la figura del pentágono regular; sin embargo, Yámblico le concede el descubrimiento al propio Pitágoras.



FIGURA 4. Proporciones egipcias en relieves

Hemos mencionado que tanto Tales como Pitágoras habrían viajado a Egipto. Es muy probable que los constructores y decoradores del antiguo Egipto usasen algún tipo de teoría matemática de las proporciones. Se sabe que en torno al 600 a. C. estudiosos egipcios midieron los relieves en Sakkara, en la tumba del faraón Zoser, que fueron hechos hacia el 2800 a. C.. Sobre esta base construyeron un sistema de proporciones que más tarde fue ampliamente usado. Tal vez sea este

sistema lo que ahora podemos ver en muchos relieves egipcios como finas líneas sin significado aparente, véase la Figura 4.

1.2. Creación y belleza. Platón, 427-347 a. C., de quien ya hemos comentado su relación con el pitagorismo, nos ofrece en el *Timeo* (quizás el más platónico de sus diálogos según los expertos) su visión de construcción del Universo, del Cosmos (orden), en oposición al Caos.

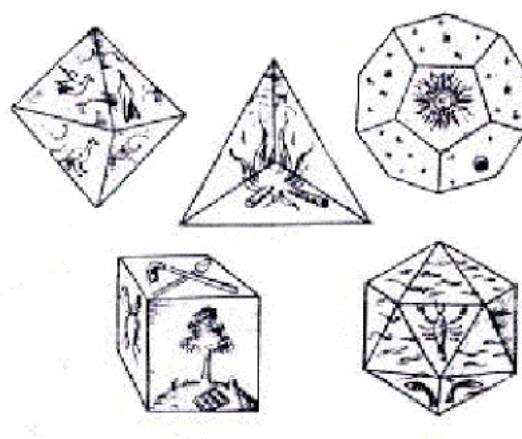


FIGURA 5. Dibujos de Kepler sobre Elementos y Cuerpos platónicos

Según Platón [16], el mundo real es una copia imperfecta del mundo de las ideas hecha por el Demiurgo, ser inteligente y bueno al que le atrae la belleza y trata de recrearla. Este personaje crea en primer lugar el alma del mundo y la esfera celeste (lo hace dándole forma esférica, la más perfecta) en cuyo centro está la Tierra. Después se ocupa de la materia con la que está hecho el mundo; se compone de cuatro elementos: fuego, tierra, aire y agua. Los elementos han de ser “sólidos” (pues las cosas no solamente son planas sino que tienen profundidad) y han de ser capaces de recomponerse unos en otros. Puesto que han de ser sólidos, esto es, limitados por planos y un plano está compuesto por piezas sencillas (triángulos), el Demiurgo elige de éstos los más bellos: el triángulo rectángulo isósceles (con dos piernas —catetos— iguales, es decir, la escuadra) y el triángulo rectángulo escaleno (cojo) que posee la propiedad de tener la hipotenusa de doble longitud que uno de sus catetos (el cartabón). A partir de seis de estos últimos triángulos construye el triángulo equilátero y, con estas piezas, el tetraedro, el octaedro y el icosaedro. Con cuatro triángulos rectángulos isósceles construye el cuadrado y con seis de éstos el cubo. Concluye, analizando las propiedades de los elementos y de los cuatro poliedros anteriores, que los átomos de tierra son cubos, los de agua icosaedros, los de aire octaedros y los de fuego tetraedros. Como le queda una última configuración regular

(el dodecaedro) la asocia con el cosmos, con la quintaesencia, véase la Figura 5.

La inscripción a la entrada de la Academia de Platón, que rezaba: “*Que no entre nadie que no sepa geometría*”, nos una idea del valor que Platón, fundamentalmente un filósofo, y quizás precisamente por ello, otorgaba al conocimiento matemático. La Figura 6 muestra una

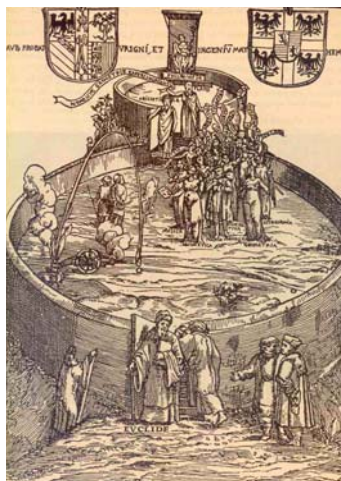


FIGURA 6. Ilustración representando a Platón en la Academia

ilustración de la obra *Della nova Scientia* de N. Tartaglia, 1537, que representa a Platón sujetando un lienzo con la leyenda citada dialogando con Aristóteles a la entrada de la Academia. La Figura 7 muestra una imagen del fresco “La Escuela de Atenas” de Rafael, 1510, que se encuentra en el Vaticano. En un marco renacentista esta obra representa dialogando, paseando o trabajando, a grandes sabios matemáticos y filósofos de la antigüedad griega como Platón (con el rostro de Leonardo), Aristóteles, Pitágoras, Euclides, Arquímedes, etc.

Como hemos podido comprobar anteriormente, la idea de belleza está presente en toda la creación platónica, relacionada con la de bondad, simplicidad y orden.

Esta idea de la belleza sigue considerándose a lo largo de la historia de la humanidad como vemos a continuación con algunos ejemplos:

Marco Vitruvio Polión (siglo I a. C.) decía que un edificio es bello cuando la apariencia de la obra es agradable y de buen gusto, y cuando sus miembros son de las debidas proporciones de acuerdo a los principios correctos de “simetría” (donde “simetría” significa “una concordancia correcta entre los miembros de la obra misma, y una relación entre las diferentes partes y el esquema general del conjunto con respecto a una cierta parte elegida como referencia”). Las ideas de Vitruvio sobre la belleza, basadas en la armonía de las proporciones, tanto en edificios como en el cuerpo humano, están contenidas en la



FIGURA 7. La Escuela de Atenas, obra de Rafael

obra *De architectura* [19], un tratado de diez tomos que mucho tiempo después sería estudiado y verdaderamente valorado por grandes artistas y arquitectos del Renacimiento. Para éstos, los cánones de belleza establecidos por Vitruvio fueron guía e inspiración de gran parte de sus obras.

En la temprana Edad Media, el estudio de la belleza solía ser clasificado como una rama de la teología. El argumento era que la belleza es un atributo de Dios. Un investigador notable fue San Agustín (354-430), según el cual la belleza consiste en unidad y orden que surgen de la complejidad⁴. Tal orden podría ser, por ejemplo, ritmo, simetría o simples proporciones. Véase Figura 8.

Santo Tomás de Aquino (1225 - 1274), también reflexionó sobre la esencia de la belleza. Pensaba que la belleza era el resultado de tres requisitos: integridad o perfección, armonía y claridad o brillantez.

⁴ Es sorprendente que con estas ideas sobre la belleza, San Agustín manifestara que las matemáticas son cosa diabólica: “Los buenos cristianos deben cuidarse de los matemáticos y de todos los que acostumbran a hacer profecías, aún cuando estas profecías se cumplan, pues existe el peligro de que los matemáticos hayan pactado con el diablo para obnubilar el espíritu y hundir a los hombres en el infierno”.

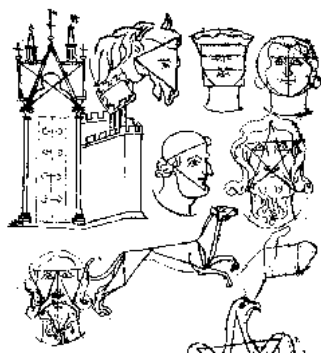


FIGURA 8. Proporciones medievales

El arquitecto y escritor del Renacimiento, Leon Battista Alberti (1404-1472), puso el énfasis en los atributos formales de los edificios y sus detalles, proporcionalidad y ornamentación. La belleza es *“una armonía de todas las partes, en cualquier sujeto en que aparezca, ensambladas con tal proporción y conexión, que nada podría añadirse, disminuirse o alterarse, si no es para peor”*.

Como curiosidad queremos añadir que el estudio de la belleza como una cualidad de los objetos fue reavivado con un enfoque diferente en 1928, cuando el matemático norteamericano George David Birkhoff (1884-1944) presentó la siguiente ecuación:

$$\text{valor estético} = \frac{\text{cantidad de orden}}{\text{complejidad del objeto}}$$

El mismo Birkhoff sometió a prueba la ecuación diseñando un vaso (Figura 9) que, en su opinión, tenía un gran valor estético.

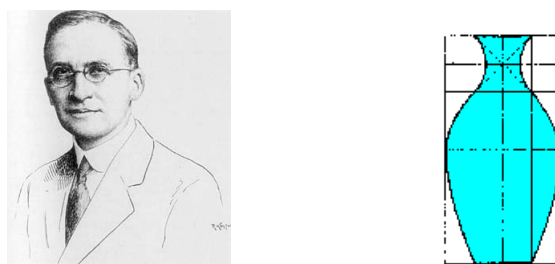


FIGURA 9. Birkhoff y su vaso

No es Birkhoff el único matemático que se preocupa por la belleza. Hardy decía que *“no hay lugar en el mundo para las matemáticas feas”*. ¿Cuáles son las matemáticas más bellas? Es difícil responder a esta pregunta, que se sigue formulando hoy en día.

Así, por ejemplo, el matemático ruso y medallista Fields E. Zelmanov, al ser preguntado en una entrevista (5 de Septiembre, 2001) para el periódico “El País” sobre cómo pueden distinguirse los problemas

matemáticos importantes, dice que deben ser “elegantes y bonitos”, y también afirma que “hay un sentido universal entre los matemáticos de lo que es bello”. Por ejemplo, para Kepler (1571-1630) la Geometría tenía “*dos grandes tesoros: uno el Teorema de Pitágoras; el otro la división de una línea en una proporción extrema y una media*”. En esta dirección, hacia 1989, David Wells publicó en el Mathematical Intelligencer un listado de los teoremas matemáticos considerados más bellos. En la actualidad puede encontrarse un listado similar en una de las páginas web citadas al final del trabajo (en la que además puede votarse por el teorema que más le guste a cada visitante). Reproducimos, por el orden de belleza en que allí aparecían cuando la visitamos, un listado de algunos de los teoremas referidos en esa página.

- 1) $e^{i\pi} + 1 = 0$
- 2) Fórmula de Euler: Para cualquier descomposición en celdas de una esfera de dimensión dos, se tiene que la suma del número de caras y el de vértices es igual al número de aristas más dos.
- 3) El número de primos es infinito.
- 4) Existen cinco poliedros regulares.
- 5) $\frac{\pi^2}{6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.
- 6) Una aplicación continua del disco unidad en sí mismo tiene un punto fijo.
- 7) $\sqrt{2}$ no es racional.
- 8) π es trascendente.
- 9) Todo plano dividido en regiones puede ser coloreado con cuatro colores.
- 10) Todo número primo de la forma $4n + 1$ se descompone de modo único como la suma de dos cuadrados.
- 13) Un icosaedro regular inscrito en un octaedro regular divide los ejes en la Razón Áurea.

Remarcaremos que los que ocupan los lugares 2, 4 y 13 tienen relación directa con el tema que estamos tratando y todos en los que aparece el número π tienen una relación indirecta, como veremos más adelante.

1.3. Experimento. Antes de continuar vamos a hacer un pequeño experimento. En la Figura 10 aparecen cuatro rectángulos pintados cada uno de diferente color. Pedimos al lector que, haciendo abstracción del color en que cada uno está pintado, piense cuál le resulta más agradable por su forma, por sus proporciones.

Confiamos en que la mayoría de los observadores haya elegido el rectángulo azul (inferior derecha). El rectángulo rojo (superior izquierda) es el que marca el formato 16/9, es decir, el de las televisiones panorámicas; el amarillo (superior derecha) es el 36/24 de las fotografías y diapositivas. El verde (inferior izquierda) es el habitual de las hojas

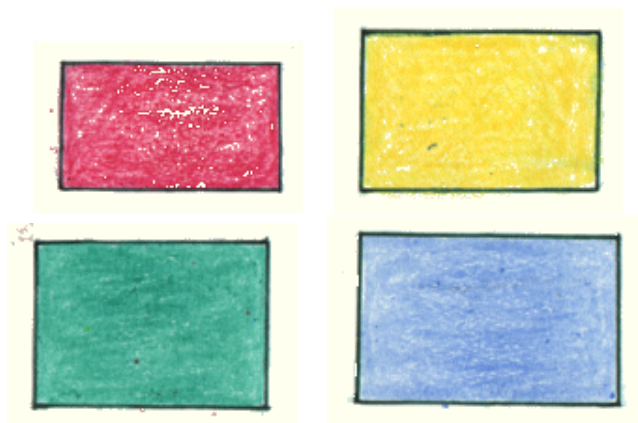


FIGURA 10. Rectángulos

A0, A1, A2, A3, A4..., es decir, el formato $\sqrt{2}$; se llama así porque si a y b denotan las longitudes de los lados de un rectángulo y se verifica que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, doblando este rectángulo por la mitad del lado más largo se obtienen dos rectángulos iguales del tipo $\sqrt{2}$. Del rectángulo azul, que es el del DNI y el de las tarjetas de crédito, y nos interesa especialmente, nos ocupamos a continuación.



FIGURA 11. Gustav Theodor Fechner

En 1876, Fechner⁵, Figura 11, inventor de la psicología física, estudió las ideas de belleza e hizo experimentos en su laboratorio sobre las preferencias de gente corriente sin ningún aprendizaje estético. Pidió a numerosas personas que escogieran entre diferentes rectángulos aquél cuya forma les agradase más. Los rectángulos que resultaron mayoritariamente elegidos fueron los que tenían proporciones similares a las

⁵Gustav Theodor Fechner (1801-1887) estudió Medicina en la Universidad de Leipzig, Alemania, y posteriormente fue profesor de Física en esta misma universidad. Fue el padre de la Psicofísica (vinculación de sensación y percepción con magnitudes asociadas a estímulos físicos). El interés de Fechner por la psicofísica derivaba de su esperanza en resolver con ella el clásico problema de la mente y el cuerpo. Fechner creía que había resuelto dicho problema, demostrando gracias a la psicofísica que mente y cuerpo son sólo dos aspectos distintos de una misma realidad subyacente.

del azul. Éstos poseen una importante propiedad geométrica que puede observarse en el de la Figura 12. Si se le quita el cuadrado formado con el lado más pequeño del rectángulo, la región que queda es otro rectángulo de las mismas proporciones que el original. Este tipo de rectángulos se llaman *áureos*.

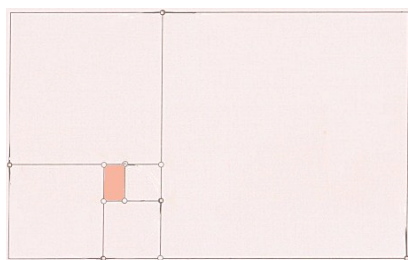


FIGURA 12. Rectángulos áureos

2. PROPORCIONES: EL NÚMERO DE ORO

Aunque hay muchas opiniones acerca de lo que es la belleza, buena parte de las mismas coinciden en que es la armonía en las proporciones. Estudiemos, pues, proporciones y volvamos de nuevo a las antiguas fuentes.

2.1. Proporciones. Los griegos entendían por proporción la igualdad de dos razones y por razón el cociente de dos magnitudes homogéneas⁶.

Como solemos hacer los matemáticos para tratar de cosas complicadas, como en realidad son las proporciones, comenzamos analizando los casos más sencillos.

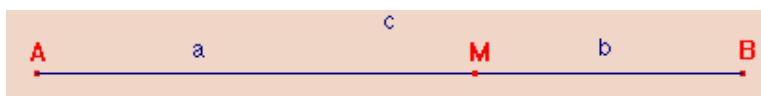


FIGURA 13.

Consideramos la figura geométrica más simple, un segmento con extremos A , B, y un punto M que esté en el segmento (Figura 13). Vamos a estudiar la forma en la que este punto M parte o divide al segmento

⁶Las magnitudes deben ser medidas y para ello se necesitan números. Las ciencias griegas que estudiaban el número eran: Aritmología (Mística del Número) que se ocupaba del número puro, Aritmética, que lo hacía con el número científico abstracto, y Cálculo, que trataba de números concretos.

original. Denotamos por a la longitud del segmento AM, por b la longitud del segmento MB, y por c la longitud del segmento AB. Podemos formar las siguientes 6 razones:

$$\frac{a}{b}; \frac{a}{c}; \frac{b}{a}; \frac{b}{c}; \frac{c}{a}; \frac{c}{b}$$

Obviamente, con estas 6 razones podemos formar las siguientes 15 proporciones:

$$(2.1) \quad \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \quad ; \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{a} \quad ; \quad \frac{b}{c} = \frac{c}{b}$$

$$(2.2) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{b} \quad ; \quad \frac{b}{a} = \frac{b}{c} \quad ; \quad \frac{a}{c} = \frac{c}{a}$$

$$(2.3) \quad \frac{a}{c} = \frac{c}{b} \quad ; \quad \frac{c}{a} = \frac{b}{c}$$

$$(2.4) \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad ; \quad \frac{c}{a} = \frac{c}{b} \quad ; \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$$

$$(2.5) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{a} \quad ; \quad \frac{b}{a} = \frac{a}{c}$$

$$(2.6) \quad \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad ; \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$

De cualquiera de las tres primeras proporciones se obtiene que $b = c$, es decir, que el punto M concide con el punto A, luego no hay partición del segmento. De las tres segundas se obtiene $a = c$, el punto M coincide con el punto B y tampoco hay partición. La igualdad propuesta en 2.3 es imposible, pues una razón es mayor que 1 y la otra menor que 1.

Nos quedan pues siete razones “vivas”. De 2.4 se sigue que $a = b$, es decir obtenemos una partición simétrica (M es el punto medio del segmento).

De 2.5 y de 2.6 se sigue que la longitud de AB se ha dividido en dos partes desiguales de modo que la mayor es a la menor como la suma de las dos es a la mayor:

$$\frac{b+a}{a} = \frac{a}{b}$$

Dicho de otra forma, el punto M divide al segmento AB en *media y extrema razón*. Esta igualdad puede escribirse: $b^2 + ab = a^2$ y, haciendo $\frac{a}{b} = x$, se obtiene la ecuación:

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

de soluciones:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

cuyo producto es -1 y cuya suma es 1 .

La primera de estas raíces suele denotarse mayoritariamente por ϕ en honor a Fidias (490-432 a. C.). Éste fue el escultor más genial de la antigüedad clásica y su amistad con Pericles le permitió realizar obras de gran importancia para la acrópolis de Atenas. La Figura 14, parte del lienzo “Fidias y el friso del Partenón”, realizado por el pintor inglés Alma Tadema en 1868, representa a Fidias mostrando a Pericles y su hetaira Aspasia el friso de las Panateneas del Partenón. El equilibrio en las proporciones, la belleza formal idealizada y la perfección técnica caracterizaron todas las obras de Fidias.

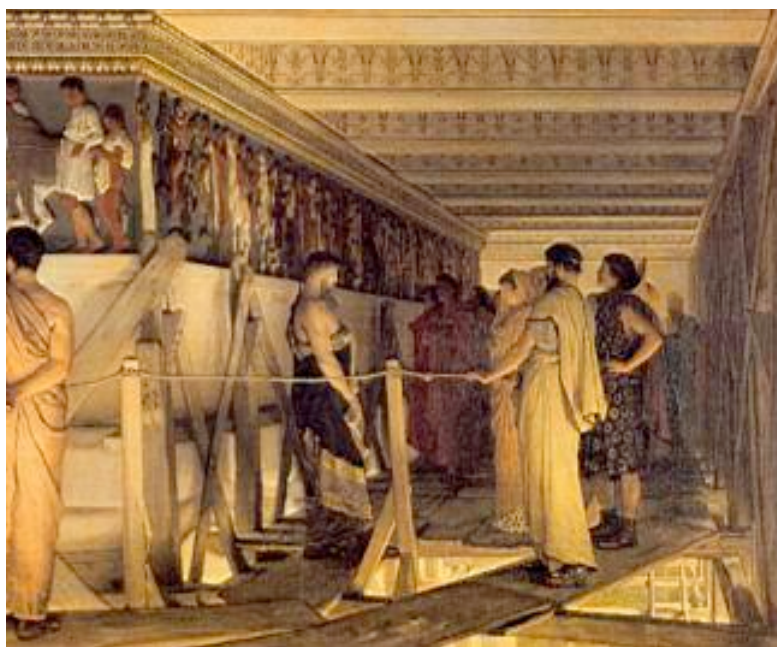


FIGURA 14. Fidias mostrando a Pericles el friso del Partenón

El número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ obtenido al dividir un segmento en media y extrema razón, es comúnmente llamado, se dice que por primera vez por Leonardo da Vinci (1452-1519), *el número áureo* o *el número de oro*.^{7 8}

⁷ Obviamente ϕ es un número irracional ya que es solución de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, cuyas únicas posibles raíces racionales son 1 y -1 .

⁸ ϕ es un número algebraico (no es trascendente). Recordemos que los números algebraicos son aquellos que pueden ser raíces de una ecuación algebraica de coeficientes racionales cuyos términos sean potencias enteras de x . Algunos de estos números (como es el caso de ϕ) pueden ser representados mediante una construcción euclidiana, es decir, con regla y compás.

De aquí se deriva que ciertas figuras geométricas relacionadas con el número ϕ reciban el calificativo de áureas. Así los rectángulos, señalados en la Figura 12, con la propiedad de que al quitarles el cuadrado formado por el lado más pequeño queda un rectángulo de las mismas proporciones que el original son llamados rectángulos áureos y la espiral que se construye como se indica en la Figura 15 se denomina *espiral áurea (rectangular)*. Notemos que mediante el mismo mecanismo de replicación, en sentido creciente o decreciente, se obtiene esta espiral como una sucesión de arcos de circunferencias, inscritos en los sucesivos rectángulos áureos, tales que las correspondientes cuerdas consecutivas están en proporción áurea ϕ y formando un ángulo de 90° .

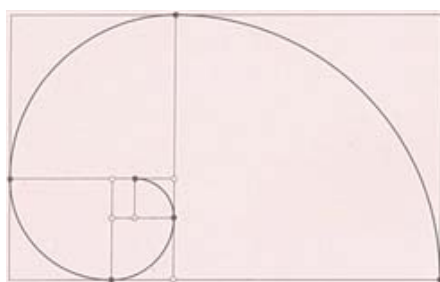


FIGURA 15. Rectángulos y espiral rectangular áureos

De modo parecido, se denominan *triángulos isósceles áureos* a aquellos en los que la razón entre uno de los lados iguales y la base es ϕ . Son aquellos en los que el ángulo opuesto a la base es de 36° y tienen la interesante propiedad geométrica de que si bisecamos uno de los ángulos de la base obtenemos un triángulo isósceles áureo y un *triángulo isósceles inversamente áureo* en el que la razón de uno de los lados iguales y la base es $\frac{1}{\phi}$. Replicando de nuevo esta construcción, en sentido creciente o decreciente, aparece otra bellísima *espiral áurea (triangular)* formada por una sucesión de arcos de circunferencias, que van circunscribiendo a los sucesivos triángulos áureos y tales que las correspondientes cuerdas consecutivas están también en proporción áurea ϕ , pero ahora forman un ángulo de 72° .

Estas hermosas espirales áureas guardan un cierto parecido con las extraordinarias espirales logarítmicas de Bernouilli (1654-1705), véase la Figura 17, aunque desde el punto de vista matemático son esencialmente diferentes.

Cualquier espectador queda fascinado por la belleza de todas estas espirales que posiblemente emana de su poder para crearse, siguiendo una misma regla en cada caso, desde lo infinitesimal hasta lo infinito⁹.

⁹Precisamente el epitafio que Bernouilli pidió para su tumba fue el de “Eadem mutata resurgo (aunque cambiada surjo de nuevo igual)”. Es un hecho bien conocido que curiosamente la espiral grabada erróneamente en su tumba es una espiral de Arquímedes $\rho = a\theta$.

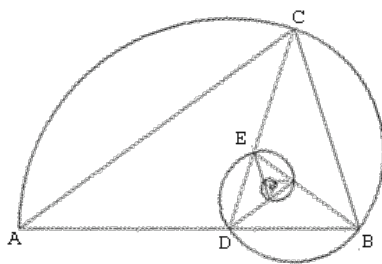


FIGURA 16. Triángulos isósceles y espiral triangular áureos

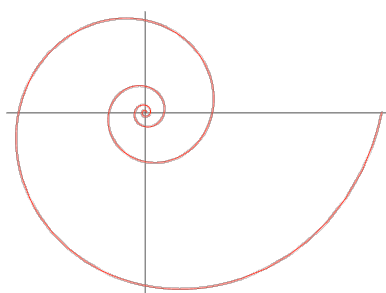


FIGURA 17. Espiral logarítmica

En las áureas la regla procede de ϕ y en las logarítmicas (cuya fórmula en polares es $\rho = ae^{b\theta}$, a, b constantes) procede obviamente de e . Las Figuras 18, 19 y 20 muestran como la naturaleza se nos presenta en ocasiones bajo la forma de estas maravillosas espirales.



FIGURA 18. Nautilus y caballito de mar

2.2. Orígenes de ϕ . La división de un segmento en dos de tal manera que la medida del segmento dividida por la medida del trozo mayor



FIGURA 19. Concha interna de una espírua

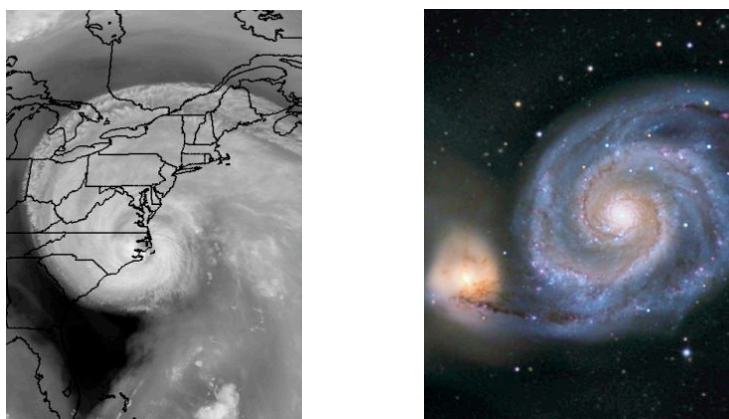


FIGURA 20. Huracán Isabel y galaxia M51

sea igual que la medida del trozo mayor dividida por la del trozo menor, que origina ϕ , viene propuesta en la Proposición 30 del libro VI de los *Elementos* de Euclides [4]: “*Dividir una recta finita dada en extrema y media razón*”. Si bien esta proporción aparece antes en la Proposición 11 del libro II: “*Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante*”.

Los *Elementos* de Euclides, una colección de trece libros sobre geometría y aritmética, está entre las obras más editadas, estudiadas y divulgadas en la historia de la humanidad; desde su primera impresión en 1482¹⁰ se han realizado más de mil ediciones. La obra de Euclides

¹⁰Un ejemplar de esta primera edición de los *Elementos* de Euclides se guarda en el Monasterio de Yuso de San Millán de la Cogolla (La Rioja). Este ejemplar, bien conservado, presenta en sus márgenes admirables figuras geométricas. Como curiosidad señalamos que en el citado monasterio, declarado patrimonio de la humanidad, aparecieron por primera vez unos escritos en castellano, las *Glosas Emilianenses*, primera referencia de la lengua española.

(véanse las imágenes de la Figura 21 que lo representan con los elementos básicos de las llamadas construcciones euclidianas: la regla y el compás) es fundamental en la historia de las matemáticas; en ella el autor ordenó deductivamente los conocimientos matemáticos de la época y durante más de veinte siglos ha representado el rigor y la norma en la geometría y otras disciplinas.



FIGURA 21. Euclides con regla y compás

En la Figura 22 se explican dos sencillas maneras de obtener la división de un segmento en extrema y media razón y de construir un rectángulo áureo (el cociente de las longitudes de sus lados es ϕ).

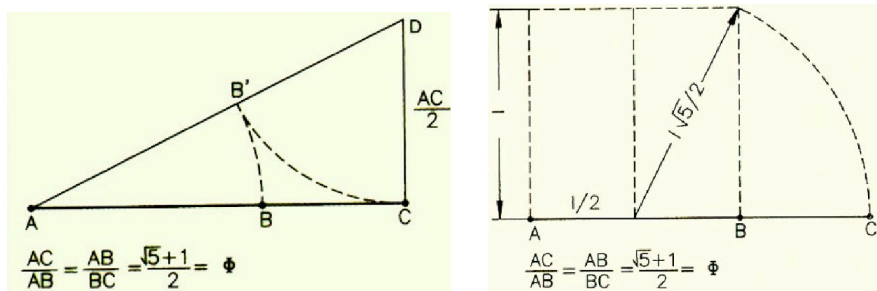


FIGURA 22. División en media y extrema razón

¿Por qué los griegos se preocuparon de dividir un segmento en extrema y media razón? La contestación tiene que ver con la armonía, la belleza, la cosmología, la primera gran crisis de fundamentos matemáticos, la creación del método axiomático-deductivo, etc. Trataremos de dar algunas ideas al respecto.

Antes de Grecia la matemática tenía una carácter empírico. Carecía de la idea de demostración. Esto no quiere decir que no obtuviese logros importantes, pero desde luego es en Grecia donde las matemáticas toman su carácter actual, convirtiéndose en la ciencia axiomático-deductiva que es hoy.

Como ya hemos comentado antes, el primer gran matemático del que tenemos noticia es Tales y el segundo Pitágoras, quien, según dicen, oyendo los sonidos de martillos de diferentes tamaños, concibió la idea de la relación de los números con la armonía musical. Se dio cuenta de que las longitudes de una cuerda que proporcionan una nota, su cuarta, su quinta y su octava, son proporcionales a los números 12, 9, 8 y 6, o bien a 1 , $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$, es decir, que las notas fundamentales están determinadas por 1 , $\frac{1}{2}$, su media aritmética y su media armónica¹¹. O, dicho de otra manera, están determinadas por los números 1, 2, 3 y 4 veáse Figura 23.

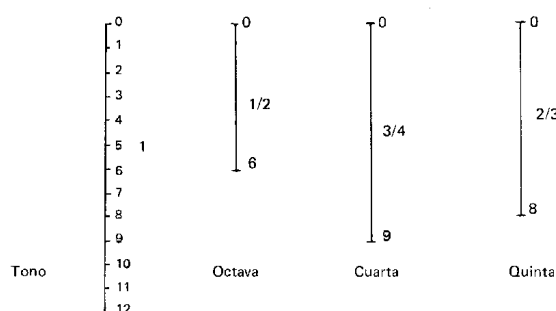


FIGURA 23. Números y música

Estos hechos, y otros, condujeron a Pitágoras y sus discípulos a buscar el orden y la armonía del universo en la ciencia de los números. En su juramento de silencio nombraban al Maestro (Pitágoras) y a la Tetracto, que era la sucesión de los 4 primeros números naturales, considerada como sucesión y como conjunto:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

10 es el cuarto número triangular (ver subsección 4.1) y tiene las cualidades trascendentes de la Década (número simbólico del Universo). Su mitad, la Péntada, característica del cinco, participa de la esencia e importancia de la década y es también el número de Afrodita, diosa de la unión fecundadora, del amor generador, arquetipo abstracto de la generación. En efecto, 5 es combinación del primer número par, femenino (dos, díada), y del primer número impar distinto de uno (reservado para Dios), masculino (tres, tríada). La péntada es también el número de la armonía en la salud y la belleza realizadas en el cuerpo humano. Su imagen gráfica es el pentágono regular o el pentagrama contenido

¹¹Recordemos que si m es la media aritmética de dos números a y b , entonces la media armónica c de a y b es el número que verifica que $cm = ab$; es decir, que el inverso de c es la media aritmética de los inversos de a y b .

en él, respecto a los cuales vamos a analizar ahora algunas relaciones numéricas y la forma en que pudieron descubrirse las magnitudes inconmensurables, o sea, los números irracionales.

Dos son las hipótesis: la primera, de sobra conocida, es la relación entre la diagonal y el lado del cuadrado; la segunda, es la relación entre la diagonal del pentágono y el lado del mismo. Esta relación se obtiene mediante un proceso similar al del algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de dos números (lo que los griegos llamaban la antipharesis). Iniciando el proceso en la relación de la diagonal con el lado y repitiéndolo tres veces, se llega a la misma relación de la diagonal del pentágono que determinan las diagonales del pentágono original y su lado. De tal manera que el proceso se repite indefinidamente sin llegar a ningún “divisor” común.

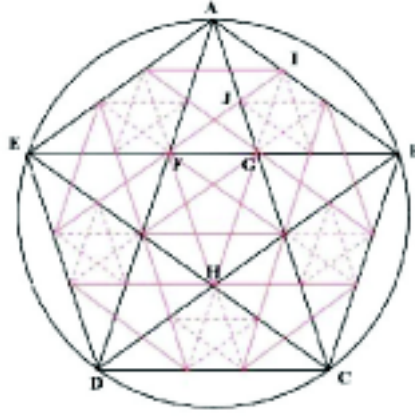


FIGURA 24. Relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular

Vamos a hacer, en la Figura 24 la antipharesis de la diagonal del pentágono y su lado con el objetivo de conseguir el segmento que “mide” a los dos. En la Figura 24 se observa que:

- i) $EB = EG + GB$; notar que $EG = EA$, luego

$$EB = EA + GB.$$

La diagonal del pentágono contiene al lado del mismo y le sobra “el trozo pequeño” de la división que produce en ella otra diagonal.

- ii) $EA = EF + FG$; notar que $EF (= HG)$ es la diagonal del pentágono determinado por las diagonales y FG el lado del mismo
 iii) $HG = HK + KG$, donde K juega un papel análogo al que antes jugaba G ; ahora bien, $HK = FG$, luego

$$HG = FG + KG$$

que es exactamente la misma relación que la obtenida en el primer paso.

Es obvio que este proceso puede seguirse indefinidamente. Es decir, jamás encontraremos un segmento que esté contenido un “número exacto” de veces en la diagonal y en el lado. Por lo tanto la diagonal y el lado de un pentágono regular son segmentos inconmensurables.

Por otra parte, ¿cuál es entonces la relación entre la diagonal y el lado? Veamos:

Notemos que los triángulos EAB y BGA son semejantes; como consecuencia:

$$\frac{EB}{AB} = \frac{AB}{GB}$$

Entonces, haciendo $EG = a$ y $GB = b$, se obtiene:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Es decir, la relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular es el número áureo ϕ . Así que bien pudo haber sido ϕ uno de los primeros números irracionales conocidos.

Saber de la existencia de números “irracionales”, es decir, magnitudes que no podían medirse con los números enteros y fraccionarios conocidos por los antiguos griegos, ponía en cuestión para los pitagóricos una de las enseñanzas fundamentales del Maestro, según la cuál la esencia de todas las cosas eran los números. Quizás éste fue el motivo principal de que los pitagóricos rodearan a estos nuevos entes, no regidos por las leyes de los números conocidos, de misterio y secreto.

De hecho el pentagrama, una estrella en la que cada una de sus cinco puntas determina con las dos opuestas un triángulo isósceles áureo, llegó a ser el símbolo de los Pitagóricos y también lo ha sido de otras muchas sociedades secretas, cabalísticas, religiosas, satánicas, etc. Por otra parte, el pentágono y el pentagrama aparecen en la naturaleza (véase la Figura 25) y han sido utilizados como base de numerosas

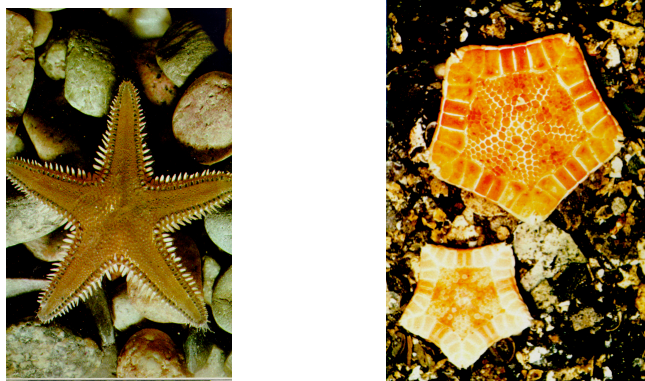


FIGURA 25. Estrellas de mar pentagonales

obras artísticas como, por ejemplo, en la Sagrada Familia de Miguel Ángel (véase la Figura 26) o en los bocetos que Dalí realizó para su “Leda Atómica”¹² (véase la Figura 27).

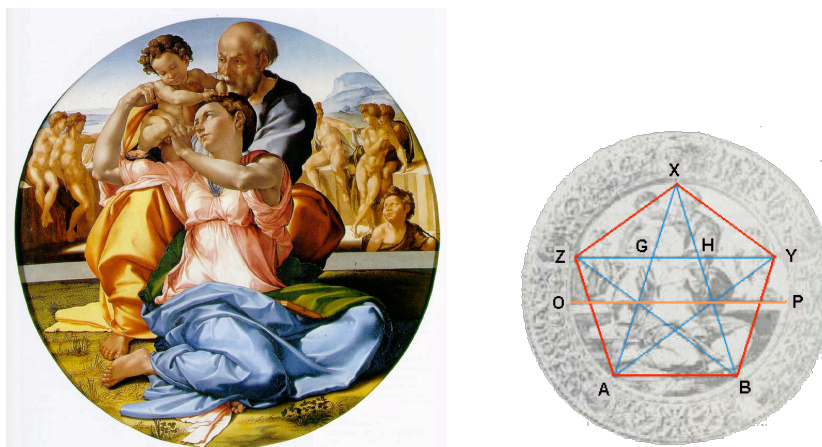


FIGURA 26. La Sagrada Familia y su geometría pentagonal



FIGURA 27. Leda Átomica y boceto pentagonal

¹² Este cuadro, de 1949, inicia el periodo de “realismo cuántico” en la obra de Dalí, quien, impresionado por explosión de la bomba atómica en 1945, comienza una etapa de reflexión sobre el átomo en la que concibe que la vía del misticismo le llevaría al entendimiento y dominación de las leyes escondidas en las cosas, a la verdad, perfección y belleza. Refiriéndose a Gala (a quien Dalí consideraba el único ser, junto con él, “capaz de moderar o exaltar matemáticamente mi divina locura”) el pintor dice que la “Leda atómica” es: “... una glorificación de Gala, la diosa de mi metafísica, ..., el cuadro clave en nuestras vidas” .

3. PROPIEDADES DE ϕ

A continuación señalamos algunas de las propiedades que ponen de manifiesto parte de la belleza matemática que encierra el número de oro.

- i) $\phi^2 = 1 + \phi$.
- ii) $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.
- iii) $\phi = 1,618\dots; \frac{1}{\phi} = 0,618\dots; \phi^2 = 2,618\dots$
- iv)

$$\begin{array}{rcl} \phi^2 & = & 1 + \phi \\ \phi^3 & = & \phi + \phi^2 \\ \phi^4 & = & \phi^2 + \phi^3 \\ \phi^5 & = & \phi^3 + \phi^4 \\ \vdots & = & \vdots + \vdots \\ \phi^n & = & \phi^{n-1} + \phi^{n-2} \end{array}$$

Esta relación es válida para valores negativos y fraccionarios de los exponentes. Notar que esta progresión geométrica $1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots$, cuya razón es ϕ , verifica que cada término es la suma de los dos anteriores. En realidad esto es válido para cualquier progresión geométrica cuya razón sea ϕ . Por estos motivos, suele decirse que esta serie es a la vez multiplicativa y aditiva, esto es, participa al mismo tiempo de la naturaleza de una progresión geométrica y de una aritmética.

v)

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots}}}}}$$

Para obtener esta ecuación basta aplicar “indefinidamente” la fórmula $\phi^2 = 1 + \phi$.

vi)

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Para obtener ésta basta aplicar “indefinidamente” $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

vii)

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Consecuencia inmediata de vi).

viii) Si consideramos la “sucesión” infinita

$$\dots, \phi^{-n}, \dots, \phi^{-2}, \phi^{-1}, 1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \phi^6, \phi^7, \phi^8, \phi^9, \dots, \phi^n, \dots$$

entonces, teniendo en cuenta iv), la “sucesión” de sus diferencias primeras es de nuevo

$$\dots, \phi^{-2}, \phi^{-1}, 1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \phi^6, \phi^7, \phi^8, \phi^9, \dots, \phi^n, \dots$$

Evidentemente, lo mismo ocurre con las diferencias segundas, terceras, etc.

ix)

$$\begin{aligned} \phi^0 &= 1 \\ \phi^1 &= 1 + \frac{1}{\phi} \\ \phi^2 &= 2 + \frac{1}{\phi} \\ \phi^3 &= 3 + \frac{2}{\phi} \\ \phi^4 &= 5 + \frac{3}{\phi} \\ \phi^5 &= 8 + \frac{5}{\phi} \\ \phi^6 &= 13 + \frac{8}{\phi} \\ \vdots &= \vdots + \vdots \end{aligned}$$

Notemos que en la segunda y tercera columna, en los numeradores, aparece la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...,

x)

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ \phi^2 &= \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \\ \phi^3 &= \frac{1}{2}(4 + 2\sqrt{5}) \\ \phi^4 &= \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}) \\ \phi^5 &= \frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5}) \\ \phi^6 &= \frac{1}{2}(18 + 8\sqrt{5}) \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Notemos que en la segunda columna aparece la sucesión 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... y en la tercera columna la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... ,

xi) Recordemos que $\psi = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. Entonces:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \\ \psi^2 &= \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \\ \psi^3 &= \frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{5}) \\ \psi^4 &= \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5}) \\ \psi^5 &= \frac{1}{2}(11 - 5\sqrt{5}) \\ \psi^6 &= \frac{1}{2}(18 - 8\sqrt{5}) \\ \vdots &= \vdots\end{aligned}$$

xii) Sumando las igualdades x) y xi) obtenemos:

$$\begin{aligned}\phi + \psi &= 1 \\ \phi^2 + \psi^2 &= 3 \\ \phi^3 + \psi^3 &= 4 \\ \phi^4 + \psi^4 &= 7 \\ \phi^5 + \psi^5 &= 11 \\ \phi^6 + \psi^6 &= 18 \\ \vdots &= \vdots\end{aligned}$$

xiii) y restándolas:

$$\begin{aligned}\phi - \psi &= \sqrt{5} \\ \phi^2 - \psi^2 &= \sqrt{5} \\ \phi^3 - \psi^3 &= 2\sqrt{5} \\ \phi^4 - \psi^4 &= 3\sqrt{5} \\ \phi^5 - \psi^5 &= 5\sqrt{5} \\ \phi^6 - \psi^6 &= 8\sqrt{5} \\ \vdots &= \vdots\end{aligned}$$

3.1. Las sucesiones de Fibonacci y Lucas. Las sucesiones

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

y

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, ...

que han aparecido repetidamente en la subsección anterior son, respectivamente, las llamadas sucesiones de Fibonacci y de Lucas.

El primero de estos matemáticos, Leonardo de Pisa (Figura 28), conocido como Fibonacci (hijo de buen carácter) nació en Pisa hacia 1170 y murió alrededor de 1250. Estuvo en contacto con la cultura árabe y



FIGURA 28. Leonardo de Pisa (Fibonacci) y su sucesión

escribió, además de *Practica Geometriae* (1220) y *Liber quadratorum* (1225), el *Abaci* en 1202, del cual sólo se conserva la versión de 1228. En él, entre otras cosas, resalta la importancia del sistema de numeración indoarábigo¹³. En las páginas 123 y 124 de este libro propone el conocido problema sobre el nacimiento de conejos (véase la Figura 28) que da lugar a esta famosa sucesión. Como es bien conocido el límite de los cocientes de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci es el número ϕ . Esto hace que ciertas construcciones donde intervienen fenómenos de replicación relacionados con el número áureo puedan aproximarse mediante los términos de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo, el crecimiento de una espiral áurea rectangular puede aproximarse mediante una espiral obtenida a partir de arcos circulares correspondientes a cuadrados cuyos lados son los términos de la sucesión de Fibonacci (véase la Figura 29). Como en la espiral áurea rectangular, el ángulo formado por dos cuerdas sucesivas es de 90° y ahora la razón de sus longitudes es cada vez más próxima al número ϕ .

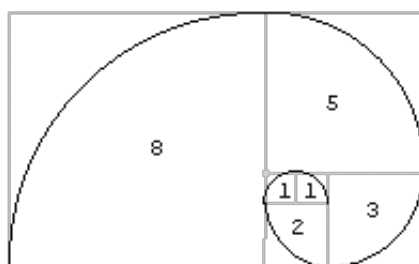


FIGURA 29. Espiral áurea de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci aparece en multitud de ejemplos en la naturaleza. La forma en que se ordenan las semillas, pétalos, hojas, ramas,

¹³Como curiosidad señalamos que el primer documento del occidente europeo en el que aparecen escritas las cifras indoarábigas, del que se tiene noticia, es el *Códice Vigilanus*, del siglo X. El documento fue escrito por el monje Vigila en el desaparecido monasterio de San Martín que estaba situado en Albelda (La Rioja).

brotos y frutos en numerosas plantas sigue en cada caso unas reglas de empaquetamiento, relacionadas en ocasiones con el número áureo, que se mantienen durante el periodo de crecimiento. Por ejemplo, en el romanesco (obsérvese su estructura fractal) que aparece en la izquierda de la Figura 30 hay 13 espirales hacia la derecha y 21 hacia la izquierda. El girasol de la derecha tiene 21 espirales hacia la izquierda y 34 hacia la derecha. En ambos casos, son números consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

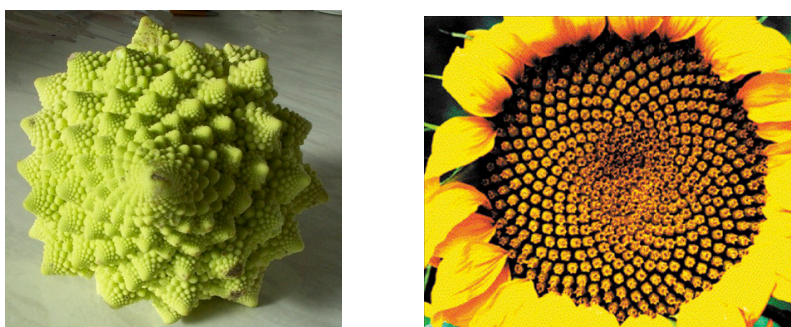


FIGURA 30. Flores de romanesco y girasol



FIGURA 31. F. Edouard Anatole Lucas

El segundo de los matemáticos mencionados anteriormente, Francois Edouard Anatole Lucas (1842-1891) (Figura 31), es conocido por sus resultados en teoría de números y en particular por haber estudiado la sucesión de Fibonacci. Probó (¡sin ordenador!) que el número de Mersenne

$$2^{127} - 1 = 170141183460469231731687303715884105727$$

es primo. Escribió entre 1882 y 1894 los cuatro tomos de *Récréations mathématiques*, famoso libro de pasatiempos matemáticos, y fue el inventor del juego “Las Torres de Hanoi”, que apareció en 1883 como inventado por M. Claus (acrónimo de Lucas).

4. RELACIONES DE ϕ

4.1. Triángulo de Pascal. Recordemos que $\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$. Aplicando reiteradamente esta igualdad obtenemos la siguiente tabla:

$$\begin{aligned}
 \phi^n &= 1\phi^n \\
 \phi^n &= 1\phi^{n-1} + 1\phi^{n-2} \\
 \phi^n &= 1\phi^{n-2} + 2\phi^{n-3} + 1\phi^{n-4} \\
 \phi^n &= 1\phi^{n-3} + 3\phi^{n-4} + 3\phi^{n-5} + 1\phi^{n-6} \\
 \phi^n &= 1\phi^{n-4} + 4\phi^{n-5} + 6\phi^{n-6} + 4\phi^{n-7} + 1\phi^{n-8} \\
 \phi^n &= 1\phi^{n-5} + 5\phi^{n-6} + 10\phi^{n-7} + 10\phi^{n-8} + 5\phi^{n-9} + 1\phi^{n-10} \\
 \phi^n &= \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots
 \end{aligned}$$

Fijándonos en los coeficientes de la parte derecha de las igualdades, queda el triángulo de Pascal

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & & & & & & & \\
 1 & 1 & & & & & & \\
 1 & 2 & 1 & & & & & \\
 1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Como ya es conocido, cada una de las filas del triángulo son los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton correspondiente. Lo que

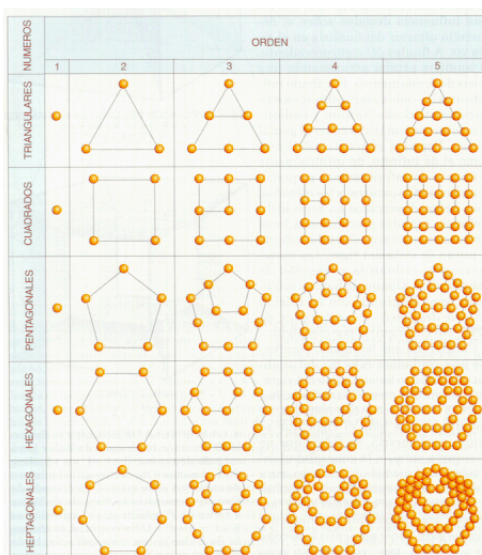


FIGURA 32. Números poligonales

no es tan conocido es que en la segunda columna aparecen los números

naturales n , en la tercera los números *triangulares*

$$\frac{n(n+1)}{2!}$$

en la cuarta los números *tetraédricos* o *cuadrangulares*

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}$$

en la quinta los *pentaédricos* o *pentagonales*

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}$$

etc. Véase la Figura 32

4.2. Triángulos rectángulos. Es bien conocido que el triángulo rectángulo 3, 4, 5 es esencialmente el único cuyos lados están en progresión aritmética¹⁴.

Nos preguntamos ahora cuántos triángulos rectángulos existen de tal manera que sus lados estén en progresión geométrica. Llamemos a y b a los catetos y c a la hipotenusa. Se verifica, por una parte, que:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

y, por otra, al estar los lados en progresión geométrica, que:

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a}; \quad ca = b^2.$$

Es decir

$$c^2 = a^2 + ac.$$

Como consecuencia,

$$\frac{c}{a} = \phi; \quad \frac{c}{b} = \frac{b}{a} = \sqrt{\phi} = 1,272 \dots$$

Es decir, el único triángulo rectángulo cuyos lados están en progresión geométrica es (esencialmente) aquél cuya razón es $\sqrt{\phi}$. Este tipo de triángulos rectángulos son llamados, en muchas ocasiones, *triángulos rectángulos áureos*; en ellos el mayor de sus ángulos agudos vale $51^\circ 50' \dots$

¹⁴Los agrimensores egipcios ya usaban cuerdas divididas en 12 partes iguales con el fin de “construir” ángulos rectos.

4.3. Relaciones “trascendentes” de ϕ . Vamos a analizar si el número de oro tiene alguna relación con los dos números trascendentes más importantes de las matemáticas: e y π . Para ello vamos a recordar algunos desarrollos de estos últimos:

i) $e = 2,71828128\dots$
 ii)

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

iii)

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

iv)

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}$$

v) $\pi = 3,14159265\dots$

vi)

$$\pi = \frac{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8^2 \times \dots}{3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 9^2 \times \dots}.$$

vii) Recordemos también que

$$\frac{\pi^2}{6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

viii)

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots +$$

ix)

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \frac{11^2}{2 + \frac{13^2}{2 + \dots}}}}}}}$$

4.3.1. Relaciones con e .

- De la relación de ϕ con el triángulo de Pascal, obtenemos una segunda relación con el número e . Cada término de la sucesión cuyo límite es e , dada en ii), es un binomio de Newton y por tanto genera coeficientes que son los números de las filas del triángulo de Pascal.
- Otra similitud es que la función e^x es igual que sus sucesivas derivadas y hemos puesto de manifiesto en viii) de la sección 3 que la “sucesión” ϕ^n , $n \in \mathbb{Z}$, coincide con las de sus diferencias finitas.

4.3.2. Relaciones con π .

- Evidentemente hay una relación indirecta entre ϕ y π que viene dada a través de e . Basta recordar las dos siguientes relaciones:

$$1 + e^{i\pi} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

- Una curiosa segunda relación se debe a los siguientes hechos:

$$\frac{4}{\pi} = 1,273\dots \quad \text{y} \quad \sqrt{\phi} = 1,272\dots$$

Los cuadrados de los inversos son:

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0,617\dots \quad \text{y} \quad \frac{1}{\phi} = 0,618\dots$$

5. VOLVAMOS A EGIPTO

En 1840, el general Howard Vyse midió el ángulo en la base del triángulo meridiano de la gran pirámide del Gizeh y obtuvo que ese ángulo es precisamente $51^\circ 50'$, es decir, el semitriángulo “central” de

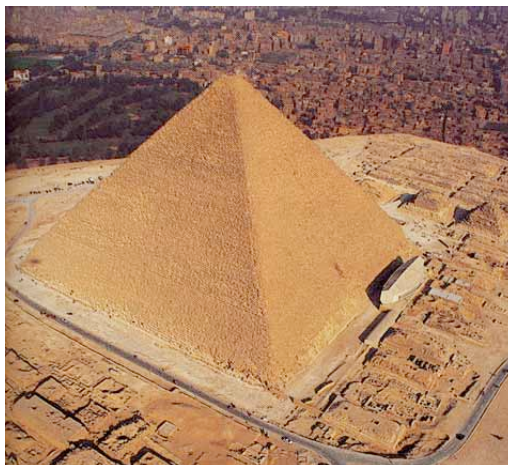


FIGURA 33. La Gran Pirámide de Keops

la gran pirámide es semejante al triángulo rectángulo áureo . Piazzzi-Smyth¹⁵ encontró la aproximación 148,208 m para la altura de la gran pirámide y 232,805 m para el lado de la base.

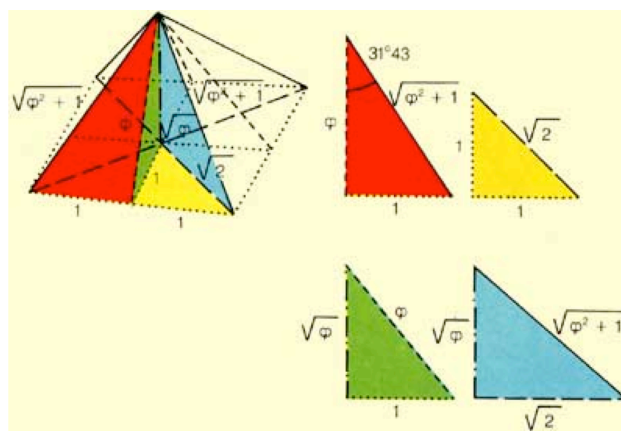


FIGURA 34. Triángulo meridiano de la Pirámide de Keops

¹⁵Charles Piazzzi Smyth (Astrónomo Real de Escocia, denominación que hasta no hace mucho otorgaba la Corona británica a sus astrónomos más eminentes) organizó un experimento en el Monte de Guajara, en la isla de Tenerife, a 2.715 m de altitud (cumbre más elevada del Teide, al sur de la Caldera de las Cañadas). El principal objetivo de esta expedición era determinar cómo podrían mejorar las observaciones astronómicas eliminando el efecto de la baja atmósfera. Además, en esta expedición se tomaron medidas geológicas y metereológicas de la zona, observaciones de la Luna (las primeras infrarrojas), de los planetas, de estrellas dobles y de la radiación ultravioleta del Sol.

Ahora bien, haciendo las cuentas oportunas con una cifra decimal, se obtiene, según se tome por exceso o por defecto en la base:

$$\frac{148,2}{116,5} = 1,272 \quad ; \quad \frac{148,2}{116,4} = 1,273$$

lo que, a partir de esas mediciones, ha hecho ver en la construcción de la gran pirámide diferentes relaciones, unas veces con la razón áurea ϕ y otras con π . Es decir, si llamamos h a la altura de la gran pirámide, $2a$ al lado de la base y c a la hipotenusa del triángulo meridiano formado por a y h (en la Figura 34 el triángulo meridiano es el verde; es decir, el primero de la fila inferior), se puede suponer que los constructores de la gran pirámide hayan querido reproducir:

$$\frac{c}{h} = \frac{h}{a} = \sqrt{\phi}.$$

También es posible pensar que lo que realmente han querido reproducir es:

$$\frac{h}{a} = \frac{4}{\pi}$$

lo que implica:

$$8a = 2\pi h$$

y como consecuencia se obtiene que el cociente entre el área de la base ($4a^2$) y el área de la sección meridiana (ha) de la gran pirámide es precisamente π .

Igualmente se obtiene que el perímetro de la base ($8a$) es precisamente el perímetro de la circunferencia de radio h . Y por tanto, según esta interpretación, el constructor de la gran pirámide “habría conseguido” la cuadratura del círculo.

Algunos egiptólogos (Piazzzi-Smyth, Petrie) defendieron la teoría de π . Sin embargo otros (W. Price) defendieron la teoría áurea. Parece más probable esta última, pues emanaría de una construcción geométrica más rigurosa. El abad Moreux, autor de *La science mystérieuse des Pharaons*, dice: “*Herodoto relata que los sacerdotes egipcios le habían enseñado que las proporciones establecidas para la Gran Pirámide entre el lado de la base y la altura eran tales que el cuadrado construido sobre la altura vertical era exactamente igual al área de cada una de las caras triangulares*”. Traduciendo esto a lenguaje matemático se obtiene la hipótesis áurea. Curiosamente, el abad Moreux era partidario de la tesis de π .

6. LA DIVINA PROPORCIÓN

Ya hemos señalado que el número ϕ , como la sección proporcionada por la división de un segmento en media y extrema razón, se conoce desde antiguo, se ha utilizado como canon de belleza, ha guiado la construcción de muchos edificios y ha sido la base de muchas obras de arte.

No es de extrañar, por tanto, que antiguamente esta proporción tuviera para muchos un carácter mágico o divino si pensamos en el poder de ϕ como molde creador. Esta idea queda reflejada en las siguientes palabras de J. Kepler: “*Creo que de esta proporción geométrica se sirvió el Creador como la idea por medio de la que introdujo la generación continua de objetos semejantes a partir de objetos semejantes.*”



FIGURA 35. Luca Pacioli

Fra Luca Pacioli (1445-1509) (Figura 35) enfatiza precisamente el carácter “divino” de ϕ titulando su famoso tratado sobre este número como *De Divina Proportione*¹⁶. Entre otras, da las siguientes razones para llamar así a la mágica proporción:

“La primera es que ella es una sola y no más y no es posible asignarle otras especies ni diferencias. Y dicha unidad es el supremo epíteto de Dios mismo, según toda escuela teológica y también filosófica.

La segunda correspondencia es a la de la Santa Trinidad, es decir, que, así como en divinis hay una misma substancia en tres personas—Padre, Hijo y Espíritu Santo—, de igual modo una misma proporción se encontrará siempre entre tres términos y nunca de más o de menos, como se dirá.

La tercera correspondencia es que, así como Dios no se puede propiamente definir ni puede darse a entender a nosotros mediante palabras, nuestra proporción no puede nunca determinarse con un número inteligible ni expresarse mediante cantidad racional alguna, sino que siempre es oculta y secreta y es llamada irracional por los matemáticos.

¹⁶De los tres códices de la Divina Proporción que Fra Luca Pacioli mandó copiar, se conservan dos, uno en la Biblioteca Cívica de Ginebra (el que el autor dedicó al Duque de Milán, Ludovico il Moro) y otro en la Biblioteca Ambrosiana de Milán. Más tarde, en 1509, el libro fue impreso en Venecia por Paganino Paganini.

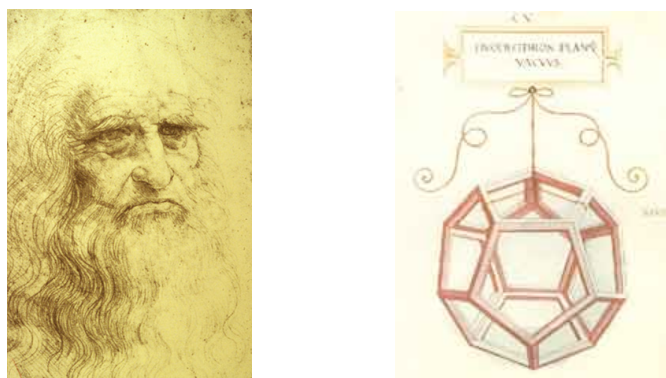


FIGURA 36. Leonardo y uno de sus dibujos del dodecaedro

La cuarta correspondencia consiste en que, así como Dios nunca puede cambiar y está todo Él en todo y todo en todas partes, nuestra proporción es siempre, en toda cantidad continua y discreta, grande o pequeña, la misma y siempre invariable, y de ninguna manera puede cambiar ni de otro modo puede aprehenderla el intelecto, como nuestra explicación demostrará.

La quinta correspondencia puede añadirse no sin razón a las cuatro anteriores; así como Dios confiere el Ser a la virtud celeste, por otro nombre llamada quintaesencia, y mediante ella a los otros cuerpos simples, es decir, a los cuatro cuerpos simples –aire, tierra, agua y fuego– y a través de éstos da el ser a cada una de las otras cosas de la naturaleza, de igual modo nuestra santa proporción confiere el ser formal, según Platón en su Timeo, al cielo mismo, atribuyéndole la figura del cuerpo llamado dodecaedro o, dicho de otro modo, cuerpo de doce pentágonos, el cuál, como más abajo se demostrará no puede realizarse sin nuestra proporción. ...”

El tratado *De Divina Proportione* está ilustrado con maravillosos dibujos realizados por Leonardo de diferentes poliedros. Leonardo da Vinci (Figura 36), considerado el artista más completo del Renacimiento, fue un gran estudioso de las proporciones en la arquitectura, pintura, ingeniería y también en las del cuerpo humano. Hemos incluido en la Figura 36 la imagen de uno de los poliedros construidos por Leonardo: el Dodecaedro, el cuerpo platónico reservado para representar la quintaesencia. Ya hemos mencionado que, según las ideas platónicas, los cuatro restantes están asociados a los cuatro elementos. El Dodecaedro encierra el número ϕ en muchas de sus proporciones y esencialmente en la formada por la diagonal y el lado de cada una de sus doce caras pentagonales.

Leonardo siguió las instrucciones contenidas en los estudios realizados por Vitruvio sobre las proporciones del cuerpo humano para diseñar

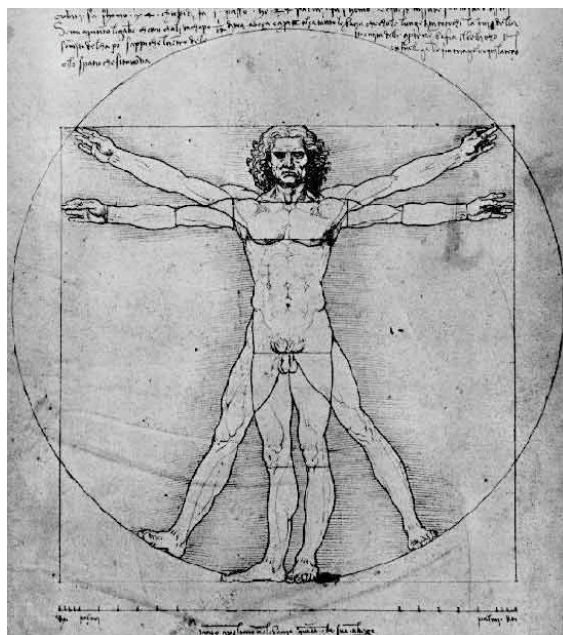


FIGURA 37. Hombre de Vitruvio, dibujo realizado por Leonardo

su famoso dibujo de 1492 conocido como el *Hombre de Vitruvio* (véase la Figura 37). En este dibujo se establece un canon de belleza humana basado precisamente en la divina proporción. Así, esta proporción, generadora de la armonía y belleza, capturaría el reflejo de Dios en la criatura humana, a quién “creó a su imagen y semejanza”. El número ϕ está presente en las numerosas proporciones que se pueden establecer en el dibujo. La circunferencia que aparece tiene como centro el ombligo y como radio la distancia de éste a los pies. El rectángulo formado por la altura completa del hombre y la mitad del lado del cuadrado (oculto) circunscrito a la circunferencia dibujada es áureo. Es decir, la divina proporción es la razón entre la altura del hombre y la distancia del ombligo a los pies. Si desde este rectángulo áureo se realiza el proceso de eliminación de cuadrados descrito en 37, aparecen los rectángulos áureos (ocultos) que determinan las diferentes proporciones corporales descritas por Leonardo en el dibujo.

Tres números importantes son la base de la Figura 37: el π , presente en la circunferencia; el $\frac{1}{2}$, la proporción que determina en un segmento su punto medio, y que en la altura del hombre corresponde a los genitales; y el número de oro ϕ , portador del reflejo divino, que viene determinado por la posición del ombligo respecto a la altura. Es curioso que en el niño recién nacido, el ombligo divide normalmente al cuerpo en dos partes iguales, papel que pasa a ocupar el aparato genital en el hombre adulto armonioso. La transmisión de la vida tiene dos centros esenciales, el receptor y el transmisor, que corresponden precisamente

a los centros geométricos señalados. Se han dado numerosas interpretaciones del dibujo vitrubiano de Leonardo y de sus objetivos y símbolos ocultos; entre otras, las que lo relacionan con la cuadratura del círculo, las que defienden la teoría del número π frente a la del ϕ , como también sucede en el caso de la gran pirámide expuesto en la sección anterior, etc.

Los artistas que, a través del don especial que poseen, intentan expresar la belleza y perfección, han creado obras admirables. El secreto de la belleza que encierran algunas de ellas no es otro que el de contener en su interior el número bello por excelencia " ϕ ".

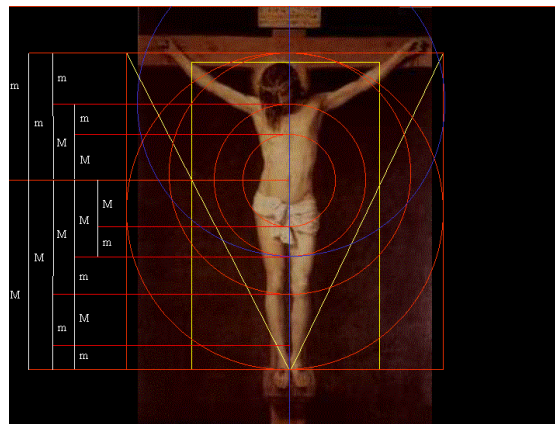


FIGURA 38. Cristo crucificado de Velázquez

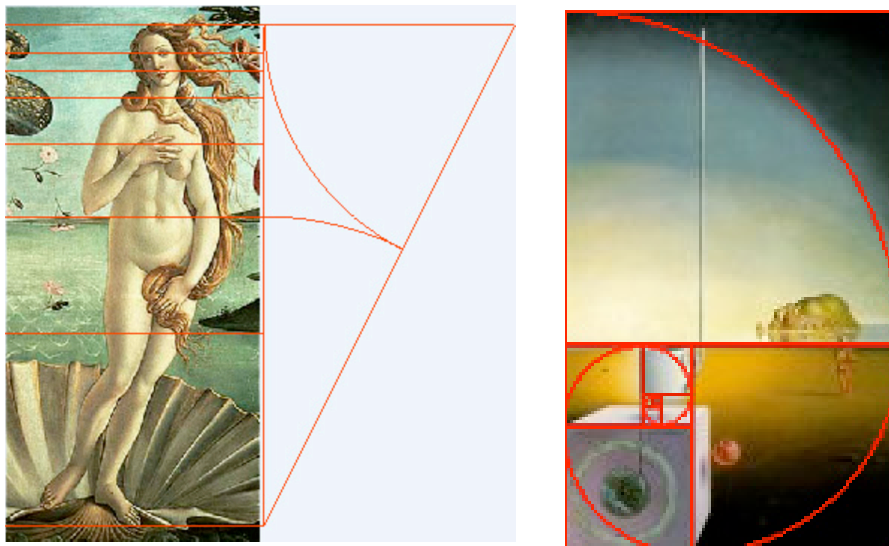


FIGURA 39. La Venus de Boticelli y sus proporciones áureas. Semitaza gigante volante de Salvador Dalí, con su espiral áurea

Como un pequeño ejemplo, incluimos las Figuras 38 y 39. La Figura 38 contiene una imagen del “Cristo crucificado” de Velázquez, claramente inspirada en el hombre vitruviano, en la que se muestra un análisis explícito de diversas proporciones áureas. La Figura 39 contiene a la izquierda una parte de “El nacimiento de Venus” de Boticelli y a la derecha “La semitaza gigante volante, con anexo inexplicable de cinco metros de longitud” de Dalí. En estas últimas imágenes se muestran claras relaciones con la proporción áurea y espiral áurea rectangular, que en el caso del cuadro de Dalí explica la ironía del título. Invitamos al lector a que descubra el contenido áureo en otras obras de éstos y otros grandes pintores como Durero, Goya, Zurbarán, Picasso y muchísimos más.

Del mismo modo que Vitruvio pensaba que la proporción era la base generadora de la belleza, otros arquitectos y escultores han basado sus obras en la proporción divina. No podemos omitir una pequeña alusión al Partenón, del cuál hemos incluido una imagen en la Figura 40. El Partenón contiene numerosas proporciones áureas; por ejemplo, el rectángulo que circunscribe de modo natural a su fachada, incluyendo el triángulo completado, es áureo. Fidias incorporó a este edificio valiosos relieves (véase la Figura 40) y, como ya hemos comentado anteriormente, en su honor se tomó el símbolo ϕ , que corresponde a la letra inicial de su nombre en griego, para representar la proporción divina.



FIGURA 40. Fachada del Partenón y relieves de Fidias en él

Como ocurre con el Partenón, Notre Dame o el Pentágono, son muy numerosas las obras en las que los arquitectos han utilizado el número áureo como símbolo o molde generador de su construcción. Como hiciera Leonardo, el famoso arquitecto Le Corbusier diseñó entre 1942 y 1955 su famoso “Modulor”, un sistema doble de proporciones áureas en el cuerpo humano, que sirve de base en muchas de las obras de éste y otros arquitectos y artistas. Véase la Figura 41.

Mención especial merece la arquitectura sagrada, que encontró en los templos góticos el reflejo del Creador a través de la luz. Los arquitectos de las catedrales tenían la enorme responsabilidad de edificar

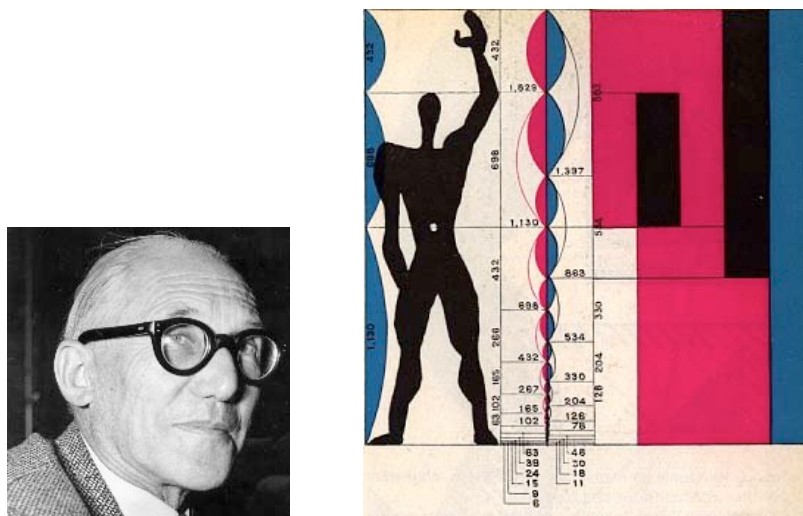


FIGURA 41. Le Corbusier y su Modulor

las “moradas de Dios” en la Tierra. No es de extrañar, por tanto, que pretendieran alcanzar la máxima perfección y belleza y utilizaran como molde generador secreto de su construcción el número místico que transmitía la perfección divina a las obras humanas: la divina proporción.

Por tanto, la forma de cruz de la planta de las catedrales, símbolo de la crucifixión, suele contener (como el hombre de Vitruvio) numerosas proporciones áureas y este molde se repite en fachadas, obras pictóricas, relieves, etc. Incluimos, como ejemplo de la presencia del número de oro en la arquitectura sagrada (véanse las Figuras 42 y 43), la planta de la catedral francesa de Notre Dame du Port y un rosetón áureo que contiene la estrella de cinco puntas pitagórica. Éste se halla en la ermita románica-protogótica de San Bartolomé (cerca de Burgo de Osma) que formó parte de lo que fue el monasterio templario de San Juan de Otero.

Siendo el número de oro la proporción generadora de belleza por excelencia, es lógico que aparezca también en numerosas obras literarias, algunas de ellas muy populares recientemente como el conocidísimo *Código da Vinci* de Dan Brown. Queremos mencionar especialmente el interesante libro de José Luis Corral que convierte a ϕ en protagonista ya desde el título: *El Número de Dios*. En él se narra la historia de Teresa, cuya relación con la construcción de las catedrales de Burgos y León la lleva a entrar en contacto con uno de los secretos mejor guardados del gremio de los arquitectos, el número de Dios, sobre el que se sustentan las catedrales del nuevo estilo importado de Francia. Extraemos un párrafo de este libro:

“Enrique aplicaba en sus manos cuanto había aprendido de su padre, de su tío y de sus maestros en la escuela de Chartres y en la Universidad de París. Creía firmemente en la geometría como base fundamental

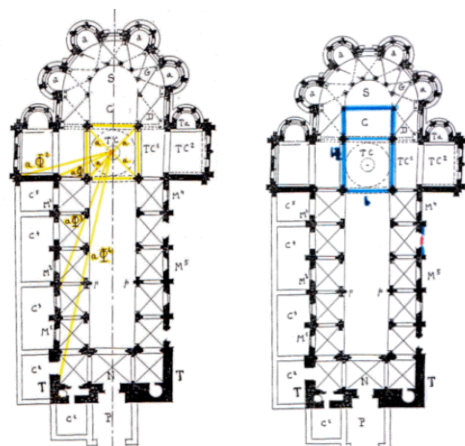


FIGURA 42. Planta áurea de catedral

FIGURA 43. Estrella pitagórica con proporciones áureas
y en forma del nudo primo 10_{123}

del arte en la arquitectura ¹⁷. A partir de un cuadrado, del triángulo equilátero y de la proporción áurea, el número de Dios, construir un edificio se convertía en un ejercicio matemático basado en los números, en la geometría y en la simbología divina. El triángulo equilátero equilavía a la Trinidad, tres personas iguales, los tres lados del triángulo, y un solo Dios. El cuadrado significaba la relación de igualdad y de armonía entre el Hijo y el Padre. Y el número de Dios era la proporción perfecta que había sido revelada al hombre para que éste pudiera imitar las medidas con las que el Creador había construido el universo.”

¹⁷Esto nos recuerda el diálogo de Sócrates con Glaucon en *La República* de Platón, a quien dice: “...Por tanto, ordenaremos a los ciudadanos que no desprecien el estudio de la geometría, tanto más cuanto que, además de esta ventaja principal de elevar el alma hacia la verdad, tiene otras que no son despreciables.”

Como punto final a estas notas reproducimos a continuación el soneto que Rafael Alberti, gran poeta y también pintor (la Figura 44 muestra su dibujo “Torero con laúd” que nos recuerda al Modulor), dedicó a la Divina Proporción. Para nosotros estos maravillosos versos son las palabras que mejor resumen el poder y la magia del número ϕ y precisamente en ellas está motivado el título de este trabajo.

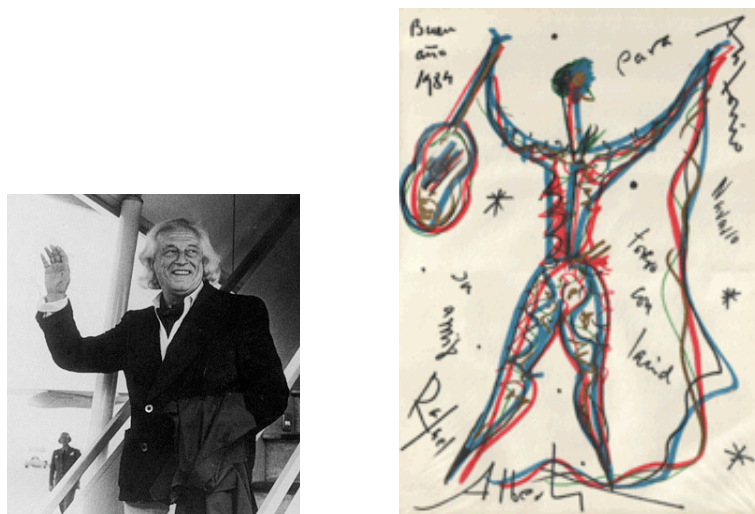


FIGURA 44. Rafael Alberti y su Torero con laúd

“A LA DIVINA PROPORCIÓN”

*A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.*

*A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de medida
que el Universo armónico origina.*

*A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.*

*Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.*

(Rafael Alberti, 1946)

Notas:

- Este artículo es parte de un trabajo emprendido hace tiempo con motivo del homenaje a un querido compañero y amigo: José Javier Guadalupe (Chicho). Estudiamos y recopilamos algunos de los temas geométricos que pueden ser utilizados para “acercar las matemáticas a la sociedad”, uno de los grandes objetivos que se planteó el “Año Mundial de las Matemáticas 2000”, año en el que un desgraciado accidente nos privó de Chicho para siempre.
- Los autores queremos agradecer a Judit Mínguez Ceniceros su amable ayuda en la elaboración de este trabajo; sus comentarios, observaciones y sugerencias han mejorado, sin duda, el contenido y presentación de estas notas.

REFERENCIAS

- [1] BLANCO DÁVILA, F., *El arte en la medicina: las proporciones divinas*, Ciencia Uanl, vol 7, No. 2 (2004) 150-156.
- [2] BOULEAU, C., *Tramas. La geometría secreta de los pintores*, Ediciones Akal, S.A., 1996.
- [3] COXETER, H. S. M., *Fundamentos de Geometría*, Limusa-Wiley, México, 1971.
- [4] EUCLIDES, *Elementos, Libros I-IV, V-IX, X-XII* (Introducción de Luis Vega. Traducción de María Luisa Puertas Castaños), Editorial Gredos, Biblioteca Clásica Gredos, vol. 191 (1991), 155 (1994) y 228 (1996).
- [5] EVES, H., *Estudio de las Geometrías*, Tomos I y II, UTEHA, Méjico, 1969.
- [6] GAFURIO, *Theorica Musice*, Antiguo manuscrito, 1492, La librería del Doni Fiorentino (BMB I/13).
- [7] GHYKA, M. C., *El Número de Oro I. Los Ritmos*, Poseidón, 1968.
- [8] GHYKA, M. C., *El Número de Oro II. Los Ritos*, Poseidón, 1968.
- [9] GHYKA, M. C., *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*, Poseidón, 1977.
- [10] DOMÍNGUEZ, M.M., *El número de oro*, Ed. Proyecto Sur, Madrid, 1989.
- [11] HERZ-FISCHER, R., *A mathematical history of division in extreme and mean ratio*, Ed. Wilfrid Laurier, Ottawa, 1987.
- [12] HUNTLY, H.C., *The divine proportion: A study in mathematical beauty*, Ed. Dover Publications, New York, 1970.
- [13] LE CORBUSIER, *Tracés régulateurs. L'Architecture vivant*, Spring-Summer, 1929.
- [14] LE CORBUSIER, *Le modulator*, París, 1949.
- [15] PACIOLI, L., *La Divina Proporción* (Traducción de Juan Calatrava), Ediciones Akal, S.A., 1991. Traducción del original de 1509.
- [16] PLATÓN, *Diálogos, v. 6*, Biblioteca Básica Gredos, Madrid, 1982.
- [17] PRITCHARD, C. (EDITOR), *The Changing Shape of Geometry. Celebrating a Century of Geometry and Geometry Teaching*, Cambridge University Press, 2003.
- [18] STEWART, I. AND GOLUBITSKY, M., *¿Es Dios un geómetra?. La Simetrías de la naturaleza*, Crítica. Grijalbo Mondadori, Barcelona, 1995.
- [19] VITRUVIUS, *The ten books on architecture* (Translated by Morris Hicky Morgan), Dover Publications Inc, New York, 1960.

PÁGINAS WEB

Existen muchísimas páginas web que tratan del número de oro. Indicamos a continuación algunas que hemos considerado de interés en la elaboración de este trabajo y otras de las cuales hemos extraído alguna imagen.

<http://goldennumber.net/>
http://trucsmaths.free.fr/nombre_d_or.htm
<http://www.ifrance.com/expo/lenombre/Somca.htm>
<http://maven.smith.edu/ phyllo/>
<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>
<http://www.georgehart.com/>
<http://ochoa.mat.ucm.es/ guzman/>
<http://www2.uiah.fi/projects/metodi/255.htm>
<http://www.divulgamat.net>
<http://centros5.pntic.mec.es/ies.victoria.kent/Rincon-C/rincon.htm>
<http://www.pliegosdeopinion.net/pdo3/articulos/separadas.pdf>
<http://www.uanl.mx/publicaciones/ciencia-uanl/vol7/2/>
<http://www.pauloporta.com/Fotografia/Artigos/epropaurea2.htm>
<http://www.biografiasyvidas.com/lasmasvisitadas.htm>
<http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/6386/geobook.html>

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, 26004 LOGROÑO

E-mail address:

jose-ignacio.extremiana@dmc.unirioja.es,
luis-javier.hernandez@dmc.unirioja.es,
maria-teresa.rivas@dmc.unirioja.es