CONVERGENCIA EN MEDIA DE LA SERIE DE FOURIER RESPECTO DE POLINOMIOS ASOCIADOS A LA MEDIDA $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx + M\delta_{-1} + N\delta_1$ *

J. J. Guadalupe Hernández[1], M. Pérez Riera[1],
F. J. Ruiz Blasco[1] y J. L. Varona Malumbres[2]

[1] Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza.

[2] Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza.

0. Introducción

Sea $d\alpha$ una medida positiva sobre $\mathbb{R}$ para la que podamos asegurar la existencia de un sistema de polinomios ortonormales asociado $\{P_n\}_{n=0}^\infty$. Dada una función f integrable para dicha medida, denotaremos por

$$S_N f(x) = \sum_{n=0}^N c_n P_n(x) = \int_{\mathbb{R}} K_N(x,y) f(y)\, d\alpha(y),$$

donde

$$K_N(x,y) = \sum_{n=0}^N P_n(x)P_n(y) \quad \text{y} \quad c_n = \int_{\mathbb{R}} f(t)P_n(t)\, d\alpha(t),$$

la suma parcial N-ésima de la serie de Fourier de f respecto de dicho sistema de polinomios.

Siendo claro, por teoría de espacios de Hilbert, que si $f \in L^2(\mathbb{R}; d\alpha)$ dichas sumas parciales convergen a la función f en $L^2(\mathbb{R}; d\alpha)$, la cuestión natural que se plantea es: ¿para qué valores de p, $1 < p < \infty$, sigue sucediendo lo mismo? No se conoce ninguna respuesta de tipo general a esta pregunta y,

*Los autores han sido subvencionados por CAICYT PB 85-0338.

*Este artículo fue publicado en "Polinomios Ortogonales y sus Aplicaciones" (Actas del V Simposium, Vigo, 1988), 91–99, Universidad de Santiago, Vigo, 1989.

como consecuencia, las investigaciones de los matemáticos que se han dedicado a este problema han ido encaminadas a su resolución para sistemas de polinomios particulares.

Limitándonos a medidas soportadas en el intervalo $[-1,1]$, la historia del problema se puede resumir en lo siguiente: en 1947, Pollard [7] prueba que para polinomios de Legendre, hay convergencia en $L^p([-1,1];dx)$ para p comprendido entre 4/3 y 4. El resultado es extendido por Muckenhoupt [5] para los polinomios de Jacobi, probando que para $1 < p < \infty$ hay convergencia en $L^p([-1,1];d\mu)$ si y sólo si se cumplen las ecuaciones

$$(*) \qquad \begin{cases} 4(\alpha+1)^{-1}(2\alpha+1) < p^{-1} < 4(\alpha+1)^{-1}(2\alpha+3), \\ 4(\beta+1)^{-1}(2\beta+1) < p^{-1} < 4(\beta+1)^{-1}(2\beta+3), \end{cases}$$

siendo α, β los exponentes en $d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx$ $(\alpha,\beta > -1)$. Posteriormente, el problema es completamente resuelto por Badkov para polinomios de Jacobi generalizados, asociados a ciertas modificaciones de los pesos de Jacobi por funciones del tipo $\prod |x-x_0|^\gamma$. Las técnicas de demostración en [5] y [7] pasan por el conocimiento de acotaciones uniformes para los polinomios junto con propiedades de acotación de la transformada de Hilbert y en [1] por una estimación directa del tamaño de los núcleos K_N.

El objeto del presente artículo es resolver el problema anterior para medidas que son modificaciones por deltas de Dirac en los extremos de los pesos de Jacobi, esto es, $d\nu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx + M\delta_{-1} + N\delta_1$ en $[-1,1]$. Algunos aspectos de los polinomios asociados a dichas medidas han sido estudiados en [2] y por este motivo nos referiremos a ellos como polinomios de Koornwinder.

Demostraremos que el hecho de añadir deltas de Dirac en los extremos no modifica el rango de los p para los que hay convergencia, es decir, habrá convergencia cuando y sólo cuando p satisfaga las ecuaciones $(*)$.

Utilizaremos las siguientes notaciones:

$$d\mu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx \quad \text{sobre} \quad [-1,1] \qquad (\alpha,\beta > -1);$$

$$d\nu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx + M\delta_{-1} + N\delta_1 \quad \text{sobre} \quad [-1,1].$$

$P_n(x) = k_n x^n + \cdots$, serán, en general, los polinomios ortonormales asociados a una medida $d\alpha$ y escribiremos $P_n^a = k_n^a x^n + \cdots$, para denotar los asociados a la medida $(x-a)^2\,d\alpha(x)$.

El artículo está organizado como sigue: en el primer párrafo obtenemos una fórmula de tipo general que relaciona los polinomios asociados a una modificación de un peso por una delta de Dirac en función de los de partida y de los asociados a la modificación por $(x-a)^2$. Esta fórmula nos permitirá en el segundo apartado obtener acotaciones para los polinomios de Koornwinder y, por último, en el párrafo 3, demostramos nuestro resultado sobre convergencia.

1. Polinomios asociados a una modificación por una delta de Dirac

Proposición 1. *Sean $d\alpha$ una medida positiva sobre $\mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, y denotemos por Q_n la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a $d\alpha + M\delta_a$, siendo $M > 0$ y δ_a la delta de Dirac en a. Entonces, para todo n existen $A_n, B_n \in (0,1)$ tales que*

$$Q_n(x) = A_n P_n(x) + B_n(x-a)P^a_{n-1}(x).$$

Además, si $\operatorname{sop} d\alpha = [-1,1]$ *,* $\alpha' > 0$ *a.e. y* $a \in [-1,1]$*, se tiene:*

$$\lim_{n\to\infty} A_n K_{n-1}(a,a) = [\lambda(a)+M]^{-1}, \quad \lim_{n\to\infty} B_n = M[\lambda(a)+M]^{-1},$$

donde

$$\lambda(a) = \lim_{n\to\infty} K_n(a,a)^{-1} \in [0,\infty).$$

Demostración. Imponiendo que $P_n(x) + C_n(x-a)P^a_{n-1}(x)$ sea ortogonal al espacio de los polinomios de grado menor o igual que $n-1$, con respecto a $d\alpha + M\delta_a$ (utilizando la base $\{(x-a)^j\}$) se obtiene que la constante C_n debe ser $M(k_n/k^a_{n-1})K_{n-1}(a,a)$. Así, dividiendo dicho polinomio por su norma, obtenemos Q_n, dado que $P_n(x)+C_n(x-a)P^a_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado exactamente n y con coeficiente director positivo. Su norma en $L^2(d\alpha + M\delta_a)$ es

$$D_n = [MP_n(a)^2 + 1 + Cs(2,n) + 2C_n(k_n/k^a_{n-1})]^{1/2}.$$

Por tanto, $Q_n(x) = D_n^{-1}P_n(x) + C_n D_n^{-1}(x-a)P^a_{n-1}(x)$. Como $D_n > \max\{1, C_n\}$, se sigue que $A_n = D_n^{-1}, B_n = C_n D_n^{-1} \in (0,1)$.

Para la segunda parte de la proposición basta tener en cuenta la expresión de D_n y C_n y recordar los siguientes resultados de tipo general:

— Siempre que $\operatorname{sop} d\alpha = [-1,1]$ y $\alpha' > 0$ a.e., se tiene que $(k_n/k_{n+1}) \to 1/2$ (ver [9] , pág. 212).

— En las mismas hipótesis,

$$(k^a_n/k_n) \to \exp\left(\frac{-1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log\{(\cos t - a)^2\}\,dt\right)$$

(ver [4], teorema 11) y puede calcularse que, $\forall a \in [-1,1]$, el valor de esta integral es $-4\pi\log 2$. Por lo tanto, $(k_n/k^a_{n-1}) \to 1$.

— Por otro lado, de $\operatorname{sop} d\alpha = [-1,1]$ y $\alpha' > 0$ a.e., se sigue que, en la relación de recurrencia $xP_n = a_{n+1}P_{n+1} + b_nP_n + a_nP_{n-1}$, $a_n \to 1/2$ y $b_n \to 0$ (ver [9], pág. 212, o bien [4], teorema 10). Y entonces se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} [P_n(x)^2/K_{n-1}(x,x)] = 0 \quad \forall x \in [-1,1]$$

(ver [6], teorema 3, pág. 26). Por consiguiente, $\lim_{n\to\infty}[P_n(a)/K_{n-1}(a,a)] = 0$. □

2. Estimaciones para los polinomios de Koornwinder

Proposición 2. *Sea $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios ortonormales con respecto a la medida $d\nu(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\, dx + M\delta_{-1}(x) + N\delta_1(x)$ sobre $[-1,1]$, $M,N \geq 0$. Entonces existe una constante C tal que $\forall x \in [-1,1]$ y $\forall n \in \mathbb{N}$:*

(a) $|Q_n(x)| \leq C(1-x+n^{-2})^{-\alpha/2-1/4}(1+x+n^{-2})^{-\beta/2-1/4}$.

(b) Si $M > 0$, $|Q_n(-1)| \leq Cn^{-\beta-3/2}$; si $N > 0$, $|Q_n(1)| \leq Cn^{-\alpha-3/2}$.

Demostración. (a) Sean P_n los polinomios ortonormales con respecto a $d\mu = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\, dx$, R_n los ortonormales con respecto a $d\mu + M\delta_{-1}$ y $P_n^{(-1)}$ los ortonormales con respecto a $(1+x)^2\, d\mu$. Puesto que $d\mu$ y $(1+x)^2\, d\mu$ son medidas de Jacobi, se verifican las acotaciones

$$|P_n(x)| \leq C(1-x+n^{-2})^{-\alpha/2-1/4}(1+x+n^{-2})^{-\beta/2-1/4},$$
$$|P_{n-1}^{(-1)}(x)| \leq C(1-x+n^{-2})^{-\alpha/2-1/4}(1+x+n^{-2})^{-\beta/2-5/4}$$

(ver [5]). De la proposición 1 se deduce ahora que

$$|R_n(x)| \leq C(1-x+n^{-2})^{-\alpha/2-1/4}(1+x+n^{-2})^{-\beta/2-1/4}.$$

Repitiendo el proceso con la medida $d\mu + M\delta_{-1}$ y $a = 1$ se llega a la acotación de los Q_n.

(b) Si $\{P_n\}$ y $\{K_n\}$ son las sucesiones de polinomios ortonormales y núcleos de $d\mu$, es conocido (ver [10], § 4.1, § 4.3 y § 4.5) que $|P_n(-1)| \sim n^{\beta+1/2}$ y $|K_n(-1,-1)| \sim n^{2(\beta+1)}$, donde con $a_n \sim b_n$ indicamos que existen $C, D > 0$ tales que, $\forall n$, $Cb_n \leq a_n \leq Db_n$. De esto se deduce por la proposición 1 que, si $M > 0$, los polinomios R_n ortonormales con respecto a $d\mu + M\delta_{-1}$ cumplen

$$|R_n(-1)| = A_n|P_n(-1)| \sim |P_n(-1)/K_n(-1,-1)| \leq Cn^{-\beta-3/2}.$$

Por la misma razón, los polinomios R_n^1, ortonormales con respecto a $(1-x)^2(d\mu + M\delta_{-1}) = (1-x)^2\, d\mu + 4M\delta_{-1}$ cumplen que $|R_n^1(-1)| \leq Cn^{-\beta-3/2}$. De nuevo por la proposición 1, $Q_n(-1) = A_nR_n(-1) - 2B_nR_{n-1}^1)(-1)$ y por tanto $|Q_n(-1)| \leq Cn^{-\beta-3/2}$. Análogamente, $|Q_n(1)| \leq Cn^{-\alpha-3/2}$ si $N > 0$. □

3. Convergencia de la serie de Fourier

Teorema. *Denotando por $S_n f$ las sumas parciales del desarrollo en serie de Fourier de f con respecto a $d\nu(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx + M\delta_{-1} + N\delta_1$ sobre $[-1, 1]$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) S_n son operadores uniformemente acotados en $L^p(d\nu)$.

(ii) $S_n f \to f$ en $L^p(d\nu)$, para toda función f en $L^p(d\nu)$.

(iii) p satisface las condiciones $(*)$.

Demostración. La equivalencia entre (i) y (ii) es clásica para cualquier medida finita sobre $[-1, 1]$, siguiéndose por bien conocidos argumentos de Análisis Funcional (teorema de la acotación uniforme y densidad de los polinomios en $L^p(d\nu)$). Por otra parte, (i) $\Rightarrow$ (iii) consiste en la simple observación de que el teorema de Máté, Nevai y Totik referente a condiciones necesarias para la convergencia de la serie de Fourier (ver [3]) solamente requiere el conocimiento de la parte absolutamente continua de la medida y, por tanto, el rango de los p es el mismo que para los correspondientes polinomios de Jacobi. Por tanto, sólo debemos ocuparnos de la implicación (iii) $\Rightarrow$ (i).

Se trata de probar que la expresión

$$\int_{-1}^{1} |S_n f(x)|^p \, d\nu(x) = M|S_n f(-1)|^p + N|S_n f(1)|^p + \int_{-1}^{1} |S_n f(x)|^p \, d\mu(x),$$

está acotada (independientemente de n) por $C \int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, d\nu(x)$. Además, basta hacerlo para $p > 2$, por dualidad.

Para la acotación del primer sumando, observemos que

$$|S_n f(-1)| = \left| \sum_{j=0}^{n} \widehat{f}(j) P_j(-1) \right| \le \left\{ \sum_{j=0}^{n} \widehat{f}(j)^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{j=0}^{n} P_j(-1)^2 \right\}^{1/2}.$$

El primer factor es menor o igual que $\|f\|_{L^2(d\nu)} \le C\|f\|_{L^p(d\nu)}$ y el segundo está acotado uniformemente por una constante, debido a la parte (b) de la proposición 2. La cota para $|S_n f(1)|$ es totalmente análoga.

Para la acotación del tercer sumando, tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} |S_n f(x)|^p \, d\mu(x) \\ &\le CM^p |f(-1)|^p \int_{-1}^{1} |K_n(x, -1)|^p \, d\mu(x) + CN^p |f(1)|^p \int_{-1}^{1} |K_n(x, 1)|^p \, d\mu(x) \\ &\qquad + C \int_{-1}^{1} \left| \int_{-1}^{1} K_n(x, y) f(y) \, d\mu(y) \right|^p d\mu(x). \end{aligned}$$

Como $M|f(-1)|^p$, $N|f(1)|^p$ y $\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\,d\mu(x)$ están controlados por $\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\,d\nu(x)$, para llegar a la demostración de (i) basta que logremos las tres siguientes mayoraciones:

(A-1) $$\int_{-1}^{1}|K_n(x,-1)|^p\,d\mu(x)\le C,\quad \text{para todo } n,$$

(A-2) $$\int_{-1}^{1}|K_n(x,1)|^p\,d\mu(x)\le C,\quad \text{para todo } n,$$

(A-3)
$$\int_{-1}^{1}\left|\int_{-1}^{1}K_n(x,y)f(y)\,d\mu(y)\right|^p d\mu(x)\le C\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\,d\mu(x),\quad \text{para todo } n.$$

Para la demostración de (A-1) (la de (A-2) es similar), partimos de la descomposición del núcleo (ver [8]) como

$$K_n(x,y)=r_nQ_{n+1}(x)Q_{n+1}(y)\\ +s_n\frac{(1-x^2)R_n(x)Q_{n+1}(y)}{x-y}-s_n\frac{(1-y^2)R_n(y)Q_{n+1}(x)}{x-y},$$

donde $\{r_n\}$ y $\{s_n\}$ son sucesiones acotadas (ver [11]), $Q_n(x)$ son los polinomios ortonormales con respecto a $d\nu(x)$ y $R_n(x)$ son los polinomios ortonormales correspondientes a la medida $(1-x^2)\,d\nu(x)=(1-x^2)\,d\mu(x)$. Entonces, para $y=1$, resulta $K_n(x,1)=r_nQ_{n+1}(x)Q_{n+1}(1)-s_n(1+x)R_n(x)Q_{n+1}(1)$. A partir de esta expresión, con las cotas obtenidas para Q_n en la proposición 2 y las acotaciones que verifican los R_n (puesto que son polinomios de Jacobi con exponentes $\alpha+1$ y $\beta+1$), es un sencillo ejercicio obtener la acotación (A-2).

Por último, utilizando la misma descomposición del núcleo, la obtención de (A-3) consiste en demostrar que

$$\int_{-1}^{1}|W_{i,n}f(x)|^p\,d\mu(x)\le C\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\,d\mu(x),\quad \forall n,\quad \text{para } i=1,2,3,$$

donde
$$W_{i,n}f(x)=\int_{-1}^{1}T_i(n,x,y)f(y)\,d\mu(y)$$

y

$$T_1(n,x,y)=Q_{n+1}(x)Q_{n+1}(y),$$
$$T_2(n,x,y)=\frac{(1-x^2)R_n(x)Q_{n+1}(y)}{x-y},$$
$$T_3(n,x,y)=\frac{(1-y^2)R_n(y)Q_{n+1}(x)}{x-y}.$$

Pero esta demostración es idéntica a la del caso de los pesos de Jacobi, sin deltas de Dirac, puesto que en ésta sólo se necesitan cotas superiores para los polinomios ortonormales, que, según la proposición 2, son válidas también para los polinomios de Koornwinder. Esto concluye la demostración de (iii) $\Rightarrow$ (i) y del teorema. $\square$

Nota. Siguiendo en parte el esquema anterior, puede estudiarse el problema análogo para los polinomios ortogonales con respecto a medidas sobre el intervalo $[-1,1]$ que son suma de un peso de Jacobi generalizado y de deltas de Dirac incluso en puntos del interior del intervalo. Este problema será objeto de un posterior trabajo.

Referencias

[1] V. M. Badkov, Convergence in the mean and almost everywhere of Fourier series in polynomials orthogonal on an interval, *Math. USSR Sbornik* **24** (1974), 223–256.

[2] T. H. Koornwinder, Orthogonal polynomials with weight function $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$, *Canad. Math. Bull.* **27** (1984), 205–214.

[3] A. Máté, P. Nevai y V. Totik, Necessary conditions for weighted mean convergence of Fourier series in orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* **46** (1986), 314–322.

[4] A. Máté, P. Nevai y V. Totik, Extensions of Szegő's theory of orthogonal polynomials. II, *Constr. Approx.* **3** (1987), 51–72.

[5] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Jacobi series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (1969), 306–310.

[6] P. Nevai, "Orthogonal Polynomials", Memoirs of the Amer. Math. Soc. 213 (1979).

[7] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **62** (1947), 387–403.

[8] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948), 355–367.

[9] E. A. Rahmanov, On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials, *Math. USSR Sbornik* **32** (1977), 199–213.

[10] G. Szegő, "Orthogonal Polynomials", Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1959.

[11] J. L. Varona, "Convergencia de series de Fourier respecto de sistemas ortogonales", Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, Zaragoza, 1987.