Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 22 (2019), Núm. 1, Pág. 144

Cálculo del determinante de Vandermonde con ayuda de un polinomio

Se denomina determinante de Vandermonde de orden n a

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Es muy conocido que el valor de este determinante es

$$V_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i). \tag{1}$$

Las demostraciones habituales de (1) pasan por precisas pero sencillas manipulaciones de V_n aplicando algunas propiedades típicas de los determinantes (por ejemplo, que si a una columna se le resta otra multiplicada por una constante, el valor del determinante no cambia). Damos aquí una demostración alternativa que usa propiedades elementales de los polinomios y que, pese a ser rápida y elegante, es muy poco conocida (aunque, posiblemente, numerosos matemáticos la han descubierto por su cuenta). Podemos suponer que los a_j son distintos pues, si no, (1) es trivial.

Definamos $P_{n-1}(x)$ añadiendo a V_{n-1} una fila y una columna extra:

$$P_{n-1}(x) = \begin{vmatrix} & & & & & a_1^{n-1} \\ & & & & & a_2^{n-1} \\ & & V_{n-1} & & & a_3^{n-1} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Es claro que $P_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ y coeficiente director V_{n-1} (basta desarrollar por la última fila); además, $P_{n-1}(x)$ se anula en $x = a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ (el correspondiente determinante tiene dos filas iguales). Así pues,

$$P_{n-1}(x) = V_{n-1} \cdot (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1}).$$

Pero

$$V_n = P_{n-1}(a_n) = V_{n-1} \cdot (a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1}),$$

y esto prueba (1) por inducción.

Juan Luis Varona, Dpto. de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja
Correo electrónico: jvarona@unirioja.es
Página web: http://www.unirioja.es/cu/jvarona/