

PROYECTO DOCENTE
de
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

presentado por

Juan Luis VARONA MALUMBRES

para optar a una plaza de Profesor Titular de Universidad correspondiente al Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Zaragoza en el área de Matemática Aplicada e impartir docencia de Análisis Matemático III en el Colegio Universitario de La Rioja.

Logroño, Marzo, 1992.

ÍNDICE

Índice	ii
Consideraciones generales	1
Proyecto docente de Análisis Matemático III	6
Introducción	7
Programa	12
Comentarios al programa	17
1. Variable compleja	18
2. Métodos elementales de integración	25
3. Teoremas de existencia y unicidad. Prolongación de solu- ciones	31
4. Dependencia de condiciones iniciales y parámetros	34
5. Sistemas y ecuaciones lineales. Caso general	37
6. Sistemas y ecuaciones lineales con coeficientes constantes	39
7. Soluciones analíticas	43
8. Integración por desarrollos en serie de la ecuación $x'' +$ $P(t)x' + Q(t)x = 0$	46
9. Problemas de contorno	51
10. Ecuación diferencial autónoma	57
11. Teoría de estabilidad	63
12. Transformada de Laplace	70
13. Introducción al cálculo de variaciones	73
Bibliografía	79
Método de enseñanza	86

CONSIDERACIONES GENERALES

Se presenta una memoria para optar a una plaza de Profesor Titular de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de La Universidad de Zaragoza, en el Área de Conocimiento de Matemática Aplicada. La carga docente asignada a dicha plaza es la asignatura de Análisis Matemático III en el Colegio Universitario de La Rioja.

En el citado Colegio se imparten, entre otras enseñanzas, los tres primeros cursos de la Licenciatura de Matemáticas. Los planes de estudio son los mismos que los de la Universidad de Zaragoza, en la que está integrado, y donde los alumnos continúan sus estudios tras finalizar los tres cursos de Logroño. Es bien sabido que estos planes de estudio están siendo objeto de reelaboración y van a ser cambiados en breve; más aún, el Colegio Universitario de La Rioja va desaparecer como tal y sus estudios formarán parte de la Universidad de La Rioja que está a punto de constituirse y que elaborará sus propios planes de estudio, posiblemente diferentes de los de la Universidad de Zaragoza. Sin embargo, en este momento los planes vigentes son los actuales de la Universidad de Zaragoza y a ellos debemos atenernos en la elaboración de esta memoria.

La asignatura de Análisis Matemático III se imparte el tercer curso de la Licenciatura de Matemáticas y es obligatoria para todos los alumnos. Tiene carácter anual y consta de cinco horas lectivas semanales, lo que con la denominación actual se traduce en quince créditos. Su contenido fundamental es el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

A la hora de elaborar un proyecto docente para esta asignatura hay que tener en cuenta su relación con otras disciplinas y su posible continuación en el segundo ciclo. Por una parte es de destacar que el Análisis Matemático es actualmente obligatorio en todos los cursos de la Licenciatura. En particular, al llegar a tercero los alumnos ya dominan en cierta medida el Análisis Real en una y varias variables, lo que podremos utilizar en el desarrollo del programa; así mismo, también tienen todos ellos el suficiente conocimiento de Álgebra Lineal, esencial en algunas de las partes de la asignatura. Por otra parte, hay que hacer notar que los temas que se abordan en Análisis Matemático III pueden ser ampliados por los alumnos en dos asignaturas fundamentalmente, ambas de carácter optativo, pero obligatorias para los que eligen la actual especialidad de Matemática Aplicada. Estas asignaturas son el Análisis Numérico (cuarto

curso), en la que se estudian métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales, y las Ecuaciones en Derivadas Parciales (quinto curso).

Al hacer la programación de una asignatura consideramos que debe tenerse en cuenta fundamentalmente los objetivos que se pretenden alcanzar — el primero de los cuales es, por supuesto, que los alumnos adquieran suficientes conocimientos sobre la materia en cuestión—, los contenidos que se impartirán para alcanzar dichos conocimientos y los métodos que se utilizarán para la mejor asimilación de aquellos por parte de los alumnos.

Los objetivos generales que nos proponemos alcanzar con el desarrollo de este programa son:

1. Que el alumno comprenda y adquiera soltura en el manejo de los conceptos básicos de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, así como que llegue a dominar y saber sacar partido de los resultados fundamentales.
2. Que consiga la base científica que haga posible posteriormente una profundización en el estudio de las Ecuaciones Diferenciales.
3. Que alcance a comprender las Ecuaciones Diferenciales no como algo desligado de la realidad, sino profundamente vinculado a la interpretación física del mundo y a la Matemática Aplicada.
4. Que cree una norma en el uso del rigor, imprescindible en todo matemático.
5. Que se habitúe a los procesos de abstracción entendidos como el paso de estructuras concretas a otras más generales.
6. Que se acostumbre al manejo de bibliografía.
7. Que aprecie la unidad esencial de las Matemáticas y la interrelación de las diversas áreas.

Naturalmente, la mayoría de los objetivos expuestos no son exclusivos de esta asignatura e irán siendo alcanzados paulatinamente.

A la consecución de los objetivos que acabamos de enunciar está destinado este proyecto docente, del que a continuación efectuamos una somera descripción.

Su núcleo está formado por el *Programa*, que se detalla en la correspondiente sección de esta memoria, y por lo que llamamos *Comentarios al programa*, que aparecen a continuación.

La elaboración de un programa necesariamente amplio con un tiempo disponible siempre escaso obliga a seleccionar cuidadosamente cada tema. Pero esta elección puede no ser compartida por todos y quizás unas personas echen en falta temas que consideren más necesarios que otros de los que aparecen en el programa. Por ejemplo, no hemos incluido en el programa algunas nociones básicas de Ecuaciones en Derivadas Parciales que se estudiarán en otra asignatura de la carrera. Por otra parte, aunque el Análisis Complejo se estudia en los cursos cuarto y quinto de la Licenciatura, sí que hemos puesto en el temario un pequeño desarrollo de la teoría de variable compleja. Analizaremos a lo largo de la memoria los motivos por los que nos hemos decidido a incluir unos u otros temas.

En cualquier caso opinamos que un programa debe ser un instrumento para el profesor y no una estructura inamovible que asfixie las iniciativas. Por tanto son cualidades indispensables del mismo la flexibilidad y la variabilidad, lo cual además permite incorporar los nuevos avances científicos o metodológicos propios de la asignatura y adaptados a los alumnos de cada curso. Ciertos temas se podrían añadir —quizás en detrimento de otros— si la organización general del curso lo permite, y algunos se podrían suprimir si no hay tiempo material de impartirlos.

Los comentarios que figuran en la presente memoria están dedicados a describir los temas propuestos en el programa pero no pretenden ser un desarrollo completo de los mismos. Su objetivo es puntualizar la forma que creemos adecuada para la exposición de cada tema, así como justificar, en algunos casos, la inclusión o exclusión de ciertas cuestiones.

La bibliografía existente hoy día en lo referente al tema de Ecuaciones Diferenciales es muy extensa, y sería tarea ingente, y probablemente inútil, recopilarla de forma completa. Incluimos al final de la memoria una sección bibliográfica que contiene una selección de textos que nos parecen interesantes. Muchos de los libros seleccionados cubren partes de la materia propuesta, otros inciden en cuestiones históricas, de evolución de los temas tratados o en

conceptos intuitivos, y por fin otros son recomendados como referencias para prolongar estudios en temas que salen del marco del programa. En cualquier caso pensamos que el material presentado cubre sobradamente el contenido del programa.

No hemos distinguido entre los textos que se llaman “de teoría” y “de problemas” por entender que no siempre tal clasificación se ajusta fielmente a la realidad. Por otra parte, no todos los libros deben ser recomendados a los alumnos, sino que muchos de ellos pueden ser utilizados por el profesor como consulta para preparar las clases o ampliar conocimientos.

Para concluir el programa docente se incluyen unos comentarios sobre metodología y organización de las clases.

**PROYECTO DOCENTE DE
ANÁLISIS MATEMÁTICO III**

Introducción

El programa de la asignatura *Análisis Matemático III* que se presenta a continuación contiene trece capítulos divididos en lecciones. En nuestra opinión, este programa contiene aquellos temas de la teoría de Ecuaciones Diferenciales que son asequibles a un estudiante de tercer curso de la Licenciatura de Ciencias Matemáticas. Al redactarlo, y teniendo en cuenta la experiencia adquirida durante los años en que hemos explicado estas materias, hemos limitado la extensión de este programa para que pueda aproximarse a una realidad.

En su confección se ha intentado siempre motivar cada uno de los temas tratados para conseguir el mayor interés posible por parte del estudiante. Esto exige mostrar, siempre que sea posible, ejemplos de la realidad física o geométrica en los que se puede aplicar lo que se estudia en clase. Por otra parte, es necesario conseguir un adecuado nivel de abstracción para hacer ver al alumno que la teoría de Ecuaciones Diferenciales no se reduce a simples métodos técnicos, sino que exige un lenguaje riguroso de acuerdo con el desarrollo de la matemática actual. Es posible que en algunos aspectos estos dos objetivos sean difíciles de compaginar o incluso contrapuestos. Estamos acostumbrados a ver como físicos e ingenieros emplean procedimientos útiles para ellos y que funcionan adecuadamente pero que carecen del rigor que los matemáticos exigimos. No se puede abandonar uno de los objetivos en favor del otro, sino que hay que intentar unirlos de alguna forma. Con este motivo, en esta memoria se propone aprovechar los ejemplos que se resuelven en clase para ver la utilización de los teoremas que se explican, así como las clases de problemas. En alguna medida, y siempre que sea posible, hay que buscar ejemplos y problemas en los que aparezcan ecuaciones diferenciales que sean de interés por algún problema concreto que se les explicará a los alumnos. Esto no es óbice para que las clases teóricas se impartan con el mayor rigor posible.

Posiblemente haya quien eche en falta en nuestro programa algunos temas ampliamente entroncados en la teoría de Ecuaciones Diferenciales, como pueden ser los métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales, la teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales, las Ecuaciones Integrales, el problema de Sturm-Liouville singular o incluso un estudio más amplio de las soluciones periódicas de ecuaciones no lineales. Algunos de estos temas son parte fundamental de otras asignaturas de la carrera, que pueden ser cursadas por los alumnos con carácter optativo. De todas formas alguno de ellos se podría esbozar

como parte de las clases prácticas. Por ejemplo, se podría resolver algún ejercicio sobre ecuaciones en derivadas parciales como aplicación de la transformada de Laplace. También, la no inclusión de otros temas en el programa es debida a que su estudio requiere unos conocimientos que, normalmente, no tiene un alumno de tercer curso de Matemáticas. Así mismo, no podemos dejar de hacer notar que el curso es necesariamente finito en tiempo, lo cual lleva a tener que decantarse por el estudio de unos u otros aspectos de la teoría de Ecuaciones Diferenciales.

Aun, con todo esto, el programa es algo extenso. Formalmente, se podría desarrollar en un curso académico sin excesivas limitaciones de tiempo, pero, en la realidad, su planteamiento exige la selección de temas o impartir algunos con un desarrollo menos amplio de como puede aparecer en el programa.

Comentamos a continuación brevemente las variaciones que se podrían introducir sobre el contenido del programa aquí propuesto:

El presente programa comienza por un tema sobre Análisis Complejo. Según cual fuera el desarrollo que se quiera dar al curso este tema podría omitirse pues no entra directamente dentro del núcleo del temario, constituido por las Ecuaciones Diferenciales. Sin embargo, nos parece importante impartir en este tercer curso de la Licenciatura una introducción a la teoría de variable compleja por varios motivos: El primero es que justo después del estudio del Análisis Real en varias variables (en segundo curso) es cuando el alumno advierte con más claridad la diferencia fundamental entre los resultados de la variable real y compleja. El segundo es que diversos resultados de variable compleja resultan enormemente útiles a la hora de abordar demostraciones de Ecuaciones Diferenciales, como puede ser el estudio de las soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace. Por último, cabe destacar que, de acuerdo al actual plan de estudios de la Universidad de Zaragoza, los alumnos que llegan al tercer curso de Matemáticas aún no han visto ningún tema dedicado al Análisis Complejo, y consideramos que no es adecuado para su formación matemática llegar también al cuarto curso sin adquirir unos mínimos conocimientos de tales temas.

El capítulo 2 se dedica al estudio de los métodos de integración clásicos para los tipos elementales de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Posiblemente algunos de estos métodos tengan su cabida en las clases prácticas, en las cuales se

podrán tratar, además, algunas cuestiones teóricas de interés secundario siempre que sean asequibles para poder ser propuestas a los alumnos como problemas teóricos.

Parece claro que los capítulos 3, 5 y 6 constituyen una temática obligada en cualquier curso de Ecuaciones Diferenciales y, en nuestra opinión, no podrían omitirse bajo ningún motivo.

El capítulo 4 es fundamentalmente teórico y puede resultar arduo para muchos alumnos. De todas formas consideramos que es importante impartirlo ya que no conviene olvidar que, en primer lugar, estamos formando matemáticos.

De los capítulos 7 y 8 quizás se pudiera prescindir, y de hecho así se hace en gran parte de los textos sobre Ecuaciones Diferenciales. Pero nosotros nos inclinamos por explicarlos por varios motivos entre los que podemos citar el atractivo en sí de los temas, su aplicabilidad y relación con la Física y finalmente el interés del autor en los mismos. De todas formas, y aunque en el programa hemos mencionado el estudio de la ortogonalidad de numerosos sistemas, parece razonable no abordar la de todos ellos ya que los métodos que se utilizan son similares.

También somos partidarios de impartir los capítulos 10 y 11, particularmente el primero de ellos. Los motivos de esta elección son la belleza geométrica de la teoría así como su actualidad y aplicabilidad. Sin embargo, posiblemente podrían rebajarse de contenido; en particular, algunos resultados se podrían indicar sin demostración.

El resto de los capítulos que componen la memoria podrían impartirse o no según cual fuera el desarrollo del curso. La experiencia nos aconseja que hay que optar por unos o por otros, pues no parece posible que dé tiempo a explicarlos todos. El capítulo 9 podría simplemente reducirse a su primer apartado, quizás además comentando a los alumnos en qué consisten los problemas de contorno y su diferencia con los de valor inicial.

En cuanto al capítulo 12, se pueden dar pequeñas nociones sobre la transformada de Laplace que resulten útiles para resolver problemas, aunque sin justificaciones teóricas, sobre todo si no se ha visto la suficiente variable compleja. Finalmente, el Cálculo de Variaciones del que trata el capítulo 13 puede suprimirse o explicarse muy someramente.

No podemos asegurar qué es lo que explicaríamos en un curso concreto, ni podemos construir un programa ideal para nosotros. No en vano, aunque siempre partiendo de un núcleo esencial, a lo largo de los años en que el autor ha impartido la asignatura hemos optado por escoger diversos temas, por aplicar enfoques diferentes en su desarrollo o en las demostraciones que se efectúan y por estudiar distintas aplicaciones de los temas tratados.

Programa

Capítulo 1. VARIABLE COMPLEJA.

- 1.1. Cálculo diferencial complejo. Funciones holomorfas.
- 1.2. Integración compleja. Teorema y fórmula integral de Cauchy. Consecuencias. Índice.
- 1.3. Series de potencias. Funciones analíticas. Equivalencia entre holomorfía y analiticidad.
- 1.4. Singularidades. Series de Laurent.
- 1.5. Teorema de los residuos. Aplicaciones.

Capítulo 2. MÉTODOS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN.

- 2.1. Noción de ecuación diferencial. Ejemplos físicos y geométricos.
- 2.2. Interpretación geométrica de la ecuación $x'(t) = f(t, x(t))$. Método de la poligonal de Euler.
- 2.3. Envolventes.
- 2.4. Ecuaciones en variables separadas.
- 2.5. Ecuaciones homogéneas.
- 2.6. Ecuaciones exactas. Factores integrantes.
- 2.7. Ecuaciones lineales de primer orden. Ecuaciones de Bernouilli y Ricatti.
- 2.8. Ecuaciones en las que la derivada aparece implícitamente. Ecuaciones de Lagrange y Clairaut.
- 2.9. Métodos de reducción de orden.
- 2.10. Trayectorias ortogonales e isogonales.

Capítulo 3. TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD. PROLONGACIÓN DE SOLUCIONES.

- 3.1. Transformación de ecuaciones de orden n en sistemas.
- 3.2. Problemas de valores iniciales.
- 3.3. Condición de Lipschitz. Teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas.
- 3.4. Teorema de existencia y unicidad local (Picard).
- 3.5. Teorema de existencia y unicidad global (Picard-Lindelöf).
- 3.6. Prolongación de soluciones.
- 3.7. Teorema de Ascoli-Arzelà.
- 3.8. Teorema de existencia de Peano.

Capítulo 4. DEPENDENCIA DE CONDICIONES INICIALES Y PARÁMETROS.

- 4.1. Soluciones ε -aproximadas.
- 4.2. Continuidad de las soluciones respecto a condiciones iniciales y parámetros.
- 4.3. Derivabilidad de las soluciones respecto a condiciones iniciales y parámetros.

Capítulo 5. SISTEMAS Y ECUACIONES LINEALES. CASO GENERAL.

- 5.1. Espacios de matrices. Exponencial de una matriz.
- 5.2. Sistemas lineales homogéneos. Espacio fundamental de soluciones. Fórmula de Jacobi-Liouville.
- 5.3. Sistemas lineales. Método de variación de las constantes (Lagrange).
- 5.4. Ecuaciones lineales de orden n .
- 5.5. Método de reducción de orden de d'Alembert.

Capítulo 6. SISTEMAS Y ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES.

- 6.1. Solución de sistemas lineales homogéneos. Soluciones reales cuando la matriz de coeficientes es real.
- 6.2. Ecuación lineal de orden n con coeficientes constantes. Ecuación de Euler.
- 6.3. Casos particulares de ecuaciones lineales no homogéneas. (Método de coeficientes indeterminados.)

Capítulo 7. SOLUCIONES ANALÍTICAS.

- 7.1. Soluciones de sistemas lineales con coeficientes analíticos.
- 7.2. Polinomios de Tchebichef. Propiedades. Ortogonalidad.
- 7.3. Ecuación de Hermite. Fórmula de Rodrigues. Ortogonalidad de los polinomios de Hermite.

Capítulo 8. INTEGRACIÓN POR DESARROLLOS EN SERIE DE LA ECUACIÓN $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$.

- 8.1. Puntos singulares regulares.

- 8.2. Método de Fröbenius.
- 8.3. Caso en el que las raíces de la ecuación indicial se diferencian en un entero.
- 8.4. Ecuación de Bessel. Funciones de Bessel. Ortogonalidad.
- 8.5. Ecuación de Jacobi. Fórmula de Rodrigues. Ortogonalidad de los polinomios de Jacobi.
- 8.6. Ecuación de Laguerre. Fórmula de Rodrigues. Ortogonalidad de los polinomios de Laguerre.

Capítulo 9. PROBLEMAS DE CONTORNO.

- 9.1. Teoremas de separación y comparación de Sturm.
- 9.2. Problema de Sturm-Liouville regular.
- 9.3. Autovalores. Ortogonalidad.
- 9.4. Fórmula de Green.

Capítulo 10. ECUACIÓN DIFERENCIAL AUTÓNOMA.

- 10.1. Sistemas autónomos. Espacio de fases.
- 10.2. Existencia y unicidad de trayectorias. Clasificación.
- 10.3. Conjuntos límite. Propiedades: carácter cerrado y conexo.
- 10.4. Teorema de Poincaré-Bendixson para la existencia de órbitas periódicas en el plano.
- 10.5. Teorema de Liénard.
- 10.6. Estabilidad y estabilidad asintótica de puntos críticos.
- 10.7. Funciones definidas positivas. Método de Liapunov.
- 10.8. Puntos críticos para sistemas lineales en el plano: nodo, punto de silla, foco y centro.
- 10.9. Teorema de Poincaré para puntos críticos de sistemas no lineales en el plano.

Capítulo 11. TEORÍA DE ESTABILIDAD.

- 11.1. Concepto de estabilidad. Definiciones y consideraciones en torno a distintos tipos de estabilidad.
- 11.2. Estabilidad de soluciones de sistemas lineales.
- 11.3. Sistemas lineales con coeficientes constantes. Criterio geométrico de estabilidad.

11.4. Estabilidad respecto a la primera aproximación para ecuaciones no lineales.

11.5. Método directo de Liapunov.

Capítulo 12. TRANSFORMADA DE LAPLACE.

12.1. Definición y propiedades.

12.2. Lema de Riemann-Lebesgue. Fórmula de inversión.

12.3. Aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales.

12.4. Aplicación a la resolución de ecuaciones integrales de convolución.

Capítulo 13. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE VARIACIONES.

13.1. Planteamiento del problema.

13.2. Nociones de cálculo diferencial en espacios de Banach.

13.3. Funciones extremales. Ecuación de Euler.

13.4. Condiciones suficientes de máximo y mínimo.

13.5. Problemas isoperimétricos.

Comentarios al programa

1. VARIABLE COMPLEJA

La teoría elemental de funciones de una variable compleja se centra en las funciones holomorfas (con derivada) o analíticas (desarrollables en serie). Ambos conceptos son equivalentes, y puede partirse indistintamente de uno u otro. Su equivalencia aparece a través de la integral compleja, y es la armonía entre estos tres poderosos instrumentos: derivación, integración y desarrollo en serie, la que proporciona su mayor belleza a la teoría. Esta puede seguirse sin apenas conocimiento del cálculo con funciones de varias variables reales, valiéndose de métodos puramente complejos cuya elegancia es innegable. Nuestra breve exposición tratará sin embargo de resaltar las relaciones con los conceptos utilizados en el análisis de funciones de \mathbb{R}^n que se estudia el curso anterior.

Una función $f(z)$ definida en un abierto $V \subset \mathbb{C}$ y con valores complejos puede considerarse equivalente a una aplicación de V en \mathbb{R}^2 , o como dos funciones reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ definidas en V , siendo $f = u+iv$, $z = x+iy$. Dicha función es *holomorfa* en V si existe el límite

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

para cada $z \in V$. A $f'(z)$ se le llama *derivada* de f en z , y aunque la apariencia formal es la misma que para la derivación real, el hecho de que w se aproxime a z en cualquier dirección dando siempre el mismo límite, hace que la existencia de derivada compleja entrañe propiedades muy especiales de la función. Como primera confirmación de ello citaremos varias condiciones equivalentes:

- 1) $f'(z)$ existe.
- 2) $f = (u, v)$ es diferenciable en z y se verifican las *ecuaciones de Cauchy-Riemann* $u_x(z) = v_y(z)$, $u_y(z) = -v_x(z)$.
- 3) f es diferenciable en z , y el vector gradiente $(v_x(z), v_y(z))$ se obtiene por giro positivo un ángulo $\frac{\pi}{2}$ de $(u_x(z), u_y(z))$.
- 4) O bien $f'(z) = 0$, o bien f conserva los ángulos.

Naturalmente, la diferenciable se entiende en el sentido del Análisis Real. Cada una de estas condiciones merece un pequeño comentario sobre su significado.

Supongamos que $f = (u, v)$ es diferenciable en z . Entonces existirán las derivadas direccionales complejas

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + te^{i\theta}) - f(z)}{te^{i\theta}}$$

para cualquier $\theta \in [-\pi, \pi)$, y todas ellas tendrán el mismo valor $f'(z)$. En particular la igualdad de las derivadas direccionales a lo largo del eje real y del eje imaginario nos proporciona las ecuaciones de Cauchy-Riemann. A su vez, si f es diferenciable en z , las citadas ecuaciones nos llevan fácilmente a probar que su derivada es $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z)$.

La condición 3) es una simple reformulación de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, pero permite plantear la cuestión en su aspecto puramente geométrico: dada una función holomorfa, las trayectorias que hacen constante a su parte real y las que hacen constante a su parte imaginaria son mutuamente ortogonales.

El significado de 4) es que dos curvas que pasan por z forman el mismo ángulo que sus imágenes por $f(z)$. Más precisamente, la pendiente de una curva en z se incrementa en $\arg f'(z)$ al transformarla mediante f . Por otra parte, $|f'(z)|$ es el coeficiente que mide la dilatación lineal en z producida por f , y el hecho de que tal coeficiente exista independientemente de la dirección equivale a que f o su conjugada tengan derivada en z . Los dos hechos mencionados son consecuencia de la acción de la diferencial de $f = (u, v)$ que consiste sencillamente en la multiplicación compleja por $f'(z)$. Una transformación de un abierto en otro que conserve los ángulos se llama *conforme*. Para el plano complejo, las transformaciones conformes son las holomorfias con derivada no nula en todo punto. Naturalmente, si $|f'(z)|$ es el coeficiente de dilatación lineal, el de dilatación superficial será su cuadrado, lo que concuerda con el hecho de que

$$|f'(z)|^2 = u_x(z)^2 + u_y(z)^2 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(z)$$

según las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

La terminología y resultados sobre formas diferenciales pueden aplicarse cuando los coeficientes son complejos. Una 1-forma $\omega = P dx + Q dy$, con $P, Q: V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de clase \mathcal{C}^1 , se dice *cerrada* si $P_y = Q_x$; y se dice *exacta* si

existe $f: V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $df = \omega$. Tiene sentido así mismo hablar de la integración de una 1-forma a lo largo de Γ curva \mathcal{C}^1 a trozos como

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

donde $\gamma: [a, b] \rightarrow V$ es una parametrización de Γ . La integral de una 1-forma cerrada es la misma sobre dos curvas homótopas con extremos fijados; o también sobre dos curvas cerradas homótopas. En particular, la integral a lo largo de cada camino cerrado en V es nula si V es *simplemente conexo* (es decir, si cada curva cerrada es homótopa a un punto).

El hecho de que una 1-forma sea exacta es equivalente a que su integral a lo largo de dos caminos cualesquiera con los mismos origen y destino sea siempre la misma, y también a que la integral a lo largo de cada camino cerrado sea nula. Si w es exacta entonces es obviamente cerrada, lo contrario no es cierto en general, pero sí para dominios simplemente conexos. En particular, toda 1-forma cerrada es *localmente exacta*.

Un conjunto $D \subset \mathbb{C}$ abierto y acotado se dice *dominio regular* si su frontera ∂D es una unión finita de curvas \mathcal{C}^1 a trozos y, además, D queda a un lado de su frontera. Así, en cada punto de ∂D podemos definir el vector normal exterior, que queda determinado por el hecho de ser unitario y estar dirigido hacia el lado de la frontera donde no está D . Esto proporciona a ∂D una *orientación positiva*. Supongamos ahora que tenemos $\omega = P dx + Q dy$ una 1-forma diferenciable de clase \mathcal{C}^1 definida en un abierto V , y D un dominio regular positivamente orientado tal que su adherencia está contenida en V . En estas condiciones, se satisface la *fórmula de Green-Riemann* (teorema de la divergencia en el plano)

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

En particular, si w cerrada, $\int_{\partial D} \omega = 0$. Este resultado es gran utilidad a la hora de abordar el Análisis Complejo partiendo del Análisis Real, tal como pretendemos hacer en estas breves notas.

Por otra parte, una función real g de clase \mathcal{C}^2 en un abierto V de \mathbb{R}^2 se dice *armónica* si $g_{xx} + g_{yy} = 0$. Las funciones armónicas satisfacen el teorema

del valor medio

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_S g(z + ru) d\sigma(u),$$

siendo S la circunferencia unidad (recorrida en sentido positivo) y $r > 0$ tal que la bola cerrada $B_r[z]$ esté contenida en V . De aquí se sigue que una función armónica es de clase \mathcal{C}^∞ .

Si f es holomorfa en V , sus partes real e imaginaria son armónicas. Así,

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

para curvas Γ_1 y Γ_2 homótopas en V , cerradas o con los mismos extremos (teorema de Cauchy). Además, f tendrá derivada holomorfa y, localmente, también primitiva holomorfa. Si se impone que f sea de clase \mathcal{C}^1 , la comprobación de estos resultados es muy sencilla pues las condiciones de Cauchy-Riemann equivalen a que $f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy)$ sea cerrada. Esto sigue siendo cierto sin la hipótesis adicional de que f sea de clase \mathcal{C}^1 (Cauchy-Goursat), pero su demostración pasa necesariamente a través de la integral compleja. (A posteriori, esta hipótesis resulta ser superflua pues las funciones holomorfas son \mathcal{C}^∞ .)

En cuanto a la existencia global de primitiva para f , esta viene caracterizada por el hecho de que su integral a lo largo de curvas cualesquiera con los mismos extremos sea constante. La demostración consiste simplemente en tomar $z_0 \in V$ fijo y probar que la función

$$F(z) = \int_{\Gamma} f(w) dw, \quad z \in V,$$

donde Γ es un camino que une z_0 y z , es derivable y su derivada vale $f(z)$.

Por otra parte, si f es holomorfa, gozará de la propiedad del valor medio por ser sus partes real e imaginaria armónicas, es decir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

siempre que $B_r[z] \subset V$, y recorriendo la circunferencia $|w - z| = r$ en sentido positivo. Este es un caso muy particular de la *fórmula integral de Cauchy* que

puede extenderse considerablemente. Además, si derivamos sucesivamente la expresión anterior dentro del signo integral, lo cual se puede justificar, queda

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Un importante resultado que se deduce de la fórmula de Cauchy para las derivadas es el teorema de Liouville, que asegura que toda función *entera* (derivable en todo \mathbb{C}) y acotada es constante. (Puede precisarse más: una función entera no constante toma todos los valores complejos excepto uno a lo sumo.) Es tradicional la aplicación del teorema de Liouville para demostrar el teorema fundamental del álgebra.

Y otro útil resultado es el teorema de Weierstrass, que prueba que si f_n , $n \geq 0$, es una sucesión de funciones holomorfas tales que $f_n \rightarrow f$ uniformemente sobre compactos, entonces f es holomorfa y las derivadas de cualquier orden de las funciones f_n convergen uniformemente sobre compactos a las correspondientes derivadas de f .

Sea ahora una curva Γ cerrada que no pasa por z . Definimos el *índice* de z respecto de Γ por medio de la integral

$$\text{índ}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z}.$$

Es fácil ver que $\text{índ}_{\Gamma}(z) \in \mathbb{Z}$, es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ y es nula en la componente conexa no acotada. Intuitivamente, $\text{índ}_{\Gamma}(z)$ representa el número de vueltas que da Γ en torno a z , en sentido positivo si $\text{índ}_{\Gamma}(z) > 0$ y en sentido negativo si $\text{índ}_{\Gamma}(z) < 0$. Esto se comprende bastante bien teniendo en cuenta que $\log|w-z| + i \arg(w-z)$ es una primitiva local de $1/(w-z)$. Con esta notación, un caso mucho más general de la fórmula integral de Cauchy es

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z) \text{índ}_{\Gamma}(z),$$

donde f holomorfa en V abierto y Γ es una curva cerrada en V homótopa a cero que no pasa por z .

Discutiremos a continuación el tercer aspecto de la teoría, constituido por los desarrollos en serie. Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ existe

un único R , con $0 \leq R \leq \infty$, tal que la serie converge en $|z - z_0| < R$ y diverge en $|z - z_0| > R$. Dicho R , llamado *radio de convergencia*, puede calcularse por la fórmula de Cauchy-Hadamard $1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$. En el interior del círculo de convergencia la serie converge absolutamente, y uniformemente en subconjuntos compactos. Además, es derivable término a término con serie derivada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ del mismo radio de convergencia. Una función $f(z)$ definida en un abierto V es *analítica* si puede desarrollarse en serie de potencias en un entorno de cada punto. Entonces $f(z)$ es indefinidamente derivable y sus derivadas son también analíticas. En particular, f analítica implica f holomorfa.

Para funciones de variables reales la separación entre los conceptos de derivable y analítica es enorme, pues incluso funciones \mathcal{C}^∞ pueden no ser analíticas. La considerable exigencia que supone el que una función tenga derivada compleja se pone de manifiesto en el recíproco de la proposición anterior, que se obtiene desarrollando $(w - z)^{-1}$ de la fórmula integral de Cauchy en potencias de $(z - z_0)$ y comprobando que se puede permutar el sumatorio con la integral. Así se tiene

$$f \text{ holomorfa} \iff f \text{ analítica},$$

lo cual puede considerarse el “teorema fundamental” de la teoría de variable compleja.

Las series de potencias constituyen un procedimiento bastante directo para definir las funciones elementales, como la exponencial y trigonométricas, así como las determinaciones del logaritmo y la potenciación. El círculo de convergencia del desarrollo de f con centro en z_0 es el máximo contenido en el dominio de analiticidad de la función. En particular una función entera, que será analítica en todo el plano, se expresa como una serie de potencias de radio infinito.

Como consecuencia de la equivalencia entre holomorfía y analiticidad pueden probarse nuevas propiedades de las funciones holomorfas que tampoco son ciertas para funciones de variables reales de clase \mathcal{C}^∞ . Sea f una función holomorfa definida en un abierto conexo V . Así: 1) Si existe $z_0 \in V$ tal que $f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n \geq 1$ entonces f constante en V . 2) Si el conjunto de ceros de f tiene puntos de acumulación en V entonces f es la función nula. Este hecho

también puede expresarse diciendo que dos funciones analíticas que coinciden en un conjunto abierto y conexo con puntos de acumulación son iguales, lo que se conoce como *principio de prolongación analítica*.

Cuando $f(z)$ está definida en la corona $r < |z - a| < R$ ($0 \leq r < R \leq \infty$) y es holomorfa, admitirá localmente desarrollos en serie analítica, pero un desarrollo en potencias positivas de $(z - a)$ sólo es posible si la función puede prolongarse al disco $|z - a| < R$ sin dejar de ser holomorfa. Sin embargo, existe en general un *desarrollo de Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$$

válido para toda la corona. El caso $r = 0$ tiene especial interés. Supongamos que $a \in V$ y que f holomorfa en $V \setminus \{a\}$. Se dice entonces que f tiene una *singularidad* en el punto a , y según sea el desarrollo de Laurent en una pequeña corona $0 < |z - a| < \varepsilon$ pueden darse tres casos:

1) El desarrollo de Laurent no contiene potencias negativas de $(z - a)$. Entonces a es una *singularidad evitable* y puede definirse $f(a)$ de modo que f sea holomorfa en V .

2) En el desarrollo de Laurent, el último coeficiente no nulo de potencias negativas de $(z - a)$ es c_{-k} , Entonces a es un *polo* de orden k .

3) En el desarrollo de Laurent existen infinitos coeficientes no nulos de potencias negativas de $(z - a)$. Entonces a es una *singularidad esencial*.

El primer caso se caracteriza porque f es acotada en el entorno de a , y no merece considerarse realmente como singularidad. En el segundo caso, la función $1/f(z)$ tiene un cero de orden k en el punto a . Cuando a es una singularidad esencial, $1/f(z)$ no es holomorfa, y este caso viene caracterizado por el hecho de que la imagen de $0 < |z - a| < \varepsilon$ es densa en el plano para cualquier $\varepsilon > 0$ (Cassorati-Weierstrass); más precisamente, dicha imagen es todo \mathbb{C} salvo un punto a lo sumo (Picard). Las funciones cuyas únicas singularidades son polos aislados se conocen con el nombre de *meromorfas*.

Al coeficiente de $(z - a)^{-1}$ en el desarrollo de Laurent se le llama *residuo* de f en a : $\text{Res}(f, a) = c_{-1}$. Este coeficiente es de especial importancia por su intervención en el cálculo de integrales de funciones con singularidades.

Supongamos que tenemos una función holomorfa en un abierto V excepto en un conjunto $\{a_k\}$ de singularidades aisladas, y sea D un dominio regular positivamente orientado, $\bar{D} \subset V$, y cuya frontera no pasa por ninguna de las singularidades. En estas circunstancias, el teorema de Cauchy de funciones holomorfas que establece la anulaci3n de la integral se convierte en el teorema de los residuos

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, a_k).$$

Este resultado es de gran utilidad para el c3lculo de integrales reales y de sumas de series. Tambi3n puede aplicarse para demostrar diversos resultados te3ricos de gran importancia. Acabemos el cap3tulo citando algunos de ellos:

1) La imagen de un abierto conexo por una aplicaci3n holomorfa no constante es otro abierto. Como consecuencia se obtiene el *principio del m3dulo m3ximo*: toda funci3n holomorfa f definida en un abierto conexo tal que $|f(z)|$ tiene m3ximos locales es constante.

2) Sea f una funci3n meromorfa en V abierto y D un dominio regular positivamente orientado, $\bar{D} \subset V$, y tal que ∂D no pasa por ceros ni polos de f . Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg f(z)$$

donde Z y P son, respectivamente, el n3mero de ceros y polos de f en D , contando su multiplicidad, y $\Delta_{\partial D} \arg f(z)$ indica la variaci3n del argumento de $f(z)$ a lo largo de ∂D . Este resultado es conocido como *principio de variaci3n del argumento*. Entre sus aplicaciones m3s directas se encuentra el c3lculo del n3mero de ceros de funciones holomorfas dentro de un recinto.

2. M3TODOS ELEMENTALES DE INTEGRACI3N

En sentido amplio, una *ecuaci3n diferencial* es una ecuaci3n que contiene derivadas o derivadas parciales de una o varias variables dependientes respecto a una o varias variables independientes. Resolver la ecuaci3n diferencial consiste en encontrar una funci3n suficientemente derivable que la satisfaga.

Seg3n estemos tratando con funciones de una o varias variables diremos que nos encontramos ante la teor3a de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias o la

de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Aquí sólo nos ocuparemos de la primera de ellas.

Entre las principales aplicaciones de las ecuaciones diferenciales se encuentra el modelizar la evolución de un estado físico a lo largo del tiempo. Así, denotaremos generalmente t a la variable independiente y x a la variable dependiente. Concretamente, consideraremos una ecuación de la forma $F(t, x, x', \dots, x^{(r)}) = 0$, siendo F una función definida en un subconjunto de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^{r+1}$ (o de $\mathbb{R} \times (\mathbb{C}^n)^{r+1}$). Una *solución* en un intervalo I será una función $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(r)}(t)) = 0 \forall t \in I$.

Se llama *orden* de la ecuación diferencial al máximo orden de derivación que aparece (r en el ejemplo anterior). Cuando la derivada de mayor orden se puede despejar, la ecuación se denomina *explícita* y, en el caso contrario, *implícita*. Así, las ecuaciones explícitas se expresan mediante $x^{(r)} = f(t, x, x', \dots, x^{(r-1)})$. Si tenemos una ecuación implícita, el teorema de la función implícita nos proporciona hipótesis bajo las cuales se asegura que $x^{(r)}$ puede despejarse localmente. De aquí que generalmente sólo trataremos con ecuaciones explícitas.

Con la notación anterior, cuando $n > 1$ tomamos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y las funciones componentes $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)$. De este modo, la ecuación $x' = f(t, x)$ se expresa como

$$\begin{cases} x'_1 = f^1(t, x_1, \dots, x_n), \\ x'_2 = f^2(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ x'_n = f^n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

por lo que se utiliza el nombre de *sistema de ecuaciones diferenciales*. (Análogamente ocurre con $r > 1$, aunque con la notación más sobrecargada.)

Por otra parte, los sistemas de orden superior a 1 siempre se pueden reducir a sistemas de mayor dimensión pero de orden 1. Por ejemplo, en el caso $n = 1$, la ecuación $x^{(r)} = f(t, x, x', \dots, x^{(r-1)})$, que es de orden r , se transforma,

sin más que denotar $x_1 = x$, $x_2 = x'$, \dots , $x_r = x^{(r-1)}$, en el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ \dots \\ x'_{r-1} = x_r, \\ x'_r = f(t, x_1, \dots, x_r), \end{cases}$$

que es de orden 1 y dimensión r . Si $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^r)$ es una solución de dicho sistema entonces φ^1 es una solución a la ecuación de orden r original. Por este motivo, no se pierde generalidad al dedicarnos a estudiar únicamente ecuaciones (o sistemas) de orden 1.

Una vez planteado en qué consiste la resolución de ecuaciones diferenciales, así como diversos conceptos relacionados con ellas, vamos a abordar los dos objetivos fundamentales de este capítulo, que son los siguientes: 1) Comprender que las ecuaciones diferenciales no son algo que los matemáticos se inventan por puro placer intelectual, sino que son de gran utilidad ya que permiten resolver multitud de problemas físicos o geométricos. 2) Mostrar diversos métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales. A partir de ahora, y a lo largo de todo el capítulo, consideraremos siempre que estamos tratando con funciones reales de variable real.

La mejor forma de alcanzar nuestro primer objetivo consiste en plantear ejemplos sencillos en los que se ponga de manifiesto que encontrar la solución a un problema concreto se reduce a resolver una ecuación diferencial. No hay ninguna dificultad en hacer esto ya que los ejemplos son innumerables en cualquier campo de la Física. Por citar unos cuantos entre los más fáciles podemos hablar de la ecuación del movimiento de una partícula sometida a una fuerza (segunda ley de Newton), la desintegración radiactiva, el paso de la corriente en un circuito eléctrico, etc.

En cuanto al aspecto geométrico de las ecuaciones diferenciales, resulta fundamental entender la significación geométrica de las soluciones de la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ como las curvas planas $x = x(t)$ tales que su pendiente en cada punto (t, x) por el que pasa la curva vale precisamente $f(t, x)$. Para ilustrar esta interpretación es útil comentar cómo a partir de ella surge de forma natural el *método de Euler* de aproximación de soluciones de una ecuación

diferencial. Más adelante en el capítulo 4 se podrá demostrar que este método no es únicamente un método geométrico sino que existe una justificación teórica que garantiza que lo que se obtiene es realmente una aproximación de la solución.

Otra sencilla interpretación geométrica permite ver que, si una familia de curvas satisface una ecuación diferencial, su envolvente, si es que existe, también la satisface.

Vamos ahora a estudiar los métodos clásicos para integrar ecuaciones diferenciales expresando su solución por medio de cuadraturas. Aunque el objetivo que se pretende con esto es eminentemente práctico y, como tal, muchas veces no será necesario emplear todo el rigor matemático a la hora de resolver problemas, no se debe tampoco caer en un excesivo formalismo. Por lo menos en las explicaciones teóricas es necesario dejar bien claro que los pasos que se realizan al resolver mecánicamente ecuaciones diferenciales están justificados ya sea por el teorema de la función inversa o de la función implícita. No haremos aquí una enumeración exhaustiva de procedimientos de resolución de ecuaciones, sino que nos limitaremos a comentar los más significativos.

El primer tipo de ecuaciones diferenciales que se resolverá son las de la forma $g(t) = h(x)x'$, que se denominan ecuaciones en variables separadas. Para ello, sean $g(t)$ y $h(x)$ continuas y denotemos $G(t)$ y $H(x)$ dos primitivas suyas. Que $\varphi(t)$ sea solución de la ecuación es equivalente a que $g(t) = h(\varphi(t))\varphi'(t) = (H \circ \varphi)'(t)$, lo que a su vez, integrando, puede expresarse como $G(t) = (H \circ \varphi)(t) + C$. Si $h(t)$ no se anula, el teorema de la inversa nos asegura que localmente puede despejarse $\varphi(t) = H^{-1}(G(\cdot) - C)(t)$, que es la solución buscada.

A continuación se analizarán las ecuaciones homogéneas $x' = f(\frac{x}{t})$, entre cuyas soluciones siempre se encuentra una familia de curvas homotéticas. El método de resolución consiste en hacer el cambio $u = \frac{x}{t}$ con lo que la ecuación se transforma en una de variables separadas.

Existen algunos tipos de ecuaciones diferenciales que pueden reducirse a ecuaciones homogéneas. El ejemplo más común es el de la ecuación

$$x' = f\left(\frac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right),$$

que, según sean las rectas $a_1t + b_1x + c_1 = 0$ y $a_2t + b_2x + c_2 = 0$ paralelas o concurrentes, se transforma de manera sencilla en una ecuación en variables separadas o en una homogénea.

Otro tipo de ecuaciones que resulta fácil de integrar son las ecuaciones diferenciales exactas. A este respecto resulta obligatorio comentar que un posible método de solución de una ecuación diferencial cualquiera consiste en encontrar un *factor integrante* que permita transformarla en una exacta. De todas formas no existe ningún procedimiento general para encontrar factores integrantes de cualquier ecuación diferencial. Sí que hay diversos métodos sencillos aplicables a casos particulares, por ejemplo para hallar factores integrantes dependientes sólo de t o de x si es que realmente existen.

El siguiente tipo de ecuaciones que pretendemos resolver es el de las lineales de primer orden $x' + a(t)x = b(t)$, cuya solución general no resulta difícil probar que es

$$x(t) = e^{-\int a(t) dt} \left[\int b(t) e^{\int a(t) dt} dt + C \right].$$

Hay tres métodos principales de resolver estas ecuaciones (y, en particular, para llegar a la expresión anterior). Uno de ellos consiste precisamente en encontrar un factor integrante. Los otros dos requieren haber resuelto previamente la ecuación lineal homogénea asociada, lo cual es siempre sencillo por ser de variables separadas. Una vez hecho esto se puede aplicar el método de variación de las constantes o utilizar que la solución general de la lineal es la solución general de la homogénea más una solución particular de la lineal. Este último método sólo resulta útil cuando alguna solución particular de la lineal aparece de forma evidente.

Una vez que ya sabemos hallar las soluciones las ecuaciones lineales, es fácil resolver la ecuación de Bernoulli $x' + a(t)x + b(t)x^\alpha = 0$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, ya que se reduce a una lineal sin más que aplicar el cambio de función incógnita $y = x^{1-\alpha}$. (Exigir $0 \neq \alpha \neq 1$ no supone ninguna restricción ya que si $\alpha = 0$ la ecuación es lineal y si $\alpha = 1$ es de variables separadas.)

Siguiendo con esta línea nos encontramos con la ecuación de Riccati $x' + a(t)x + b(t)x^2 = c(t)$. Esta ecuación no puede resolverse en general por medio de cuadraturas, pero sí que podemos hacerlo siempre que conozcamos

una solución particular suya $x_1(t)$, puesto que en este caso resulta sencillo transformarla en una de Bernoulli mediante el cambio $x = x_1 + y$.

En todas las ecuaciones diferenciales que hemos mencionado hasta ahora la derivada aparece explícitamente, pero también podemos plantearnos el resolver ecuaciones de la forma $F(t, x, x') = 0$ en las que la derivada aparece implícitamente. Un primer caso es cuando mediante factorización se puede reducir el problema a otros de tipo implícito. Esto ocurre por ejemplo cuando F es un polinomio de grado n en x' cuyos coeficientes son funciones de t y x . Si logramos factorizar el polinomio, la ecuación explícita se transforma en n ecuaciones implícitas que deberemos resolver.

Aparte de las que acabamos de analizar, entre las ecuaciones en las que la derivada aparece implícitamente sólo merece la pena destacar los casos en los que se puede despejar o bien x o bien t . El procedimiento a seguir consiste entonces en hacer el cambio $x' = p$ y derivar respecto a t o respecto a x , transformándose así la ecuación en una nueva. Supongamos en primer lugar que tenemos $x = f(t, x')$. Si f no depende de t esta ecuación se reduce a una de variables separadas que resulta fácil de resolver, pero en general no hay un método que nos permita encontrar su solución. Dos casos en los que sí es posible es en las ecuaciones de Lagrange $x + ta(x') + b(x') = 0$ y Clairaut $x - tx' + b(x') = 0$. Cuando lo que se puede despejar es t en lugar de x los métodos a seguir son similares.

Al margen de que en el capítulo 6 aprenderemos a resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes, todos los métodos que hemos visto se aplican únicamente a ecuaciones de primer orden. Por lo tanto todo proceso que permita reducir el orden de una ecuación diferencial resulta potencialmente útil. No siempre hay una manera de efectuar tales reducciones, y aquí simplemente se mostrarán algunos tipos generales para los que sí que es posible hacerlo sin más que aplicar las transformaciones y cambios de variable adecuadas. Un ejemplo trivial es cuando en la ecuación diferencial no aparece x' pero sí x'' , con lo cual tomando $y = x'$ el orden se reduce en uno. Otro ejemplo es el caso en el que en la ecuación no aparece la variable independiente t , para el cual un método de reducción de orden consiste en tomar $x' = p$ y derivar respecto de x .

Para concluir el capítulo se mostrará cómo obtener la ecuación diferencial

que verifica una familia de curvas, problema que es precisamente el inverso de la resolución de ecuaciones diferenciales que hemos tratado hasta ahora. Una sencilla aplicación de este hecho es el poder encontrar trayectorias ortogonales (o, más en general, isogonales) a una familia uniparamétrica de curvas. El método es sencillo y consiste simplemente en aplicar que si dos curvas son ortogonales en un punto el producto de sus pendientes es -1 .

3. TEOREMAS DE EXISTENCIA Y UNICIDAD. PROLONGACIÓN DE SOLUCIONES

Este es uno de los temas centrales del programa ya que en él se establecerán los fundamentos de la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

En este capítulo se pretende como objetivo principal el estudiar las soluciones de los *problemas de valores iniciales* (también denominados *problemas de Cauchy*). Es decir, dada una función $f: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y un punto $(t_0, x_0) \in D$, lo que nos planteamos es encontrar un intervalo I y una función $\varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaga

$$(P) \equiv \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Dicha función se denomina *solución* del problema (P) . Nos preocuparemos también de analizar la unicidad de tal solución y de encontrar el mayor intervalo al que se puede extender.

Además, aplicando la transformación ya vista en el capítulo anterior, las ecuaciones diferenciales de orden n

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \\ x(t_0) = x_0^0, x'(t_0) = x_0^1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}, \end{cases}$$

donde $g: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, pueden estudiarse como casos particulares de (P) .

En cuanto a la existencia y unicidad de soluciones, los principales resultados que se demostrarán serán los de los de Picard, Picard-Lindelöf y Peano.

Es fundamental en la demostración de estos resultados el teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas. Una aplicación $T: E \longrightarrow E$, siendo

(E, d) espacio normado y completo, se dice *contractiva* si existe $k < 1$ tal que $d(T(p), T(q)) \leq kd(p, q) \quad \forall p, q \in E$. En tales circunstancias, el citado teorema del punto fijo afirma que existe un único $z \in E$ tal que $T(z) = z$; y además $z = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(p) \quad \forall p \in E$.

Sea ahora una función $f: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que f es *lipschitziana respecto a la segunda variable* en D si existe una constante k tal que $|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|$ para todo $(t, x), (t, y) \in D$. Y se dice *localmente lipschitziana respecto a la segunda variable* si para cada punto $(t_1, x_1) \in D$ existe un entorno en el cual es lipschitziana respecto a la segunda variable. El teorema del valor medio muestra fácilmente la relación que existe entre las propiedades anteriores y el hecho de que la función sea derivable con derivadas parciales continuas.

Tomemos $D = [t_0 - h, t_0 + h] \times B_r[x_0]$ y f continua y lipschitziana respecto a la segunda variable. Bajo estas hipótesis, el teorema de Picard afirma que existe una única solución de (P) local, es decir definida en un intervalo $I \subset [t_0 - h, t_0 + h]$. Su demostración consiste básicamente en construir por recurrencia las *iteradas de Picard*

$$\varphi_0(t) = x_0, \quad \varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, \varphi_n(t)) dt,$$

y comprobar, con ayuda del teorema del punto fijo, que convergen a una función que resulta ser solución de (P) ; además, la unicidad del punto fijo se traduce en la unicidad de la solución. Es de destacar que la demostración de este teorema proporciona un método de construir la solución, así como la posibilidad de obtener cotas del error cometido al sustituir la solución exacta por la n -ésima iterada. Incluso es fácil poner ejemplos en los que las iteradas de Picard coinciden con el desarrollo de Taylor de la solución, aunque esto no es cierto en general.

El teorema de Picard-Lindelöf es similar y se encarga de demostrar la existencia y unicidad de solución de (P) pero cuando $D = [t_0 - h, t_0 + h] \times \mathbb{R}^n$. En este caso se puede garantizar que la solución está definida en el mismo intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$. Es por esto que al teorema de Picard se le llama de *existencia y unicidad local* y al de Picard-Lindelöf de *existencia y unicidad global*.

Para la existencia de soluciones de (P) , la hipótesis de que f sea lipschitziana respecto a la segunda variable se puede suprimir. De esto se

encarga el teorema de Peano, el cual muestra la existencia de solución de (P) , pero no necesariamente única, cuando f continua y acotada. Existen varias demostraciones distintas de este resultado; en la mayor parte de ellas se emplea el teorema de Ascoli-Arzelà, el cual garantiza que, dada una familia equicontinua y uniformemente acotada de funciones definidas sobre un compacto, siempre se puede extraer una sucesión uniformemente convergente.

Aunque son numerosos los ejemplos de funciones que verifican las hipótesis del teorema de Peano y cuyos correspondientes problemas de Cauchy no tienen solución única, ninguno de los resultados sobre unicidad anteriormente citados proporciona condiciones necesarias y suficientes. En este sentido existen ejemplos sencillos que prueban que es posible que la solución de un problema (P) sea única aunque la función f no sea lipschitziana respecto a la segunda variable en ningún entorno del punto (t_0, x_0) .

Por otra parte, es de destacar que el método de las iteradas de Picard no sirve en general para encontrar la solución que garantiza el teorema de Peano cuando f continua. En efecto, es posible encontrar una función f continua para la cual existe solución única de (P) y sin embargo ni las iteradas de Picard ni ninguna subsucesión suya convergen a la solución.

En cuanto a la prolongabilidad de soluciones, consideremos un problema (P) para el que la función f está definida en $D = I \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y vamos a ocuparnos únicamente de soluciones a la derecha de t_0 . Es fácil concluir, apoyándose en el lema de Zorn, que toda solución de (P) es prolongable a una solución maximal. Entonces, lo que realmente interesa es conocer el comportamiento en el límite de las soluciones maximales y establecer condiciones que garanticen su unicidad.

En lo que respecta a la unicidad, se demuestra que la solución maximal es única si exigimos que la función f sea continua y, además, lipschitziana en un entorno de cada punto $(t_1, x_1) \in D = I \times U$. No basta con que lo sea únicamente en un entorno de (t_0, x_0) .

Al estudiar el comportamiento en el límite de las soluciones maximales se analizan los casos $I \times U$ compacto e $I \times U$ abierto. En el primero de ellos toda solución maximal φ (por la derecha) está definida en un intervalo cerrado $[t_0, \tau]$ y además $(\tau, \varphi(\tau))$ está en la frontera de $I \times U$. Podemos expresar este resultado

como que toda solución maximal llega a la frontera en un tiempo finito. Por el contrario, cuando $I \times U$ es abierto, las soluciones maximales están definidas en un intervalo $[t_0, \tau)$; y todos los puntos de acumulación de $(t, \varphi(t))$ cuando $t \rightarrow \tau$ están en la frontera de $I \times U$. (En este caso, al hablar de convergencia se considera $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ con la topología de la compactificación por adición de un punto. En particular, el punto del infinito forma parte de la frontera de los conjuntos no acotados.)

4. DEPENDENCIA DE CONDICIONES INICIALES Y PARÁMETROS

Dada una ecuación diferencial cualquiera, es muy posible que no sepamos, e incluso que realmente no se pueda, resolverla por cuadraturas. Si modificamos ligeramente la ecuación diferencial y la transformamos en otra que sí somos capaces de resolver, nos interesa saber si las soluciones de esta nueva ecuación diferencial se pueden tomar como una buena aproximación de las soluciones de la ecuación original. Un ejemplo típico es el de la ecuación del péndulo en la que para ángulos pequeños se efectúa la aproximación $\sin \theta \approx \theta$. De esta forma es fácil obtener una solución y lo que nos preguntamos es la diferencia que existe entre el movimiento que describe esta función con el movimiento real del péndulo.

Otra dificultad que se puede añadir es que en un problema de Cauchy (P) no seamos capaces de determinar exactamente el valor de x_0 que queremos que tome la solución en el instante inicial t_0 (por inexactitudes de medida en un proceso físico, por ejemplo). De nuevo nos interesará conocer cómo se perturba la solución en función de la variación de las condiciones iniciales.

El primer paso para abordar estos problemas consiste en definir solución ε -aproximada de una ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ como una función φ definida en un intervalo I tal que

$$|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon \quad \forall t \in I.$$

Lógicamente, las soluciones verdaderas son las 0-aproximadas.

Concretamente, se llega a demostrar que si f es lipschitziana respecto a la segunda variable con constante de Lipschitz k y φ_i ($i = 1, 2$) son soluciones

ε -aproximadas tales que $\varphi_i(t_0) = x_i$, entonces

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq |x_1 - x_2| e^{k|t-t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$

A este resultado lo denominaremos *lema fundamental*. (Su demostración puede obtenerse como consecuencia del lema de Gronwall, un útil resultado relativo a desigualdades diferenciales.)

En particular, de aquí se sigue, por un procedimiento distinto al del tema anterior, la unicidad de soluciones de un problema de Cauchy (P) sin más que tomar $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ y $x_1 = x_2 = x_0$.

Más aún, tomando simplemente $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ y si consideramos dos problemas de Cauchy (P_1) y (P_2) con la misma f pero pasando por los puntos x_1 y x_2 , el lema fundamental nos proporciona una cota de la diferencia entre las dos soluciones respectivas φ_1 y φ_2 . Así llegamos a obtener que si $x_2 \rightarrow x_1$ entonces $\varphi_2(t) \rightarrow \varphi_1(t)$. Además, si el intervalo I en el que estamos definiendo las soluciones es acotado, entonces $e^{k|t-t_0|}$ es acotado y por tanto esta convergencia es uniforme.

De todas formas, aunque este resultado es teóricamente satisfactorio, hay que tener en cuenta que la expresión $e^{k|t-t_0|}$ puede hacerse muy grande aun sin alejarnos demasiado de $t = t_0$, luego en la práctica la cota puede no servirnos para nada a la hora de aplicarla a un problema concreto. Realmente, no resulta difícil encontrar ejemplos en los que la ecuación diferencial se puede resolver y, a la vista de las soluciones, constatar fácilmente que el error que se comete al cambiar x_1 por x_2 es enorme en comparación con $|x_1 - x_2|$.

Por otra parte, no son estas las únicas consecuencias que podemos extraer del lema fundamental sino que, tal como planteábamos al principio del tema, también nos proporciona información sobre la diferencia entre la solución real y una solución aproximada obtenida al modificar ligeramente la ecuación diferencial. En concreto, si sustituimos la f de un problema (P) por una nueva función que denominamos f^* tal que $|f(t, x) - f^*(t, x)| \leq \varepsilon$, la desigualdad triangular muestra que la solución φ^* del correspondiente problema (P^*) es una solución ε -aproximada del problema de partida (P). Aplicando ahora el lema fundamental con $x_1 = x_2 = x_0$ se obtiene una cota del error que se comete al aproximar $\varphi(t)$ por $\varphi^*(t)$.

Entroncando con estos temas, se puede ver cómo la poligonal de Euler que comentábamos en el segundo capítulo puede considerarse una solución ε -aproximada siempre que se permita la no derivabilidad en un número finito de puntos. Además, esto proporciona una cota del error entre la solución verdadera de un problema de Cauchy (P) y la aproximación que se obtiene mediante el método de Euler. Este error se expresa en función del *paso* con el que se construye la poligonal y de la distancia entre el punto t en el que queremos evaluar la solución y el de partida t_0 .

De todas formas, en este capítulo no nos contentaremos con lo que hemos visto hasta ahora sino que podemos plantearnos más cuestiones relacionadas con la variación de las condiciones iniciales. En concreto, si llamamos (P_u) al problema de Cauchy de condición inicial $x(t_0) = u$, y suponemos que f es continua y lipschitziana respecto a la segunda variable, para cada u existirá una única solución $\varphi_u(t)$ de (P_u). Entonces, si construimos la función de dos variables $\varphi(t, u) = \varphi_u(t)$ podemos preguntarnos sobre la continuidad y derivabilidad de tal función. La respuesta a este problema es que la continuidad de φ siempre es cierta, y que si f es de clase \mathcal{C}^1 entonces también lo es φ . Análogamente ocurre para \mathcal{C}^p en general.

Si en lugar de introducir una variación en las condiciones iniciales introducimos un parámetro λ en la función f , nos encontramos ante una situación similar. En este caso tenemos los problemas de Cauchy

$$(P_\lambda) \equiv \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), \lambda), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

a cuyas soluciones denominamos $\varphi_\lambda(t)$, y de nuevo podemos definir la función $\varphi(t, \lambda) = \varphi_\lambda(t)$. Los resultados que se obtienen sobre la continuidad y diferenciabilidad de esta función son análogos a los del caso anterior, así como los métodos que se emplean en su demostración. Además, es fácil ver como cualquiera de los dos casos puede estudiarse como consecuencia del otro.

Para concluir, y aunque no pretendemos abordar su solución en clase, cabe resaltar que también podemos plantearnos el problema conjunto ($P_{\lambda, u}$) en el que a la vez se introduce el parámetro λ y la variación de condiciones iniciales $x(t_0) = u$. Así mismo, si consideramos ecuaciones diferenciales complejas, otro campo de estudio es el de la analiticidad de las soluciones respecto a la variación de condiciones iniciales y parámetros.

5. SISTEMAS Y ECUACIONES LINEALES. CASO GENERAL

Utilizaremos a lo largo de todo el capítulo \mathbb{K} para denotar ya sea el cuerpo de los números reales \mathbb{R} o el de los números complejos \mathbb{C} . Así mismo, llamaremos $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ al espacio de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en \mathbb{K} . Sobre este espacio tenemos tres operaciones: la suma de matrices, el producto por escalares y el producto de matrices; y además podemos dotarlo de una norma mediante $\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|$, siendo $A = (a_{i,j})$. Así, $(\mathcal{M}(n, \mathbb{K}), \|\cdot\|)$ es un álgebra de Banach.

Cuando consideremos únicamente la suma de matrices y el producto por escalares, entonces $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ es isomorfo a \mathbb{K}^{n^2} con $\|\cdot\|_\infty$ y por lo tanto puede aplicarse cualquier propiedad de las que se verifican en \mathbb{R}^m para la convergencia de sucesiones, series, funciones con valores en ese espacio, derivación, etc. Además de estas propiedades heredadas, es obligatorio destacar aquí la desigualdad $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, en la que ya entra en juego la estructura de álgebra.

Estamos ahora en condiciones de definir la exponencial de una matriz mediante $\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. Lógicamente, la exponencial de la matriz nula es la matriz identidad. Además, siempre que se satisfaga la conmutatividad $A \cdot B = B \cdot A$, se tiene $e^{A \cdot B} = e^A \cdot e^B$. De aquí es inmediato deducir que la matriz e^A es siempre regular y que su inversa es e^{-A} . Por último, utilizando las propiedades del espacio $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ que mencionábamos anteriormente, no resulta difícil comprobar que la función matricial e^{tA} es derivable y que su derivada vale $A \cdot e^{tA}$.

Una vez establecidas las principales propiedades que se verifican en un espacio de matrices y definida la exponencial de una matriz, es fácil efectuar un estudio teórico sobre la resolución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.

Si denotamos $A(t)$ a una aplicación definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y que toma valores en $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, y $b(t)$ a un vector columna definido en el mismo intervalo y que toma valores en \mathbb{K}^n , estamos interesados en encontrar todas las soluciones del sistema lineal de n ecuaciones

$$[L] \equiv x'(t) = A(t) \cdot x(t) + b(t).$$

A su sistema lineal homogéneo asociado, en el que ya no aparece $b(t)$, lo denominaremos $[LH]$. Para abordar su solución supondremos siempre a partir de ahora que las funciones $A(t)$ y $b(t)$ son continuas.

En primer lugar, aplicando el teorema de Picard-Lindelöf que vimos en el capítulo 3, se demuestra que el problema de Cauchy formado por la ecuación $[L]$ junto con una condición inicial $x(t_0) = x_0$ tiene solución única en I . Pero no sólo estamos interesados en eso, sino que queremos conocer la estructura de las soluciones de $[L]$ sin exigir ninguna condición inicial.

Para ello, consideremos la ecuación lineal homogénea asociada $[LH]$. Sin más que utilizar la unicidad de solución del problema de Cauchy con valores iniciales adecuados, es fácil ver que que las soluciones de $[LH]$ forman un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ de dimensión n . A una base de este subespacio se le llama *sistema fundamental de soluciones*.

Tomemos ahora un sistema fundamental de soluciones y dispongámoslo en forma de matriz de tal modo que cada solución es un vector columna. A esta matriz se le llama *matriz fundamental*, y la denotamos mediante $F(t)$.

Si elegimos n soluciones de $[LH]$, surge el problema de saber si estas soluciones son o no base del espacio de soluciones. Hay una respuesta a este hecho en forma de condición necesaria y suficiente. Para ello pongamos las soluciones en forma de matriz tal como hemos hecho antes. Entonces son equivalentes tres hechos: i) que la matriz es fundamental, ii) que su determinante —denominado *wronskiano*— sea no nulo para algún $t \in I$, y iii) que lo sea $\forall t \in I$. La parte más importante de la demostración es deducir iii) a partir de ii); y aquí el paso principal es utilizar que el problema de Cauchy formado por $[LH]$ junto con la condición inicial $x(t_0) = 0$ tiene como solución única el vector constantemente nulo.

De aquí es inmediato obtener que una matriz $F(t)$ cualquiera es fundamental si y sólo si su determinante es distinto de cero y satisface $F'(t) = A(t) \cdot F(t)$. Una consecuencia de esto es que si en el sistema $[LH]$ la matriz $A(t)$ es constante (y por tanto la denominamos únicamente A) entonces un sistema fundamental de soluciones es precisamente e^{tA} , puesto que su derivada vale $A \cdot e^{tA}$. (Además, es un sencillo ejercicio comprobar que si calculamos las iteradas de Picard partiendo de la matriz identidad, estas coinciden con las

sumas parciales de e^{tA} .) Precisamente este hecho será el punto de partida en el que nos basaremos en el siguiente capítulo.

Para concluir con el estudio de las soluciones de $[LH]$, acabemos mencionando que existe una expresión que relaciona el determinante de una matriz fundamental en un punto cualquiera con el determinante en un punto concreto. Esta expresión, en la que aparece la traza de la matriz $A(t)$, se denomina *fórmula de Jacobi-Liouville*.

Una vez analizadas las soluciones de $[LH]$, volvamos con $[L]$. Para ello consideremos en primer lugar φ una solución particular de $[L]$ cualquiera. Es inmediato comprobar que el espacio de soluciones de $[L]$ se expresa como φ más el espacio de soluciones de $[LH]$. Es decir, las soluciones de $[L]$ son un subespacio afín de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ de dimensión n .

Pero surge el problema de cómo encontrar una solución particular. Para ello tenemos el *método de variación de las constantes* de Lagrange, que llega incluso a darnos una fórmula explícita (aunque, eso sí, de cálculo laborioso) que nos proporciona una solución particular.

Ya únicamente queda por añadir un estudio de las soluciones de una ecuación lineal de orden n . El método a seguir en este caso es el estándar que consiste en transformar la ecuación en un sistema y utilizar todo lo que hemos obtenido hasta ahora para sistemas lineales.

Además, para resolver ecuaciones lineales homogéneas de orden $n > 1$ puede resultar útil aplicar el *método de reducción de orden* de d'Alembert. Este método requiere que previamente hayamos encontrado una solución no nula de la ecuación por cualquier procedimiento. Entonces, con un sencillo cambio de función incógnita, la ecuación se transforma en otra también lineal homogénea pero de orden $n - 1$. Ahora, si ya sabemos encontrar la solución general de esta nueva ecuación, deshaciendo los pasos dados obtenemos la solución general de la de partida. Si sólo sabemos hallar una solución particular suya, podemos reiterar el proceso y reducir de nuevo el orden.

6. SISTEMAS Y ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

En este capítulo pretendemos encontrar las soluciones del sistema lineal

[L] (de orden n) pero cuando la matriz de coeficientes es $A(t) = A$ constante. Según hemos visto en el capítulo anterior, este problema se reduce a estudiar su correspondiente sistema lineal homogéneo y aplicar el método de variación de las constantes o ayudarnos de una solución particular del lineal. Por lo tanto, vamos a considerar directamente el caso del sistema lineal homogéneo [LH] $\equiv x'(t) = A \cdot x(t)$.

La matriz A tendrá valores propios $\lambda_i \in \mathbb{C}$ de multiplicidad k_i (lógicamente, $\sum_i k_i = n$), que son las raíces de la *ecuación característica* $\det(A - \lambda I) = 0$. Así mismo, denotemos

$$E_i = \{x \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda_i I)^{k_i} \cdot x = 0\}.$$

Una conocido resultado de Álgebra Lineal establece que E_i es subespacio vectorial de \mathbb{C}^n de dimensión k_i y que se verifica $\mathbb{C}^n = \bigoplus_i E_i$. Además, es claro que si $x \in E_i$ entonces también $A \cdot x \in E_i$.

Tal como hemos demostrado en el capítulo anterior, las soluciones de [LH] serán un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ de dimensión n , pero no disponíamos de un método que nos permitiera encontrarlas explícitamente. Sin embargo, para el caso de coeficientes constantes que estamos estudiando ahora sí que vamos a tener un procedimiento efectivo que nos permite hallar una base del espacio de soluciones (supuesto que hayamos podido determinar los valores propios λ_i).

Para ello, vamos a interesarnos de momento por las soluciones en $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E_i)$. Aplicando adecuadamente el teorema de Picard-Lindelöf encontramos que las soluciones en este espacio son precisamente un subespacio vectorial de dimensión k_i . Y si logramos encontrar una base de soluciones en cada $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E_i)$, todas ellas juntas formarán la base de soluciones en $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ buscada.

Por lo tanto, únicamente tendremos que preocuparnos de cómo encontrar las soluciones en $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E_i)$. Tomemos $\{u_i^j\}_{j=1}^{k_i}$ base del espacio vectorial E_i . Entonces, es inmediato comprobar que una base de soluciones en $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E_i)$ es $x_i^j(t) = e^{tA} \cdot u_i^j$, $j = 1, \dots, k_i$. A simple vista, esta expresión parece que no es de gran utilidad, ya que e^{tA} es una serie. Sin embargo, descomponiendo $e^{tA} = e^{t\lambda_i I} \cdot e^{t(A - \lambda_i I)}$, y aplicando que $u_i^j \in E_i$, es claro que

$$x_i^j(t) = e^{\lambda_i t} \sum_{m=0}^{k_i-1} \frac{t^m (A - \lambda_i I)^m}{m!}.$$

Así, hemos encontrado una base de soluciones por medio de una expresión que es una suma finita fácilmente evaluable.

Hasta ahora no hemos distinguido que la matriz de coeficientes A sea real o compleja. Lo único que hemos utilizado es que en cualquiera de los dos casos tiene n valores propios en \mathbb{C} (contando su multiplicidad). Pero aunque la matriz sea real estos valores propios pueden no serlo, y por lo tanto tampoco lo serán las soluciones $x_i^j(t)$ de la base. Sin embargo, cuando A es real las soluciones reales del sistema diferencial forman un subespacio vectorial de dimensión n de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, y esto es cierto sean cuales sean los valores propios. Interesa pues encontrar un método que nos permita hallar una base real de soluciones cuando A es real.

Pero en este caso, si λ_i es un valor propio no real, es claro que su conjugado $\bar{\lambda}_i$ también deberá ser valor propio (y de la misma multiplicidad). Además, si a λ_i le corresponde el subespacio E_i , a $\bar{\lambda}_i$ le corresponderá su conjugado \bar{E}_i . Y si $x(t)$ es una solución en $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E_i)$ de $[LH]$, entonces $\overline{x(t)}$ es solución en $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \bar{E}_i)$.

De aquí es inmediato deducir que $\operatorname{Re}(x_i^j(t))$, $\operatorname{Im}(x_i^j(t))$, $j = 1, \dots, k_i$, forman conjuntamente una base de soluciones en el espacio $\mathcal{C}(\mathbb{R}, E_i \oplus \bar{E}_i)$ y, obviamente, todas ellas son reales. De este modo no sólo encontramos las soluciones reales buscadas, sino que además no necesitamos ocuparnos de $\bar{\lambda}_i$ ni \bar{E}_i , sino que basta con que utilicemos λ_i y E_i .

Como consecuencia de lo visto hasta ahora para sistemas lineales homogéneos, es fácil obtener la solución general de la ecuación lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes. Supongamos que la ecuación que queremos resolver es

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0.$$

Entonces, tomemos la *ecuación característica*

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

con sus raíces λ_i de multiplicidad k_i . Estas raíces coinciden precisamente con los valores propios correspondientes al sistema lineal homogéneo que aparece al aplicar el método usual de transformación de una ecuación de orden n en

un sistema. Además, la solución de la ecuación es la primera componente de la solución del sistema. De este modo, la solución general se nos muestra ahora sin necesidad de efectuar cálculo alguno ya que resulta ser $x(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} q_i(t)$ con $q_i(t)$ polinomio arbitrario de grado menor que k_i .

Una ecuación lineal de orden n bastante utilizada pero que ya no tiene coeficientes constantes es la de Euler. En ella el coeficiente de cada $x^{(k)}(t)$ es una constante multiplicada por t^k . Su solución es fácil de obtener a partir de lo que hemos visto en este capítulo ya que se transforma en una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes sin más que efectuar el cambio de variable $t = e^u$.

Para finalizar el capítulo analicemos cómo resolver ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes pero no homogéneas. Tal como vimos en el capítulo anterior, su solución general es una solución particular de la lineal más la solución general de la homogénea asociada. En este capítulo hemos encontrado el método que nos permite resolver esta ecuación sin dificultades, luego lo único que tendremos que hacer es encontrar una solución particular de la lineal. Para esto disponemos en general del método de variación de las constantes, pero su aplicación resulta bastante laboriosa. Es por esto que muchas veces se intenta encontrar una solución particular por otro procedimiento, posiblemente a tanteo.

Dependiendo de cual sea el término independiente de la ecuación lineal no homogénea a resolver, puede demostrarse que siempre existe una solución particular de una forma concreta en la que aparecen algunos parámetros que hay que determinar (normalmente, coeficientes de polinomios). Para ello basta derivar las veces precisas la función candidata a ser solución y sustituir en la ecuación diferencial. A esta forma de encontrar una solución particular se la denomina *método de los coeficientes indeterminados*. Puede aplicarse en particular cuando el término independiente es un producto de exponenciales por senos (o cosenos) y por polinomios. Además, el *principio de superposición* nos permite abordar el problema cuando el término independiente es una suma de funciones con las características anteriores.

Entre los problemas físicos cuya solución puede abordarse mediante los métodos de este capítulo se encuentran los movimientos de muelles con y sin rozamiento (siempre que este sea proporcional a la velocidad), así como el

comportamiento de circuitos eléctricos.

Otro tema interesante relacionado con las ecuaciones diferenciales lineales es la teoría de Floquet sobre soluciones de sistemas diferenciales con coeficientes periódicos. En concreto, supongamos que tenemos el sistema lineal $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$ con $A(t)$ continua y satisfaciendo $A(t + T) = A(t) \forall t \in \mathbb{R}$ (el menor $T > 0$ para el que se puede conseguir lo anterior se denomina *periodo*). Denotamos asimismo $F(t)$ a una matriz fundamental de ese sistema. El resultado básico sobre sistemas periódicos es la representación de la matriz fundamental como el producto de una matriz periódica y una matriz fundamental de un sistema con coeficientes constantes. Así, los dos principales teoremas de Floquet son los siguientes:

1) Existe $\Omega(t)$ matriz compleja de periodo T y existe Q matriz compleja constante tal que $F(t) = \Omega(t) \cdot e^{tQ}$.

2) Si $A(t)$ y $F(t)$ reales, existe $\Omega(t)$ matriz real de periodo $2T$ y existe Q matriz real constante tal que $F(t) = \Omega(t) \cdot e^{tQ}$.

Como consecuencia de los teoremas anteriores, el cambio de función $x(t) = \Omega(t) \cdot y(t)$ transforma el sistema original en $y'(t) = Q \cdot y(t)$, que es de coeficientes constantes. Sin embargo, para la demostración de estos dos resultados es necesario haber desarrollado una teoría de funciones matriciales más amplia que la que aquí hemos visto y que ha sido suficiente para nuestros principales propósitos. En particular, el paso fundamental de las demostraciones consiste en utilizar que dada una matriz B con determinante no nulo existe otra matriz L tal que $B = e^L$.

7. SOLUCIONES ANALÍTICAS

Consideremos en este capítulo en primer lugar un sistema lineal $w'(z) = A(z) \cdot w(z) + b(z)$, donde $A(z)$ es una matriz $n \times n$ y $b(z)$ es un vector columna n -dimensional, ambos analíticos en un conjunto simplemente conexo $D \subset \mathbb{C}$. Dados $z_0 \in D$ y $w_0 \in \mathbb{C}$, se trata de demostrar que existe una única solución del sistema diferencial en D tal que $w(z_0) = w_0$.

Para ello, notar que si tomamos un punto $z \in \mathbb{C}$, f una función analítica en D y γ un camino en D que une z y z_0 , entonces la integral $\int_{\gamma} f(\tau) d\tau$

es independiente del camino γ elegido. Así, esta integral puede denotarse simplemente con $\int_{z_0}^z f(\tau) d\tau$. Entonces, definimos por recurrencia

$$\varphi_0(z) = w_0, \quad \varphi_{n+1}(z) = w_0 + \int_{z_0}^z [A(\tau) \cdot \varphi_n(\tau) + b(\tau)] d\tau.$$

Las funciones $\varphi_n(z)$ son analíticas y, además, es fácil demostrar que convergen uniformemente sobre compactos a una función φ que, por lo tanto, deberá ser también analítica. Se comprueba asimismo sin dificultad que esta función es la solución buscada y su unicidad.

La aplicación de este resultado sobre sistemas lineales complejos a sistemas reales es inmediata. Para ello, si tenemos $A(t)$ y $b(t)$ desarrollables en series de Taylor en un intervalo real $(t_0 - R, t_0 + R)$, lo único que debemos hacer es extenderlos a $A(z)$ y $b(z)$ definidos sobre la bola compleja de centro t_0 y radio R y aplicar el resultado anterior. Así obtenemos una única solución que es desarrollable en serie de Taylor en el mismo intervalo.

Finalmente, consideremos la ecuación diferencial lineal de orden n

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = b(t)$$

con $a_i(t)$ y $b(t)$ desarrollables en series de potencias. Entonces, utilizando el método estándar para transformar ecuaciones diferenciales de orden n en sistemas diferenciales se sigue que sus soluciones son desarrollables en serie de potencias en, al menos, el mismo intervalo que $b(t)$ y las $a_i(t)$.

Hay que hacer notar aquí que existen demostraciones de estos hechos que no necesitan el uso de la variable compleja. La forma de proceder en ellas es bastante similar a las que desarrollaremos en el siguiente capítulo. Es por eso que preferimos utilizar las demostraciones esbozadas anteriormente. Esto nos permite ver cómo se pueden utilizar dos técnicas distintas para probar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales expresables por medio de desarrollos en serie. En particular, de esta forma vemos cómo los resultados de variable compleja estudiados en el primer capítulo resultan útiles a la hora de abordar la teoría de Ecuaciones Diferenciales. Además, es de destacar que las demostraciones en las que se utiliza el Análisis Complejo son más generales y de menor complicación operacional.

En la práctica, el método a seguir para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales por medio de series de potencias consiste en tomar $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, derivar formalmente término a término las veces necesarias, sustituir en la ecuación diferencial e igualar coeficientes. Las derivaciones término a término están plenamente justificadas ya que hemos demostrado que existen soluciones expresables mediante series convergentes. Tales funciones son derivables y su derivada coincide, dentro del radio de convergencia, con la derivada término a término de la serie. Además, el radio de convergencia se mantiene al derivar, luego se puede iterar el proceso.

Existen numerosos tipos de ecuaciones cuya solución se aborda por los métodos de este capítulo. Por ser las más conocidas podemos citar como ejemplos las ecuaciones de Hermite

$$x'' - 2tx' + 2px = 0$$

y de Tchebichef

$$x'' - \frac{t}{1-t^2} x' + \frac{p}{1-t^2} x = 0.$$

En ambas p es un parámetro real e interesa conocer las soluciones como desarrollos en serie en torno a $t = 0$. De acuerdo a la analiticidad de los coeficientes de x y x' , podemos garantizar que las series que proporcionan las soluciones de la ecuación de Hermite serán convergentes en todo \mathbb{R} , pero las de la ecuación de Tchebichef sólo en $|t| < 1$. Por otra parte, en cualquiera de los dos casos interesa conocer cómo debe ser el parámetro p para que existan soluciones polinómicas. La respuesta a esta pregunta es que p debe ser un entero no negativo, que coincide precisamente con el grado del polinomio. Las soluciones que aparecen en estos casos son únicas salvo constantes multiplicativas y se denominan respectivamente *polinomios de Hermite* y *polinomios de Tchebichef*.

El desarrollo que se puede hacer a partir de estos temas es inmenso, por lo que aquí únicamente nos proponemos citar unas pocas propiedades y aplicaciones. Muchas de las propiedades que se pueden estudiar son similares para los dos ejemplos anteriores, como es el caso de la ortogonalidad, fórmulas de recurrencia y fórmulas de Rodrigues. Como consecuencia de la ortogonalidad pueden estudiarse las correspondientes series de Fourier y su convergencia.

En cuanto a los polinomios de Tchebichef, es fácil probar que, si tomamos $t \in [-1, 1]$, el polinomio de Tchebichef de grado n (y coeficiente director 2^{n-1}) es precisamente $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$. Una de las más llamativas características de estos polinomios es la *propiedad minímax*, que garantiza que, entre todos los polinomios mónicos $P(t)$ de grado n , el que minimiza $\max_{-1 \leq t \leq 1} |P(t)|$ es $2^{1-n}T_n(t)$.

Para concluir, simplemente señalar que los polinomios de Hermite están íntimamente relacionados con multitud de problemas de Mecánica Cuántica, como puede ser la resolución de la ecuación de onda de Schrödinger para el oscilador armónico simple. En este problema, el hecho de que las únicas soluciones de la ecuación de Schrödinger que permanecen acotadas cuando el tiempo tiende a infinito sean las funciones de Hermite (y por lo tanto el parámetro p tiene que ser un entero positivo) se traduce en la cuantificación de la energía.

8. INTEGRACIÓN POR DESARROLLOS EN SERIE DE LA ECUACIÓN $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$

En el capítulo anterior se estudia la ecuación $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$ cuando $P(t)$ y $Q(t)$ son analíticas, y se ve que entonces las soluciones de la ecuación son analíticas. Nos podemos preguntar qué es lo que ocurre si $P(t)$ y $Q(t)$ tienen polos o singularidades esenciales. Parecería razonable esperar, por ejemplo, que cuando $P(t)$ y $Q(t)$ tienen un polo en un punto, las soluciones de la ecuación diferencial también tengan un polo en ese punto.

Pero es fácil convencernos de que esto no es cierto en general ya que una solución de la ecuación $x'' + \frac{1}{t^2}x' - \frac{1}{t^3}x = 0$ es la función $-te^{1/t}$, cuyo desarrollo de Laurent en torno a $t = 0$ tiene infinitos términos negativos.

Para abordar estos problemas se consideran únicamente *puntos singulares regulares*, que son los puntos en los que, a lo sumo, $P(t)$ tiene un polo de orden uno y $Q(t)$ de orden dos. Hay multitud de ecuaciones que responden a este modelo. Entre ellas podemos citar las ecuaciones de Legendre, las de Jacobi, las hipergeométricas, las de Bessel, las de Laguerre y las de Euler. En las tres primeras el punto que se considera es $t = 1$ o $t = -1$, y en las demás $t = 0$. Salvo que indiquemos lo contrario supondremos a partir de ahora que estamos desarrollando en torno al punto $t = 0$.

Para resolver la ecuación diferencial se emplea el *método de Fröbenius* que consiste en ensayar soluciones del tipo $t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $a_0 \neq 0$; derivaremos formalmente la serie, sustituiremos en la ecuación e igualaremos coeficientes del mismo grado. Como la ecuación diferencial que estamos intentando resolver es de segundo orden, nuestro deseo será encontrar dos soluciones linealmente independientes de la forma anterior. Si denotamos

$$P(t) = t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n, \quad Q(t) = t^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n,$$

al igualar los coeficientes de menor grado aparece la condición $\lambda(\lambda-1) + p_0\lambda + q_0 = 0$, que se denomina *ecuación indicial* (o *determinativa*).

La importancia de esta ecuación radica en que determina los únicos valores que puede tomar λ para que la serie que estamos ensayando pueda ser realmente una solución de la ecuación diferencial. La ecuación indicial es una ecuación polinómica de segundo grado que tendrá dos raíces que denominamos λ_1 y λ_2 . Todo el desarrollo posterior va a depender de estas dos raíces, y el hecho fundamental va a recaer en que su diferencia $\lambda_1 - \lambda_2$ sea o no un entero.

Si denotamos $g(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0$, al ensayar en la ecuación diferencial la posible solución $t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ e igualar coeficientes, además de la ecuación indicial que con esta notación es $g(\lambda) = 0$, obtenemos

$$[FR] \equiv a_n g(\lambda + n) = - \sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}(\lambda + k) + q_{n-k}] a_k.$$

Es claro ahora que si $g(\lambda + n) \neq 0 \forall n > 0$ la relación anterior es una fórmula de recurrencia que nos permitirá determinar todos los coeficientes a_n a partir de $a_0 \neq 0$ cualquiera.

Sean pues λ_1 y λ_2 las dos raíces de la ecuación indicial y, tomando λ_1 y λ_2 como valores de λ , intentemos aplicar sucesivamente $[FR]$. Lo primero que observamos es que si las dos raíces son iguales sólo encontramos por este método un desarrollo en serie, luego la otra ecuación linealmente independiente con esta habrá que buscarla de otra forma. En otro caso, supongamos $\text{Re}(\lambda_1) \geq \text{Re}(\lambda_2)$.

Apliquemos en primer lugar $[FR]$ a λ_1 . Como la ecuación indicial $g(\lambda) = 0$ sólo tiene las raíces λ_1 y λ_2 es claro que $g(\lambda_1 + n) \neq 0 \forall n > 0$ ya que $\lambda_1 + n \neq \lambda_2$. Así, $[FR]$ nos permite encontrar todos los coeficientes a_n .

Veamos ahora lo que ocurre al aplicar $[FR]$ a λ_2 . Si $\lambda_1 - \lambda_2$ no es un entero, de nuevo $g(\lambda + n) \neq 0 \forall n > 0$ y el método funciona perfectamente también para λ_2 . El problema surge cuando $\lambda_2 + n = \lambda_1$, ya que entonces $g(\lambda_2 + n) = g(\lambda_1) = 0$ y no se puede despejar a_n en $[FR]$. Excepto si por casualidad la parte derecha de $[FR]$ también se anula para ese n y entonces se puede tomar a_n arbitrario. (Además, en este último caso, usando únicamente la serie correspondiente a λ_2 y eligiendo dos a_n distintos obtenemos dos soluciones linealmente independientes sin necesidad de utilizar λ_1 .)

Fijarse que, aunque $P(t)$ y $Q(t)$ sean reales, la ecuación indicial puede tener dos raíces que sean complejas conjugadas $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. En particular, en este caso la diferencia entre las dos raíces nunca será un entero luego el método de Frobënus puede aplicarse cualquiera de las dos. Pero así obtenemos una base compleja de soluciones y, al ser la ecuación diferencial real, es preferible encontrar una base también real. Para ello, es claro que los coeficientes que se obtienen al aplicar la $[FR]$ a una u otra raíz son conjugados, luego las dos series que obtenemos también lo serán. Entonces, al ser la ecuación diferencial lineal, de aquí se sigue que sus parte reales e imaginarias, que son de la forma

$$t^\alpha \cos(\beta \log t) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^1 t^n \quad \text{y} \quad t^\alpha \sin(\beta \log t) \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 t^n,$$

también constituyen una base de soluciones de la ecuación diferencial.

De todas formas, la parte básica de todo este proceso es la demostración, originalmente debida a Frobënus, de que el método que hemos seguido conduce realmente a series convergentes cuya derivación término a término tiene sentido. Más concretamente, lo que sucede es que si $tP(t)$ y $t^2Q(t)$ son analíticas en la bola de radio $R > 0$, entonces se demuestra que los coeficientes a_n que se obtienen a partir de $[FR]$ (siempre que sea posible) proporcionan una serie con, al menos, el mismo radio de convergencia. Esto prueba que todo el proceso formal tiene sentido luego las series son realmente soluciones. Notar que, en general, como λ_1 y λ_2 no tienen por qué ser enteros, solamente podremos hablar de solución en el intervalo $(0, R)$. (O en una bola salvo una semirrecta si estamos usando complejos y tomamos una determinación del logaritmo.)

Queda por analizar qué es lo que se puede hacer cuando el método de Frobënus sólo nos permite encontrar una solución. Aparte de procedimientos

particulares aplicables a determinadas ecuaciones diferenciales, hay dos métodos que se suelen emplear en general. Ambos llegan a mostrar que la segunda solución puede expresarse básicamente como una serie más un factor $\log x$ multiplicado por la primera solución.

El primero de ellos consiste en aplicar el método de reducción de las constantes que ya comentábamos en anteriores capítulos. Es decir, una vez hallada una solución $x_1(t)$ por el método de Frobënius se hace el cambio de función $x(t) = x_1(t)u(t)$ y la ecuación diferencial de partida se transforma en una ecuación diferencial lineal de orden uno que se resuelve por cuadraturas.

El segundo método se aplica de manera algo distinta según estemos en el caso $\lambda_1 = \lambda_2$ o $\lambda_1 - \lambda_2 = n > 0$. En esencia, ambos requieren en primer lugar deducir a partir de $[FR]$ los coeficientes a_n no únicamente para las raíces de la ecuación indicial sino para λ cualquiera, obteniéndose así funciones $a_n(\lambda)$. A partir de ellas se construye una función $x(\lambda, t)$ que es una serie con coeficientes dependientes de λ (que se obtienen a partir de los $a_n(\lambda)$) y la segunda solución buscada se obtiene por medio de una derivación parcial respecto a λ . El proceso a seguir es de fácil comprensión formal sin más que efectuar derivaciones formales respecto a λ y cambios de orden de derivadas parciales cruzadas, pero su justificación teórica es difícil. Además, tampoco resulta sencillo aplicarlo a ejemplos concretos de resolución de ecuaciones diferenciales.

El método de Frobënius resulta teóricamente satisfactorio sin ninguna hipótesis adicional sobre $P(t)$ y $Q(t)$, permitiendo siempre conocer tantos términos del desarrollo de las soluciones como queramos. Pero encontrar explícitamente el término general de las series sólo es posible cuando $P(t)$ y $Q(t)$ tienen expresiones sencillas gracias a las cuales la fórmula de recurrencia $[FR]$ se simplifica de tal modo que aparece a_n como función únicamente de a_{n-1} o, a lo sumo, de a_{n-1} y a_{n-2} . Esto ocurre en todos los ejemplos que comentamos a continuación.

Una de las ecuaciones que se resuelve mediante los métodos de este capítulo es la de Bessel

$$t^2 x'' + tx' + (x^2 - p^2)t = 0,$$

donde p es un parámetro real no negativo. Las raíces de su ecuación indicial son p y $-p$. Así, el método de Frobënius permite construir fácilmente la solución

para la mayor de las raíces que, con la elección de a_0 adecuada, denotaremos $J_p(t)$; y también para la menor cuando $2p \notin \mathbb{Z}$, solución que denotamos $J_{-p}(t)$. Si $2p \in \mathbb{Z}$, es decir cuando las dos raíces de la ecuación indicial se diferencian en un entero, el método de Frobënus para $-p$ no tiene por qué funcionar. De hecho funciona cuando p es semientero pero no cuando p es entero. De este modo, obtenemos las *funciones de Bessel*

$$J_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \alpha + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots\}.$$

Estas funciones nunca se pueden expresar como combinación de funciones elementales salvo en el caso en que α es semientero, ya que entonces resultan estar relacionadas con senos y cosenos. (Por ejemplo, $J_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{sen} t$ y $J_{-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{cos} t$.) Es por esto que las funciones de Bessel pueden considerarse una generalización de las funciones trigonométricas.

Hemos visto que el método de Frobënus permite hallar en muchos casos las dos soluciones de la ecuación de Bessel. Sin embargo, cuando $p \notin \mathbb{Z}$, en lugar de $J_{-p}(t)$ se usa mucho más la *función de Bessel de segunda clase*

$$Y_p(t) = \frac{J_p(t) \operatorname{cos}(p\pi) - J_{-p}(t)}{\operatorname{sen}(p\pi)}.$$

Además, por paso al límite, esto permite definir $Y_n(t) = \lim_{p \rightarrow n} Y_p(t)$, $n \in \mathbb{N}$, que se comprueba que sirve como segunda solución de la ecuación de Bessel para los casos en que el método de Frobënus sólo permitía encontrar una. (Por el contrario, si hubiéramos hecho $J_{-n}(t) = \lim_{p \rightarrow -n} J_p(t)$ lo que se obtiene es $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$.)

Las funciones de Bessel resultan de gran utilidad en multitud de campos tanto de Matemáticas como de Física, a veces en temas insospechados. Como curiosidad, podemos citar que la primera demostración de la irracionalidad de π (Lambert, 1761) se basaba en un desarrollo en fracción continua en el que intervenían las funciones de Bessel.

Aparecen también en diversos desarrollos ortogonales. A este respecto, la relación de ortogonalidad más conocida es

$$\int_0^1 J_\alpha(\lambda_n t) J_\alpha(\lambda_m t) t dt = \frac{1}{2} J_{\alpha+1}(\lambda_n)^2 \delta_{nm},$$

donde $\alpha > -1$ y $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ son los ceros positivos de $J_\alpha(t)$. (Que las funciones de Bessel tienen una infinidad numerable de ceros positivos es consecuencia de los teoremas de Sturm que aparecen en el capítulo 9.)

Análogamente a como en el capítulo anterior obteníamos los polinomios de Hermite a partir de una ecuación diferencial con coeficientes analíticos, resolviendo las ecuaciones

$$(1 - t^2)x'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)t]x' + n(n + \alpha + \beta + 1)x = 0, \quad \alpha, \beta > -1,$$

y

$$tx'' + (\alpha + 1 - x)x' + nx = 0, \quad \alpha > -1,$$

en torno a sus puntos singulares regulares $t = 1$ y $t = 0$ encontramos respectivamente los *polinomios de Jacobi* y los *polinomios de Laguerre*. Los resultados que se obtienen a este respecto son muy similares a los de Hermite (fórmula de Rodrigues, fórmula de recurrencia, ortogonalidad, etc.), así como los métodos que se emplean en las demostraciones.

Los polinomios de Jacobi tienen como caso particular a los de Tchebichef que ya habíamos comentado ($\alpha = \beta = -1/2$), así como a los *polinomios de Legendre* ($\alpha = \beta = 0$), en los que las expresiones resultan ser más sencillas. A su vez, la ecuación de Jacobi puede generalizarse por medio de la ecuación hipergeométrica.

En cuanto a los polinomios de Laguerre, simplemente destacar que se utilizan para resolver la ecuación de onda de Schrödinger para átomos con un sólo electrón, los únicos cuyas soluciones pueden obtenerse explícitamente. El proceso a seguir es en esencia similar al que relaciona los polinomios de Hermite con la ecuación de onda para el oscilador armónico simple, aunque bastante más complicado.

9. PROBLEMAS DE CONTORNO

Dada una función $f: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y la ecuación diferencial $x'' = f(t, x, x')$, en los capítulos anteriores nos dedicábamos a encontrar sus soluciones imponiendo una condición inicial $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$. Pero también nos podemos plantear un estudio de sus soluciones si, en lugar de

condiciones iniciales, exigimos que estas satisfagan condiciones en la frontera, es decir, del tipo $x(a) = x_0$, $x(b) = x_1$, siendo $[a, b]$ un intervalo en el que tiene que estar definida la solución.

Los problemas de contorno tienen gran interés tanto en Matemáticas como en Física, pero su estudio es mucho más complejo que el de los problemas de valores iniciales. Aquí abordaremos únicamente los casos más sencillos. En particular, nos restringiremos a ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Comenzamos nuestro análisis con un estudio de la conducta oscilatoria de las soluciones no triviales de este tipo de ecuaciones. En primer lugar, recordar que, dadas dos soluciones $u(t)$ y $v(t)$ de una ecuación $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$ con $P(t)$ y $Q(t)$ continuas, es equivalente que las soluciones sean linealmente independientes a que su wronskiano

$$W(u(t), v(t)) = \begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}$$

sea distinto de cero (tanto en todo el intervalo de definición como en un punto de este). Este hecho demuestra fácilmente que, si u y v son dos soluciones reales linealmente independientes, sus raíces son simples, distintas y se presentan de forma alternada —en el sentido de que $u(t)$ se anula exactamente una vez entre cualesquiera dos ceros consecutivos de $v(t)$ y viceversa. Este resultado se conoce con el nombre de teorema de *separación* de Sturm.

Antes de continuar, vamos a escribir la ecuación $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$, donde P y Q son funciones reales y continuas, de una forma adecuada para nuestros propósitos. Para ello, basta multiplicar sus dos miembros por $p(t) = \exp(\int P(t) dt)$ con lo cual transforma en

$$(p(t)x')' + q(t)x = 0,$$

donde $q(t) = Q(t)p(t)$. Los coeficientes $p(t)$ y $q(t)$ son funciones reales y continuas; además $p(t)$ es positiva y de clase \mathcal{C}^1 . Aunque no las citemos expresamente, a partir de ahora asumiremos siempre que p y q satisfacen estas hipótesis. Si denotamos mediante L al operador *autoadjunto* $L(x)(t) = (p(t)x')' + q(t)x$, las soluciones de la ecuación diferencial coinciden con el núcleo del operador L .

El siguiente resultado importante trata sobre las raíces de las soluciones u y v (reales y no nulas) de dos ecuaciones

$$\begin{aligned}(p(t)u')' + q(t)u &= 0, \\ (p(t)v')' + q_1(t)v &= 0,\end{aligned}$$

donde $q_1(t) \geq q(t)$ para todo t . En estas condiciones, el teorema de *comparación* de Sturm asegura que, si t_1 y t_2 son ceros consecutivos de u , entonces v se anula al menos una vez en (t_1, t_2) , salvo que en ese intervalo se tenga $q(t) = q_1(t)$ y $v(t) = ku(t)$, $k \in \mathbb{R}$.

Supongamos ahora que x es una solución real no trivial de $(p(t)x')' + q(t)x = 0$. Como consecuencia de los resultados anteriores es fácil obtener las siguientes propiedades sobre sus raíces:

- 1) En cada intervalo cerrado $[a, b]$, $x(t)$ tendrá a lo más un número finito de ceros.
- 2) Si $q(t) \leq 0$ en $[a, b]$, entonces $x(t)$ tiene como máximo un cero en ese intervalo.
- 3) Si $p(t) = 1$, $q(t) \geq 0$ en $[a, \infty)$ y $\int_a^\infty q(t) dt = \infty$, entonces $x(t)$ tiene infinitos ceros en $[a, \infty)$. (Y, por 1), su único punto de acumulación es ∞ .)

En realidad, la hipótesis anterior $p(t) = 1$ no es muy restrictiva pues, efectuando un cambio de función $x(t) = u(t)v(t)$ y eligiendo v de tal modo que se anule el coeficiente de u' , la ecuación lineal homogénea de segundo orden $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$ se transforma en una del tipo $u'' + q(t)u = 0$. Además, v resulta ser $v(t) = \exp(-\frac{1}{2} \int P(t) dt)$ que, al no anularse nunca, no tiene efecto sobre los ceros de las soluciones y, por ende, no altera los fenómenos de oscilación que se están estudiando.

La propiedad 3) se aplica directamente a la ecuación de Bessel que, con el cambio $x(t) = u(t)t^{-1/2}$, resulta ser

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 4p^2}{4t^2}\right)u = 0,$$

obteniéndose que cualquiera de sus soluciones tiene infinitas raíces positivas. Además, comparándola con la ecuación $v'' + v = 0$, cuyas soluciones son

$v(t) = \text{sen}(t - t_0)$, se obtiene información más precisa sobre su distribución. En concreto, si $0 \leq p < 1/2$, cada solución $u_p(t)$ de la ecuación de Bessel tiene al menos una raíz en cada intervalo de longitud π ; y si $p > 1/2$, cada intervalo de longitud π contiene a lo más un cero de $u_p(t)$.

Se denomina *ecuación de Sturm-Liouville* a una ecuación de la forma

$$[SL] \equiv (p(t)x')' + (\lambda w(t) + q(t))x = 0$$

definida en un intervalo I , y donde λ es un parámetro real y w una función continua y positiva (además de las acostumbradas hipótesis sobre p y q). Con notación de operadores, $[SL]$ se expresa $L(x) = -\lambda xw$.

Supongamos en primer lugar que el intervalo I es compacto. Si λ_1 y λ_2 son dos valores del parámetro λ para los cuales $[SL]$ admite en I soluciones no triviales x_1 y x_2 respectivamente, es fácil concluir la *fórmula de Green*

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b x_1(t)x_2(t)w(t) dt = [p(t)(x_2(t)x_1'(t) - x_1(t)x_2'(t))]_a^b,$$

donde a y b son los extremos de I .

Para lograr $\int_a^b x_1(t)x_2(t)w(t) dt = 0$ exigimos a las soluciones de $[SL]$ que satisfagan en a y b condiciones que hagan anularse el término de la derecha de la fórmula de Green. Así, podemos tomar las *condiciones de contorno*

$$\begin{cases} \alpha x(a) + \alpha' x'(a) = 0 \\ \beta x(b) + \beta' x'(b) = 0 \end{cases}$$

donde α y α' son constantes prefijadas (respectivamente β y β') que no se anulan simultáneamente. (No es este el único tipo de condiciones de contorno que se puede exigir. Por ejemplo, si $p(a) = p(b)$ se podía haber tomado las condiciones periódicas $x(a) = x(b)$, $x'(a) = x'(b)$, aunque en estas notas no comentaremos este caso.)

Un *problema de Sturm-Liouville regular* consiste en una ecuación $[SL]$ definida en un intervalo $I = [a, b]$ compacto junto con las condiciones de contorno anteriores. Los valores de λ para los cuales el problema admite solución no trivial se denominan *autovalores* (o *valores propios*) del problema; y las soluciones correspondientes a un autovalor λ se denominan *autofunciones* (o *funciones*

propias) asociadas a λ . Tal como hemos elegido las condiciones de contorno, si x_1 y x_2 son dos autofunciones asociadas a dos autovalores distintos λ_1 y λ_2 , es claro que x_1 y x_2 son ortogonales en I respecto al *peso* w .

Si el intervalo I no es acotado o, si siéndolo, alguna de las funciones p , q o w no es continua, o una de las funciones p y q se anula en alguno de los extremos del intervalo, el problema se denomina *singular*. No es difícil modificar ligeramente lo que hemos hecho hasta ahora para que también pueda aplicarse a problemas de Sturm-Liouville singulares. Sin embargo, en lo que concierne a la existencia de autovalores y autofunciones —que comentaremos a continuación— el caso singular es considerablemente más complicado. Su estudio requiere ciertos conocimientos previos sobre teoría de operadores. Aquí sólo nos preocuparemos del caso regular. (Aunque, en la práctica, los resultados que se obtienen para el problema singular son bastante similares.)

Sin embargo, no podemos dejar de citar que, desgraciadamente, muchos de las ecuaciones diferenciales más interesantes dan lugar a problemas singulares, como ocurre por ejemplo con la ecuación de Legendre $((1 - t^2)x')' + \lambda x = 0$, $t \in [-1, 1]$ o Hermite $(e^{-t^2}x')' + \lambda e^{-t^2}x = 0$, $x \in [0, \infty)$, así como con las análogas para Tchebichef, Jacobi, Laguerre o Bessel. Todas ellas las hemos estudiado en los capítulos 7 u 8 aunque desde un punto de vista distinto.

Volviendo al problema del Sturm-Liouville regular, las condiciones de contorno más simples consisten en exigir en la frontera $x(a) = x(b) = 0$. Este caso es particularmente sencillo de analizar a partir de los teoremas de Sturm y de la continuidad de las soluciones de $[SL]$ respecto al parámetro λ . Así, se obtiene que los autovalores del problema de Sturm-Liouville $[SL]$ con condiciones de contorno $x(a) = x(b) = 0$ forman una sucesión $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Salvo constantes multiplicativas, existe una única autofunción x_n asociada a λ_n , y x_n tiene exactamente n ceros en (a, b) , todos ellos simples.

El caso de las condiciones de contorno generales es algo más complicado, aunque el resultado que se obtiene es el mismo. El método más usual de abordar este problema pasa por un estudio previo de la analiticidad de las soluciones de una ecuación diferencial con respecto a los valores iniciales, cuestión esta que no hemos abordado en la presente memoria.

Hemos visto que las autofunciones $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ soluciones de un problema

de Sturm-Liouville constituyen un sistema ortogonal en $[a, b]$ respecto de w . (Para elegir un sistema de autofunciones concreto, podemos considerar que las x_n están normalizadas mediante $\int_a^b x_n^2 w dt = 1$.) Al igual que ocurría en los capítulos anteriores, las posibilidades de estudio que se abren a partir de aquí son inmensas. Entre ellas se puede citar por ejemplo el estudio de la completitud del sistema, propiedades de sus ceros, fórmulas de cuadratura, cotas y estimaciones asintóticas del tamaño de las funciones ortogonales o, en fin, dada una función $f(t)$, analizar la convergencia de su serie de Fourier

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(f)x_n(t), \quad c_n(f) = \int_a^b f(t)x_n(t)w(t) dt.$$

Uno de los ejemplos más conocidos de problema de Sturm-Liouville regular es

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \\ x(0) = 0, x(\pi) = 0, \end{cases}$$

cuyos autovalores son $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, y tienen como autofunciones asociadas $x_n(t) = \text{sen}(nt)$. Este mismo ejemplo constituye la base de la solución de uno de los problemas clásicos de la Física Matemática, el de la cuerda vibrante, abordado ya por Bernouilli en 1755. La de la cuerda vibrante es una ecuación en derivadas parciales en la que intervienen el tiempo y la posición de cada punto de la cuerda en el plano del movimiento, y tiene como condiciones iniciales la posición inicial de la cuerda. (Se considera que la cuerda está en un plano vertical, fija por sus dos extremos y que cada punto de la cuerda sólo se desplaza verticalmente.) Sin entrar en detalles, esta ecuación, utilizando el método de separación de variables, se transforma en una del tipo anterior. Calculando ahora los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la función que representa la posición original, la solución de la ecuación de la cuerda vibrante se obtiene como una serie infinita de productos de senos y cosenos multiplicados por estos coeficientes.

Para concluir el capítulo, y siguiendo con las hipótesis que estábamos empleando, haremos unos breves comentarios sobre la solución de

$$\begin{cases} L(x)(t) = (p(t)x')' + q(t)x = -f(t)w(t), \\ \alpha x(a) + \alpha' x'(a) = 0, \\ \beta x(b) + \beta' x'(b) = 0, \end{cases}$$

donde $f(t)$ es una función continua en $[a, b]$. Supondremos además que 0 no es un autovalor del problema de Sturm-Liouville correspondiente.

La idea consiste en construir una función $G(t, s)$ definida en el cuadrado $[a, b] \times [a, b]$ que nos permita encontrar explícitamente la solución $x(t)$ mediante la expresión integral

$$x(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)w(s) ds.$$

Para ello, y sin detenernos en detalles, consideremos los dos problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} L(x)(t) = 0, \\ x(a) = \alpha', \quad x'(a) = -\alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} L(x)(t) = 0, \\ x(b) = \beta', \quad x'(b) = -\beta, \end{cases}$$

y llamemos $x_1(t)$ y $x_2(t)$ a sus soluciones respectivas. Al no ser 0 un autovalor, es fácil concluir que x_1 y x_2 son linealmente independientes, luego su wronskiano no se anula. Así, tiene sentido definir la *función de Green*

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{x_2(s)x_1(t)}{p(t)W(x_1(s), x_2(s))}, & a \leq t < s \leq b; \\ \frac{x_2(t)x_1(s)}{p(t)W(x_1(s), x_2(s))}, & a \leq s < t \leq b \end{cases}$$

que, en efecto, proporciona la solución buscada.

10. ECUACIÓN DIFERENCIAL AUTÓNOMA

Ha habido dos tendencias principales en el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales. La primera y más antigua se caracteriza por la búsqueda de soluciones explícitas ya sea en forma cerrada —lo que raramente resulta posible—, o bien, en términos de series de potencias. En la segunda, se pierde toda esperanza de resolver ecuaciones en el sentido tradicional y, en lugar de ello, nos concentramos en la búsqueda de información cualitativa sobre el comportamiento general de las soluciones. Desde este punto de vista se estudiaron las ecuaciones lineales al principio del capítulo anterior (teoremas de comparación y separación). La teoría cualitativa de las ecuaciones no lineales es totalmente diferente. La inició Poincaré hacia 1880, en relación con sus trabajos sobre la Mecánica Celeste. (Uno de los problemas que recibió su atención, y

que actualmente continúa abierto, fue la estabilidad del sistema solar.) Desde entonces, ha sido objeto de un interés creciente, tanto en sus aspectos teóricos como aplicados.

En este capítulo y en el siguiente nos ocuparemos de estudiar diversos aspectos de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. En el primero de ellos se analizarán los sistemas autónomos, haciendo especial hincapié en los sistemas autónomos en el plano ya que su interpretación geométrica es mucho más sencilla. En el segundo se verán diversos conceptos y resultados sobre teoría de estabilidad para sistemas no necesariamente autónomos ni lineales.

De todas formas, no podemos dejar pasar por alto que algunos de los conceptos o demostraciones que aquí aparecen son demasiado complicados para los conocimientos de los alumnos de tercer curso de Matemáticas y únicamente pueden abordarse de forma muy general y sin excesiva profundidad y rigor. Esto puede sólo en parte paliarse con la intuición geométrica que se intentará aplicar en todo momento.

Sea D un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n . Un *sistema autónomo* es una ecuación diferencial de la forma $x' = f(x)$ donde $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase \mathcal{C}^1 (es decir, cuando la función f mediante la que definíamos la ecuación diferencial en el capítulo 3 está definida en $\mathbb{R} \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ pero sin depender explícitamente de la primera variable t). Las soluciones de esta ecuación diferencial serán funciones $\varphi: I \rightarrow D$ (I intervalo real) tales que $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ para todo $t \in I$.

Dado $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$, los resultados del capítulo 3 nos aseguran que existe una única solución φ tal que $\varphi(t_0) = x_0$. Esta solución puede prolongarse a otra maximal que, al ser D abierto, estará definida en un intervalo abierto. (Así pues, se puede considerar siempre que estamos tratando con soluciones maximales.) Por otra parte, supongamos que existe otra solución ϕ de $x' = f(x)$ pasando por x_0 , o sea, $\phi(t_1) = x_0$ para algún $t_1 \in \mathbb{R}$. Es fácil demostrar entonces que $\phi(t) = \varphi(t - t_1 + t_0)$, es decir, φ y ϕ se diferencian sólo en un desplazamiento de la variable independiente. Si denotamos $x(t; t_0, x_0)$ a la solución que en t_0 toma el valor x_0 , esto se expresa mediante $x(t; t_0, x_0) = x(t + \alpha; t_0 + \alpha, x_0)$, y se conoce con el nombre de *primer teorema de desplazamiento*. (El *segundo teorema de desplazamiento* es similar y establece que $x(t; t_0, x_0) = x(t; t_1, x(t_1; t_0, x_0))$.)

Aunque la gráfica de una solución se representaría en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, podemos simplemente considerar su proyección en el *espacio de fases* \mathbb{R}^n , lo que se denomina *órbita* o *trayectoria*. Así, todas las soluciones que pasan por un punto x_0 se identifican al tener la misma trayectoria (y recorrida en el mismo sentido). Recíprocamente, dado un punto cualquiera de D , existe una única trayectoria que pasa por él.

Un punto $x_0 \in D$ se llama *punto crítico*, *punto singular* o *punto de equilibrio* si $f(x_0) = 0$. En este caso, $\varphi(t) = x_0$, $-\infty < t < \infty$, es solución constante del sistema autónomo, y la trayectoria es el punto x_0 . Recíprocamente, cualquier solución constante da lugar a un punto singular.

Consideremos ahora φ una solución no constante y supongamos que $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ para dos valores t_1 y t_2 distintos. Entonces la solución está definida en todo \mathbb{R} y además es *periódica* en el sentido de que existe $T > 0$ tal que $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. (Al mínimo T que verifica lo anterior se le llama *periodo* y será $|t_2 - t_1|$ o un divisor suyo.)

Así pues hemos visto que hay tres tipos distintos de trayectorias: puntos críticos, órbitas periódicas y trayectorias abiertas que no se cruzan consigo mismo (homeomorfas a un intervalo abierto de \mathbb{R}).

En este tercer caso es interesante preguntarse qué es lo que le ocurre a la solución maximal $\varphi(t)$, definida en (τ_1, τ_2) cuando $t \rightarrow \tau_2$. (Lógicamente, el comportamiento para $t \rightarrow \tau_1$ sería análogo.) Un primer resultado a este respecto es que si existe $\lim_{t \rightarrow \tau_2} \varphi(t) = a \in D$ entonces forzosamente $\tau_2 = \infty$ y además a es un punto crítico.

Pero que exista el límite anterior es una condición muy fuerte que no responde a la mayoría de las situaciones. Así pues, nos podemos preguntar qué es lo que ocurre con los puntos de acumulación de $\varphi(t)$ cuando $t \rightarrow \tau_2$. De acuerdo al comportamiento de las soluciones maximales que estudiábamos en el capítulo 3, cuando $\tau_2 < \infty$ estos puntos de acumulación estarán en la frontera de D , y no nos preocuparemos de este caso.

Supongamos pues que la solución $\varphi(t)$ está definida en un intervalo (τ_1, ∞) . Un punto $a \in D$ se dice *ω -límite* si es punto de acumulación de $\varphi(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Y al conjunto de tales puntos se le llama *conjunto ω -límite* de φ .

(Análogamente, si $\varphi(t)$ está definida en $(-\infty, \tau_2)$, a los puntos de acumulación cuando $t \rightarrow -\infty$ se les denomina α -límites.)

No es difícil demostrar que el conjunto ω -límite de una trayectoria $\varphi(t)$ acotada es siempre cerrado, distinto de vacío y conexo. Además, si un punto a es ω -límite, la trayectoria $\varphi_1(t)$ que pasa por a está contenida toda ella a partir de entonces en el conjunto ω -límite de φ .

Sin embargo, el principal resultado referente a conjuntos ω -límites es el teorema de Poincaré-Bendixon, cuya demostración es bastante complicada. En dimensión dos, básicamente dice que una trayectoria contenida en un conjunto compacto K sin puntos críticos es, o bien una órbita cerrada, o bien su conjunto ω -límite es una órbita cerrada a la que se aproxima la trayectoria ya sea desde dentro o desde fuera. En particular, K deberá contener al menos una órbita cerrada.

Aunque existe teorema de Poincaré-Bendixon para dimensión superior, tal como está enunciado sólo es verdad en el plano. En la demostración para dimensión dos hay que utilizar el teorema de la curva de Jordan que asegura que una curva cerrada simple divide al plano en dos conjuntos conexos uno acotado y otro no. Este teorema, aunque geoméricamente obvio, no es fácil de probar rigurosamente. En dimensión mayor que dos el teorema de Poincaré-Bendixon es menos satisfactorio y su demostración requiere mayores conocimientos sobre sistemas dinámicos de lo que aquí hemos visto. Hay que destacar además que en estas dimensiones pueden aparecer los fenómenos caóticos que dan lugar a los atractores extraños que tan de moda están últimamente, pero que quedan fuera de los objetivos de este programa. Un ejemplo típico es el *atractor de Lorenz*, que se obtiene a partir de un sistema de apariencia tan sencilla como

$$\begin{cases} x' = -3(x - y), \\ y' = -xz + \frac{53}{2}x - y, \\ z' = xy - z. \end{cases}$$

En cuanto a la existencia o no de órbitas cerradas, además del resultado consecuencia del teorema de Poincaré-Bendixon que citábamos anteriormente, cabe destacar el teorema de Liénard que demuestra la existencia de órbitas cerradas para la ecuación $x''(t) + f(t)x'(t) + g(t) = 0$ bajo ciertas hipótesis para las funciones f y g . (Lógicamente, cuando hablamos de una órbita periódica para

este tipo de ecuación se trata de una órbita periódica para el sistema equivalente que aparece al tomar $x_1 = x$ y $x_2 = x'$.) Como caso más conocido, el teorema de Liénard se aplica a la ecuación de van der Pol $x''(t) + \mu(t^2 - 1)x'(t) + t = 0$.

Un tema de estudio interesante es el de la estabilidad de los puntos críticos. En pocas palabras, un punto crítico se denomina *estable* si todas las trayectorias que se acercan lo suficientemente al punto permanecen cerca de él. Además, se dice que nuestro punto crítico es *asintóticamente estable* si es estable y existe una bola centrada en él tal que cada trayectoria que esté dentro la bola en algún momento $t = t_0$ se aproxime al punto cuando $t \rightarrow \infty$. Finalmente, si el punto crítico no es estable, se dice que es *inestable*.

Existen diversos criterios, fundamentalmente debidos a Liapunov, que aseguran la estabilidad o inestabilidad de puntos críticos. Sin embargo no nos preocuparemos aquí de analizarlos ya que, aunque con un poco más de complicación, también pueden utilizarse para estudiar la estabilidad de soluciones cualesquiera de sistemas no necesariamente autónomos, tal como veremos en el capítulo siguiente.

Para concluir el capítulo se analizarán los sistemas lineales autónomos en el plano con coeficientes constantes

$$[LAP] \equiv \begin{cases} x' = a_1x + b_1y, \\ y' = a_2x + b_2y. \end{cases}$$

Este sistema siempre tiene como punto crítico el $(0, 0)$, y es el único si y sólo si el determinante de los coeficientes es distinto de cero.

Cuando el citado determinante es nulo decimos que nos encontramos ante un *caso degenerado*. Si todos los coeficientes son nulos estamos ante el caso trivial en el que todo el plano es de puntos críticos. Si el rango de la matriz de coeficientes es uno, aparece una recta de puntos críticos que pasa por el origen. En este caso, las trayectorias son, o bien rectas paralelas a la de puntos críticos, o bien semirrectas que se acercan a uno de los puntos críticos o se alejan de él.

El comportamiento de los casos no degenerados radica en los valores propios de la matriz de coeficientes, es decir en las raíces de la *ecuación auxiliar*

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$$

Aparecen las siguientes posibilidades:

1) Las raíces son reales, distintas y del mismo signo. Supongamos que ambas son negativas. Entonces, cuatro de las trayectorias son semirrectas opuestas dos a dos que se acercan al punto crítico; y el resto son curvas similares a semiparábolas que se acercan al punto crítico tangencialmente a dos de las semirrectas opuestas. Si las dos son positivas la situación es similar pero alejándose del origen. Un punto crítico de este tipo se denomina *nódulo*, estable o inestable según estemos en el primer caso o en el segundo.

2) Las raíces son reales y de distinto signo. En este caso cuatro de las trayectorias son semirrectas opuestas dos a dos, dos de ellas acercándose al punto crítico y las otras dos alejándose de él. Las demás trayectorias son similares a ramas de hipérbolas que tienen a las rectas como asíntotas. El punto crítico se llama *punto de silla* y es siempre inestable.

3) Las raíces son complejas conjugadas, pero no imaginarias puras. Las trayectorias tienen forma de espiral acercándose o alejándose del punto crítico según sea la parte real de las raíces negativa o positiva respectivamente. Nos encontramos ante un *foco*, ya sea estable o inestable.

4) Las raíces son reales e iguales. Supongamos que ambas son negativas. Si el sistema es *desacoplado* ($a_2 = 0, b_1 = 0$), las trayectorias son las semirrectas que se acercan al origen. En otro caso hay dos semirrectas opuestas que se acercan al origen y el resto de las trayectorias son curvas que entran al origen tangencialmente a las semirrectas. Análogamente ocurre cuando las raíces son negativas pero alejándose del origen. El punto crítico se llama *nódulo limítrofe*, estable o inestable.

5) Las raíces son imaginarias puras conjugadas. Las trayectorias son elipses alrededor del punto crítico, que en este caso se denomina *centro* y siempre es estable, aunque no asintóticamente estable. (En todos los demás casos, la estabilidad es también asintótica.)

Si denotamos $p = a_1 + b_2$ y $q = a_1b_2 - a_2b_1$, es equivalente que el sistema $[LAP]$ sea degenerado a que q sea nulo. Para los casos no degenerados, que son los que tienen interés, es fácil darse cuenta a la vista de los resultados anteriores que el punto crítico $(0, 0)$ es estable si y sólo si $p \geq 0$ y $q > 0$. Y es asintóticamente estable si y sólo si ambos son positivos (los centros están caracterizados por

$p = 0$ y $q > 0$). Así mismo, los nódulos limítrofes aparecen cuando se satisface la relación $p^2 - 4q = 0$, como caso separatorio entre espirales ($p^2 - 4q < 0$) y nódulos ($p^2 - 4q > 0$).

El análisis que se hace de las trayectorias de $[LAP]$ no puede realmente considerarse cualitativo, ya que simplemente consiste en resolver el sistema y representar en el plano las soluciones. Sin embargo, puede servir como base al estudio de la estabilidad del sistema

$$\begin{cases} x' = F_1(x, y) = a_1x + b_1y + f_1(x, y), \\ y' = F_2(x, y) = a_2x + b_2y + f_2(x, y), \end{cases}$$

que ya no puede en general resolverse explícitamente. En efecto, tal como veremos en el capítulo siguiente, la estabilidad de $(0, 0)$ en este sistema se reduce a la $(0, 0)$ en $[LAP]$ siempre que las funciones f_1 y f_2 cumplan las hipótesis adecuadas. (A este proceso se le denomina *linealización*.)

A este respecto, un bonito resultado geométrico, aunque no fácil de demostrar, es el teorema de Poincaré que puede aplicarse siempre que f_1 y f_2 se anulen en $(0, 0)$ y sean diferenciables en ese mismo punto con diferencial nula. Bajo estas hipótesis, el teorema de Poincaré asegura que si el punto crítico $(0, 0)$ del sistema linealizado $[LAP]$ es de alguno de los tres primeros tipos descritos, entonces también lo es para el sistema original.

11. TEORÍA DE ESTABILIDAD

En este capítulo se incluye lo que se consideran conceptos y resultados fundamentales en relación con la teoría de estabilidad para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. En términos generales, se puede decir que una solución es estable cuando a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales se obtienen pequeñas variaciones de las soluciones para todo valor de la variable t . Únicamente nos preocuparemos de estudiar la estabilidad por la derecha.

Consideraremos la ecuación diferencial $x'(t) = f(t, x(t))$ con $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y supondremos que f satisface las hipótesis necesarias para que, dado $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, siempre exista una única solución de la ecuación diferencial que en el punto t_0 toma el valor x_0 y además esa solución pueda prolongarse al intervalo $[t_0, \infty)$. Tal solución la denotaremos $x(t; t_0, x_0)$.

En estas circunstancias, diremos que una solución $\varphi: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *estable* si $\forall \varepsilon > 0$ y $\forall t_0 \geq a$ existe un $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que si $|x_0 - \varphi(t_0)| < \delta$ entonces $|x(t; t_0, x_0) - \varphi(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in [t_0, \infty)$. Una solución que no es estable se llama *inestable*.

Esta definición tiene la desventaja de que el valor δ de las desviaciones permitidas al dato inicial $\varphi(x_0)$ depende del momento inicial t_0 . Si δ es independiente de t_0 en la definición anterior, se dice que la solución $\varphi(t)$ es *uniformemente estable*.

Frecuentemente, en aplicaciones, no es suficiente el concepto de estabilidad. Se puede requerir que, a un pequeño cambio de las condiciones iniciales, la perturbación originada en la solución desaparezca con el tiempo. Esto nos conduce al concepto de estabilidad asintótica. La solución $\varphi(t)$ se dice que es *asintóticamente estable* si es estable y existe un $\gamma = \gamma(t_0)$ tal que si $|x_0 - \varphi(t_0)| < \gamma$ entonces $|x(t; t_0, x_0) - \varphi(t)| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Finalmente, decimos que la solución $\varphi(t)$ es *uniformemente asintóticamente estable* si es uniformemente estable y si existe $\eta > 0$ con la siguiente propiedad: Dado $\varepsilon > 0$ existe $T = T(\varepsilon)$ tal que, cualquier solución $x(t; t_0, x_0)$ con $|x_0 - \varphi(t_0)| < \eta$, satisface $|x(t; t_0, x_0) - \varphi(t)| < \varepsilon \forall t \geq T + t_0$.

Los dos primeros tipos de estabilidad que hemos definido son también conocidos con el añadido *en el sentido de Liapunov*. Nótese que la estabilidad asintótica uniforme implica tanto la estabilidad asintótica como la estabilidad uniforme; y, a su vez, cualquiera de las dos implica la estabilidad. Ninguna de las otras implicaciones posibles es, en general, cierta. Así mismo es falso que la conjunción de la estabilidad asintótica con la estabilidad uniforme lleve consigo la asintótica uniforme.

Por otra parte, es inmediato comprobar que cuando la ecuación diferencial es autónoma entonces los conceptos de estabilidad y estabilidad asintótica coinciden respectivamente con los de estabilidad uniforme y estabilidad uniforme asintótica.

Como primer objetivo nos dedicaremos a estudiar las propiedades de estabilidad para ecuaciones lineales $x'(t) = A(t) \cdot x(t) + b(t)$, donde $A(t)$ y $b(t)$ son continuas en $[0, \infty)$. Es fácil demostrar que la estabilidad (en cualquiera de sus tipos) de cualquier solución de esa ecuación es equivalente a la de la

solución nula del sistema homogéneo $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$. Podemos pues hablar de la estabilidad del sistema en lugar de la estabilidad de una solución concreta. Lógicamente, los resultados que obtengamos para estabilidad de sistemas serán directamente aplicables a la estabilidad de ecuaciones de orden n por medio la transformación estándar.

Las propiedades de estabilidad de estos sistemas pueden caracterizarse a partir de la matriz fundamental $F(t)$ tal como exponemos a continuación:

1) La estabilidad simple es equivalente a que la norma de la matriz fundamental esté acotada, es decir $\|F(t)\| \leq M, t \in [0, \infty)$.

2) La estabilidad uniforme viene caracterizada por la existencia de una constante M tal que $\|F(t) \cdot F(s)^{-1}\| \leq M$ para $t \geq s \geq 0$.

3) La estabilidad asintótica equivale a $\lim_{t \rightarrow \infty} \|F(t)\| = 0$.

4) La estabilidad asintótica uniforme es equivalente a la existencia de dos constantes positivas M y α tales que $\|F(t) \cdot F(s)^{-1}\| \leq Me^{-\alpha(t-s)}$ para $t \geq s \geq 0$.

Para el caso escalar $n = 1$ los resultados anteriores tienen una concreción muy simple, que permite además encontrar fácilmente ejemplos de las diversas formas de estabilidad. En efecto, si tenemos la ecuación diferencial $x'(t) = h(t)x(t)$ con $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y denotamos $H(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$ se tienen las siguientes equivalencias para sus soluciones:

1) Son estables si y sólo si $H(t)$ acotada superiormente.

2) Son uniformemente estables si y sólo si $H(t) - H(s)$ está acotada superiormente para $t \geq s \geq 0$.

3) Son asintóticamente estables si y sólo si $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = 0$.

4) Son uniformemente asintóticamente estables si y sólo si existe α constante positiva tal que $H(t) - H(s) \leq -\alpha(t - s)$ para $t \geq s \geq 0$.

Volviendo al caso vectorial, cuando la matriz de coeficientes es constante, $A(t) = A$, el sistema lineal homogéneo es autónomo y por lo tanto sólo nos tendremos que preocupar de estudiar la estabilidad simple y la asintótica, ya que sus correspondientes uniformes son equivalentes a ellas. Además, tal como hemos visto en el capítulo 6, disponemos de expresiones concretas que nos permiten

encontrar todas las soluciones de tales sistemas. Así, se obtienen los resultados elementales siguientes:

1) Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa, la ecuación es asintóticamente estable.

2) Si todos los valores propios de A tienen parte real no positiva y aquellos con parte real cero son de multiplicidad uno, entonces la ecuación es estable.

3) En los demás casos, la ecuación es inestable.

De este modo, para conocer las propiedades de estabilidad de un sistema lineal con coeficientes constantes no es ni siquiera necesario encontrar las raíces de su ecuación característica, sino que basta saber si hay alguna con parte real positiva. A este respecto resulta útil aplicar el criterio de Mikhaïlov, también conocido como *criterio geométrico de estabilidad*, y que básicamente establece lo siguiente:

Todas las raíces de un polinomio $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ con coeficientes reales tienen parte real estrictamente negativa si y sólo si la función compleja $z = P(iw)$ de variable real $w \in [0, \infty)$ describe una curva (el *hodógrafo de Mikhaïlov*) en el plano complejo que, comenzando en el semieje real positivo, no pasa por el origen y rota en sentido positivo a través de n cuadrantes.

Su demostración, incluso con alguna mejora para distinguir el caso de las raíces con parte real nula, puede establecerse como consecuencia del principio de variación del argumento que vimos en el capítulo 1. Por otra parte, cabe destacar que este criterio es equivalente al de Routh-Hurwitz, que obtiene información de las raíces del polinomio en función de los menores principales de cierta matriz construida a partir de sus coeficientes.

Una vez que hemos establecido una serie de resultados que nos caracterizan completamente la estabilidad de sistemas lineales con coeficientes constantes, podemos preguntarnos si el comportamiento se conserva cuando la matriz del sistema se somete a pequeñas perturbaciones. En concreto, si $A(t)$ se aproxima asintóticamente a una matriz constante A , es decir, $A(t) \rightarrow A$ cuando $t \rightarrow \infty$, es lógico pensar que, bajo ciertas hipótesis, las soluciones de $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$ se comporten como las soluciones de $x'(t) = A \cdot x(t)$. En este sentido tenemos el siguiente teorema:

Sea la matriz $A(t) = A + C(t)$ donde $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$. Si $x(t) = A \cdot x(t)$ es asintóticamente estable, entonces lo mismo es verdad para la ecuación $x'(t) = (A + C(t)) \cdot x(t)$.

Este resultado no es válido si sustituimos la estabilidad asintótica por la simple estabilidad. Sin embargo, si $\int_0^\infty \|C(t)\| dt < \infty$ y $x'(t) = A \cdot x(t)$ es estable, entonces la ecuación $x'(t) = (A + C(t)) \cdot x(t)$ también es estable. Este hecho se conoce con el nombre de teorema de Dini-Hukudara.

Los dos resultados anteriores se pueden considerar como casos particulares de los teoremas de estabilidad respecto de la primera aproximación, o primer método de Liapunov, que abordamos a continuación. En esencia, este método consiste en estudiar las propiedades de una solución $\varphi(t)$ de la ecuación no lineal $x'(t) = f(t, x(t))$ a partir de la primera aproximación lineal.

Antes que nada, para simplificar la ecuación efectuamos el cambio de función incógnita $y(t) = x(t) - \varphi(t)$, con lo que la estabilidad de $\varphi(t)$ se reduce a la de $y(t) = 0$ en la nueva ecuación

$$y'(t) = f(t, y(t) + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)) = f_1(t, y(t)),$$

donde la función f_1 verifica $f_1(t, 0) = 0 \forall t$. (Esto nos muestra además que, el estudio de la estabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales, se puede reducir sin pérdida de generalidad al estudio de la estabilidad de la solución nula de una nueva ecuación. En particular, para sistemas autónomos, a la estabilidad del origen como punto crítico.) Además, si f tiene derivadas parciales continuas respecto a las componentes de x , podremos poner

$$y'(t) = f_x(t, \varphi(t)) \cdot y(t) + g(t, y(t))$$

donde f_x representa la matriz jacobiana de f respecto de x y, para t fijo, se tiene $g(t, u) = o(|u|)$ para $|u| \rightarrow 0$. Así resulta natural conjeturar que el término $g(t, y(t))$ influya poco en el comportamiento asintótico de la ecuación. Es decir, se puede esperar que las propiedades de estabilidad de la solución $y(t) = 0$ en esa ecuación se reduzcan a sus propiedades como solución de la ecuación

$$y'(t) = f_x(t, \varphi(t)) \cdot y(t),$$

que es lineal homogénea. Esta ecuación se denomina *ecuación variacional* de $x'(t) = f(t, x(t))$ respecto de la solución $\varphi(t)$.

Estas consideraciones son ciertas con algunas hipótesis adicionales y dependiendo del tipo de estabilidad usado, pero no lo son en general. Los métodos que se emplean para este estudio tienen soportes matemáticos diversos y, a veces, sofisticados. Nosotros nos limitaremos aquí a exponer algunos resultados cuya demostración se obtiene como consecuencia de lema de Gronwall.

En concreto, supongamos que tenemos la ecuación diferencial no lineal

$$[NL] \equiv x'(t) = A(t) \cdot x(t) + g(t, x(t)),$$

siendo $A(t)$ matriz $n \times n$ continua en $[0, \infty)$ y $g(t, x)$ función vectorial continua y localmente lipschitziana respecto a la segunda variable en $\Delta_r = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid t \geq 0, |x| < r\}$ y tal que $g(t, 0) = 0, t \geq 0$.

Con esta notación, si se verifica $|g(t, x)| \leq \gamma(t)|x|$ para alguna función $\gamma(t)$ continua tal que $\int_0^\infty \gamma(t)dt < \infty$, se cumplen las siguientes implicaciones con respecto a la solución trivial:

1) Si es uniformemente estable en $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$, también lo es en $[NL]$.

2) Si es uniformemente estable y asintóticamente estable en $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$, entonces es asintóticamente estable en $[NL]$.

En los dos resultados anteriores la hipótesis de la integrabilidad de γ no se puede debilitar a $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0$. Sin embargo, supongamos que $x(t) = 0$ es solución uniformemente asintóticamente estable de $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$, con lo cual $\|F(t) \cdot F(s)^{-1}\| \leq Me^{-\alpha(t-s)}, t \geq s \geq 0$. En este caso, si g satisface $|g(t, x)| \leq K|x|$ con $K < \alpha/M$, entonces $x(t) = 0$ también es solución uniformemente asintóticamente estable de $[NL]$.

Los criterios de estabilidad para ecuaciones no lineales que hemos establecido hasta ahora requieren, por una parte, de una morfología particular de la ecuación diferencial y, además, de un cierto conocimiento de la matriz fundamental de la ecuación variacional asociada que permita establecer previamente la estabilidad de esta nueva ecuación.

El otro tipo de argumentos que se emplean para estudiar la estabilidad de ecuaciones no lineales es lo que constituye el segundo método de Liapunov, llamado también *método directo* pues se aplica directamente a la ecuación no lineal sin pasar por la ecuación variacional. Este método, basado en su origen en el principio mecánico de que las posiciones de equilibrio estable de un sistema deben corresponder a estados de energía mínima, no sólo da criterios de estabilidad e inestabilidad de soluciones, sino que además puede llegar a proporcionar una forma de estimar la región de estabilidad asintótica. Esto es algo que no cabe esperar de la primera aproximación pues, aunque las propiedades de estabilidad de la ecuación lineal son globales, la adición de un término no lineal puede cambiar la región de estabilidad asintótica.

Sin embargo, tal generalidad tiene sus inconvenientes, el principal de los cuales es que exige la construcción de determinadas funciones auxiliares asociadas a la ecuación diferencial, para lo cual no hay un procedimiento general.

Con la misma notación que antes para Δ_r , consideremos ahora la ecuación diferencial

$$[ED] \equiv x'(t) = f(t, x(t))$$

con $f: \Delta_r \rightarrow \mathbb{R}^n$ función continua y localmente lipschitziana respecto a la segunda variable, y verificando $f(t, 0) = 0 \forall t \geq 0$. Pretendemos aquí abordar el estudio de la estabilidad de su solución nula $x(t) = 0$ mediante el método directo de Liapunov. Pero antes debemos introducir algunos conceptos previos.

Una función $\lambda: [0, r) \rightarrow [0, \infty)$ se dice que está en la clase \mathcal{K} si es continua, estrictamente creciente y se anula en el origen. Claramente, \mathcal{K} tiene estructura de grupo con la composición de aplicaciones.

Sea ahora $V(t, x)$ una función real definida en Δ_r y continua. Decimos que V es: i) *definida positiva* si $V(t, 0) = 0 \forall t \geq 0$ y existe $\lambda \in \mathcal{K}$ tal que $\lambda(|x|) \leq V(t, x)$; ii) *definida negativa* si $-V$ definida positiva; iii) *decreciente* si existe $\mu \in \mathcal{K}$ tal que $V(t, x) \leq \mu(|x|)$.

Por último, se denomina *función de Liapunov* de $[ED]$ a una función $V(t, x)$ definida positiva en Δ_r y tal que $V(t, x(t))$ es no creciente en t para toda $x(t)$ solución de $[ED]$. Cuando $V \in \mathcal{C}^1(\Delta_r, \mathbb{R})$, esto se traduce en que la derivada de $V(t, x(t))$ será $\dot{V}(t) = V_t(t, x(t)) + V_x(t, x(t)) \cdot f(t, x(t)) \leq 0$.

Con estas notaciones, y aunque el método directo de Liapunov admite un desarrollo mucho más amplio, nos limitaremos aquí únicamente a citar sus principales resultados en cuanto a condiciones suficientes de estabilidad se refiere:

1) Si existe función de Liapunov de $[ED]$, entonces la solución $x(t) = 0$ es estable.

2) Si existe función de Liapunov decreciente de $[ED]$, entonces la solución $x(t) = 0$ es uniformemente estable.

3) Si existe $V(t, x)$ función de Liapunov decreciente de $[ED]$, $V \in \mathcal{C}^1(\Delta_r, \mathbb{R})$, y además $\dot{V}(t) < 0$ para $t \in (0, r)$ a lo largo de cada solución $x(t)$, entonces la solución $x(t) = 0$ es uniformemente asintóticamente estable.

Para concluir, no podemos dejar de comentar lo que se conoce como *problema inverso* en la teoría del segundo método de Liapunov. Ya hemos señalado anteriormente que la principal dificultad de este método consiste en encontrar la función de Liapunov con las propiedades adecuadas. Lógicamente, surge la pregunta de si tales funciones existen realmente cuando la solución $x(t) = 0$ satisface el tipo de estabilidad requerido. En otras palabras, si los resultados anteriores sobre la existencia de V son sólo condiciones suficientes o también son necesarias. Aunque con unas hipótesis algo más débiles, la respuesta a esta cuestión es en esencia afirmativa. Sin embargo, este resultado es teórico y no proporciona un método de encontrar tales funciones, sino que debe hacerse en cada caso, y esto puede no resultar en absoluto sencillo.

12. TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace tiene gran interés de por sí y por sus estrechas relaciones con diversos campos de la Matemática; pero además, y en lo que a nosotros concierne, su uso proporciona un método eficiente para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales e integrales. El estudio riguroso de sus propiedades, en particular de la fórmula de inversión, requiere un conocimiento suficiente de Análisis Complejo que permita abordar las demostraciones. Como el primer capítulo de esta memoria lo hemos dedicado precisamente a este tema, y aunque en estas breves notas no nos preocuparemos de exponer los hechos muy detalladamente, estamos ahora en condiciones de efectuar un estudio razonablemente completo para nuestros propósitos.

Dada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función arbitraria tal que $f(t) = 0$ en $-\infty < t < 0$, la transformada de Laplace de $f(t)$ es

$$F(p) = \mathcal{L}[f](p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p \in \mathbb{C},$$

supuesto que la integral existe.

Restringiremos nuestra atención a funciones absolutamente integrables en cada intervalo acotado $0 \leq t \leq a$ y para las cuales $F(\alpha)$ es convergente para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. (Esto último es cierto si, por ejemplo, existen $\alpha_0 < \alpha$, $t_0 \geq 0$ y $M > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{\alpha_0 t} \forall t \geq t_0$.) En estas condiciones, es claro que $F(p)$ existe para $\operatorname{Re}(p) > \alpha$, pero no sólo eso, sino que las funciones $F_T(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t) dt$ son analíticas en $\operatorname{Re}(p) > \alpha$ y convergen uniformemente sobre compactos a $F(p)$ cuando $T \rightarrow \infty$. Por tanto, la transformada de Laplace $F(p)$ es holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re}(p) > \alpha$.

El operador \mathcal{L} es, obviamente, lineal. Pero además tiene muchas otras propiedades importantes, como comentamos a continuación. Sin precisar las hipótesis, su comportamiento respecto a la derivación es

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = pF(p) - f(0^+), \quad \mathcal{L}[tf(t)](p) = -F'(p),$$

donde $f(0^+)$ denota el límite de $f(t)$ cuando t tiende a 0 por la derecha. Lógicamente, ambas fórmulas pueden generalizarse por inducción para $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]$ y $\mathcal{L}[t^n f(t)]$, $n \geq 1$.

En lo que se refiere a la integración, los resultados que se tienen son del tipo

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](p) = \frac{F(p)}{p}, \quad \mathcal{L}[t^{-1}f(t)](p) = \int_p^{\infty} F(\tau) d\tau.$$

Por último, el comportamiento respecto a traslaciones a derecha e izquierda de la variable es

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)](p) = e^{-pt_0} F(p), \quad \mathcal{L}[f(t + t_0)](p) = e^{pt_0} F(p) - \int_0^{t_0} e^{p(t_0 - \tau)} f(\tau) d\tau,$$

donde t_0 es una constante positiva.

Con estas propiedades, y el cálculo directo de transformadas de Laplace de algunas funciones a partir de la definición, es fácil encontrar una nutrida tabla

de transformadas de funciones. Antes de continuar, veamos un ejemplo sencillo de cómo aplicar esto a la resolución de ecuaciones diferenciales. Supongamos que, para $t \geq 0$, tenemos la ecuación lineal $x'(t) + ax(t) = b(t)$ con condición inicial $x(0) = x_0$ (y donde a es una constante). Si denotamos $X = \mathcal{L}[x]$ y $B = \mathcal{L}[b]$, aplicando las propiedades anteriores es claro que $X(p) = (x_0 + B(p))/(p + a)$. Es posible que sepamos reconocer $X(p)$ como la transformada de Laplace de alguna función. Pero para poder asegurar que esta función es realmente la solución de la ecuación que estamos buscando necesitamos que la antitransformada de $X(p)$ sea única.

Este hecho es en esencia cierto, y constituye el aspecto más delicado de la teoría que estamos tratando. Aquí se utilizan técnicas tanto de Análisis Real (en particular, el lema de Riemann-Lebesgue y el lema de Dirichlet), como de integración a lo largo de recintos en el plano complejo. Se dice que una función satisface la *condición de Dirichlet* si, en cada intervalo acotado, tiene a lo más un número finito de máximos, mínimos y puntos de discontinuidad, y las discontinuidades son de salto finito. Así, sea una función $f(t)$ que cumple la condición de Dirichlet y $F(p)$ su transformada de Laplace, convergente en el semiplano $\text{Re}(p) > \alpha$. En estas condiciones se tiene la *fórmula de inversión* que garantiza que, para $\gamma > \alpha$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} F(p) dp = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0; \\ \frac{1}{2}f(0^+), & \text{si } t = 0; \\ \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)), & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Ya hemos comentado cómo usar la transformada de Laplace para resolver una ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes. Análogamente, si tenemos un problema de valores iniciales cuya ecuación diferencial es lineal de orden n con coeficientes constantes y término independiente arbitrario, basta aplicar \mathcal{L} en ambos lados de la ecuación, obteniéndose así fácilmente la solución del problema como la antitransformada de cierta función. Así mismo, la transformada de Laplace también resulta útil si los coeficientes de la ecuación lineal son polinomios de primer grado, ya que su uso convierte la ecuación diferencial de partida en una lineal de primer orden cuya función incógnita es la transformada de Laplace de la solución buscada. Por tanto, resolviendo esta nueva ecuación y tomando antitransformadas, se obtiene la solución de la ecuación original.

Dadas dos funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que se anulan para $t < 0$, se llama *convolución* de f y g a la nueva función

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau,$$

supuesto que la integral sea convergente. Con las hipótesis adecuadas, una sencilla aplicación del teorema de Fubini muestra que

$$\mathcal{L}[f * g](p) = \mathcal{L}[f](p)\mathcal{L}[g](p),$$

es decir, la transformada de una convolución es simplemente el producto de las transformadas individuales, un resultado de considerable importancia.

Una interesante aplicación de esta propiedad aparece como sigue: Si $f(t)$ y $k(t)$ son funciones dadas, entonces la ecuación

$$f(t) = x(t) + \int_0^t k(t - \tau)x(\tau) d\tau,$$

en la que la función incógnita $x(t)$ aparece bajo el signo de integración, se denomina *ecuación integral* (de tipo Volterra). Debido a su forma especial, en la que la integral es la convolución de las dos funciones $k(t)$ y $x(t)$, esta ecuación se puede resolver por medio de las transformadas de Laplace. Para ello, basta aplicar \mathcal{L} a ambos lados de la ecuación, de donde se sigue

$$\mathcal{L}[x](p) = \frac{\mathcal{L}[f](p)}{1 + \mathcal{L}[k](p)},$$

y si esta función es una transformada reconocible se tendrá inmediatamente la solución $x(t)$.

13. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE VARIACIONES

Durante más de dos siglos, el Cálculo de Variaciones ha sido una de las principales ramas del Análisis. Es un instrumento de gran utilidad que se puede aplicar a muy diversos problemas tanto de Matemáticas como de Física.

Es fácil captar el interés del tema si se toman en cuenta algunos de sus problemas típicos. Supongamos que en un plano tenemos dos puntos fijos P_0 y P_1 . Hay un número infinito de curvas que unen esos puntos y podemos preguntarnos

cuál de ellas es la más corta. Por supuesto, la respuesta intuitiva —la línea recta— es la correcta. También podemos preguntarnos qué curva generará la superficie de revolución de área menor al girar en torno al eje de abscisas y, en este caso, la respuesta está lejos de ser evidente. Así mismo, si consideramos una curva típica como un alambre sin fricción en un plano vertical, entonces otro problema será encontrar cual es la forma de la curva que hace que el descenso de una partícula de P_0 a P_1 bajo la acción de la gravedad sea más rápido (problema de la *braquistocrona* de J. Bernoulli).

Otras cuestiones que podemos plantearnos son la determinación de la curva más corta que une dos puntos de una superficie en \mathbb{R}^3 sin salirse de la superficie (más en general, hallar las *geodésicas* de una variedad), la posición de un hilo libremente suspendido por sus extremos (*catenaria*), la trayectoria de la luz en un medio de índice variable, la forma que adquiere una membrana elástica sujeta a una curva rígida cerrada y sometida a una presión de carga, etc. Las respuestas intuitivas a estas preguntas son bastante raras y el Cálculo de Variaciones proporciona un método analítico para resolver problemas de este tipo.

Volviendo al problema de la curva $x = x(t)$ más corta que une los puntos $P_0 = (t_0, x_0)$ y $P_1 = (t_1, x_1)$, es claro que lo que debemos encontrar es la función que minimiza la integral

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + x'(t)^2} dt;$$

y, para hallar la curva que proporciona superficie de revolución mínima al girar en torno al eje t , deberemos hacer lo mismo con

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} 2\pi x(t) \sqrt{1 + x'(t)^2} dt.$$

En general, el Cálculo de Variaciones trata, en su caso más sencillo, de determinar cuando se hace máximo o mínimo el funcional

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), x'(t)) dt$$

definido sobre todas las funciones $x \in \mathcal{C}^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, tales que $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ y siendo F una función real de clase \mathcal{C}^1 dada.

El problema anterior es en cierto sentido similar al del cálculo de máximos y mínimos de funciones de una o varias variables numéricas que se estudia en Análisis II. Pero en este caso estamos tratando con funcionales en lugar de con funciones. Un estudio completo de la teoría requiere amplios conocimientos de Análisis que escapan de los objetivos del presente curso. (Hay que tener en cuenta además que con nuestro planteamiento ya hemos eliminado la posibilidad de considerar curvas que sólo sean continuas.) Sin embargo, los métodos prácticos para hallar las soluciones a este tipo de problemas conducen siempre a una ecuación diferencial cuya resolución es la clave del problema. Es por esto que parece adecuado abordar este tema en un curso dedicado esencialmente a las Ecuaciones Diferenciales.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $x_0 = x_1 = 0$. Así, consideraremos

$$E = \{x \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \mid x(t_0) = x(t_1) = 0\},$$

que, con la norma $\|x\| = \sup\{|x(t)| + |x'(t)| \mid t \in [t_0, t_1]\}$, es un espacio de Banach. Si la función F está definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ entonces el funcional J está definido sobre el conjunto

$$U = \{x \in E \mid (t, x(t), x'(t)) \in \Omega \forall t \in [t_0, t_1]\},$$

que es un abierto de E .

El Cálculo Diferencial sobre espacios de Banach es, en ciertos aspectos, similar al Cálculo Diferencial en \mathbb{R}^n , y los resultados que se obtienen son análogos. Así se puede definir la *diferencial* del funcional $J: U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ en una función x como la aplicación lineal $dJ(x)$ de E en \mathbb{R} que satisface $|J(x+h) - J(x) - dJ(x)(h)| = o(\|h\|)$. Una condición necesaria para que $\varphi \in U$ sea un *máximo o mínimo relativo* de J es que $dJ(\varphi) = 0$. Una función φ que satisface $dJ(\varphi) = 0$ se denomina *extremal*. La búsqueda de condiciones suficientes puede abordarse como en el caso de funciones en abiertos n -dimensionales, aunque presenta considerables complicaciones adicionales. También es difícil la investigación teórica de *máximos y mínimos absolutos*. En cualquier caso, la mera determinación de extremales es de suficiente interés especialmente en algunos problemas físicos o geométricos cuando la extremal es única. A lo largo

de esta exposición, siempre que hablemos de máximos y mínimos nos referiremos a relativos.

No es difícil probar la equivalencia entre el hecho de que φ sea un extremal de J y que satisfaga la *ecuación de Euler*

$$\frac{d}{dt} F_{x'}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = F_x(t, \varphi(t), \varphi'(t)).$$

Esta ecuación es de importancia fundamental para nuestros propósitos pues proporciona el nexo de unión entre el Cálculo de Variaciones y las Ecuaciones Diferenciales.

Si F es de clase \mathcal{C}^2 y $\det(F_{x'x'}) \neq 0$ en Ω , el teorema de la función implícita demuestra que las extremales también son de clase \mathcal{C}^2 . Además, esto permite cambiar el orden de derivación al utilizar derivadas parciales en la ecuación de Euler. Así, obtenemos la expresión vectorial

$$F_{tx'} + F_{xx'} \cdot x' + F_{x'x'} \cdot x'' = F_x$$

que, si denotamos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, también se puede escribir como

$$F_{tx'_j} + \sum_{k=1}^n F_{x_j x'_k} x'_k + \sum_{k=1}^n F_{x'_j x'_k} x''_k = F_{x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Es decir, lo que aparece es un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden con n funciones incógnitas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ y $2n$ condiciones frontera $x_1(t_0) = \dots = x_n(t_0) = 0 = x_1(t_1) = \dots = x_n(t_1)$.

En gran parte de los casos prácticos que se abordan se tiene $n = 1$ y por tanto la ecuación de Euler ya no tiene significado vectorial. Por otra parte, cuando F no depende de t o de x obtenemos los siguientes casos particulares, de expresión mucho más sencilla:

1) Si $F = F(x')$, entonces la ecuación de Euler se reduce simplemente a $x'' = 0$, luego las soluciones son rectas.

2) Cuando $F = F(t, x')$, la ecuación de Euler queda $\frac{d}{dt} F_{x'} = F_x = 0$, es decir, $F_{x'} = \text{cte.}$, que es una ecuación diferencial de primer orden.

3) Finalmente, si $F = F(x, x')$, que además es el caso de la mayoría de los ejemplos, es fácil ver que la ecuación de Euler equivale a $F - F_{x'} \cdot x' = \text{cte.}$, de nuevo de primer orden.

En cuanto a las condiciones suficientes, si φ es un extremal de J , se puede construir su forma cuadrática $Q_\varphi(t)$ análogamente a como se hace en \mathbb{R}^n . Si la forma cuadrática resulta ser definida positiva entonces φ será mínimo y, si es definida negativa, máximo. En el caso del mínimo, para $n = 1$ esto se traduce en que

$$F_{xx} - \frac{d}{dt}F_{xx'} > 0 \quad \text{y} \quad F_{x'x'} > 0,$$

ambas expresiones evaluadas en $(t, \varphi(t), \varphi'(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ (para máximo, cambiar ambos $>$ por $<$). Sin embargo, estas condiciones no revisten gran utilidad práctica pues incluso en los casos más sencillos son difíciles de comprobar. Realmente, el método más usual para resolver los problemas que estamos tratando es encontrar los extremales y decidir si son máximo o mínimo basándose en criterios físicos o geométricos.

Otra cuestión que podemos plantearnos, y cuya resolución aún no podemos abordar con lo que hemos visto, es encontrar, de entre todas las curvas cerradas que tienen longitud dada, la que encierra área máxima. En este caso, deberemos maximizar el funcional $J(x)$ que da el área pero exigiendo que un nuevo funcional $J_1(x)$, el que proporciona la longitud, permanezca constante. Por el ejemplo concreto que acabamos de citar, este tipo de problemas se denominan *problemas isoperimétricos*.

Así pues, supongamos que, además del funcional J , tenemos un nuevo funcional

$$J_1(x) = \int_{t_0}^{t_1} G(t, x(t), x'(t)) dt$$

con G de clase \mathcal{C}^1 y definida en el mismo conjunto que F . Lo que nos planteamos es estudiar los máximos y mínimos de J pero sometidos a la condición $J_1(x) = K_1$ con $K_1 \in \mathbb{R}$ constante fija.

El procedimiento a seguir es de nuevo similar al de los máximos y mínimos condicionados en \mathbb{R}^n . En concreto, se puede aplicar el método de los *multiplicadores de Lagrange* que asegura que si φ es máximo o mínimo de J con la condición $J_1(x) = K_1$, y φ no es extremal de J_1 , entonces φ es extremal de $J - \lambda J_1$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Este resultado conduce directamente a la correspondiente ecuación de Euler para extremos condicionados

$$\frac{d}{dt}(F_{x'} - \lambda G_{x'}) = F_x - \lambda G_x.$$

Entre los problemas que hemos citado como ejemplo al principio del capítulo y que se resuelven fácilmente con este método está el de encontrar la forma que adopta un hilo que cuelga libremente de sus dos extremos bajo la acción de la gravedad. Su solución consiste en minimizar el funcional que da la energía potencial sujeto a la condición de que la longitud del hilo es fija.

Por último, a partir del método de los multiplicadores se obtiene el *principio de reciprocidad*, que asegura que si φ no es extremal de J ni de J_1 y se tiene $J(\varphi) = K$, $J_1(\varphi) = K_1$, entonces φ es extremal de J con la condición $J_1(x) = K_1$ si y sólo si φ es extremal de J_1 con la condición $J(x) = K$.

Una aplicación inmediata de este hecho es que el problema de hallar, entre todas las curvas cerradas de longitud dada, la que tiene área máxima, es equivalente a hallar, entre todas las que tienen área dada, la de longitud mínima. Lógicamente, en ambos casos la respuesta es una circunferencia.

Bibliografía

- [1] V. ARNOLD, *Équations Différentielles Ordinaires*, Mir, Moscú, 1978.
- [2] V. ARNOLD, *Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires*, Mir, Moscú, 1980.
- [3] Y. AYANT Y M. BORG, *Funciones Especiales*, Alhambra, Madrid, 1974.
- [4] F. AYRES, *Cálculo Diferencial e Integral*, Col. Schaum, McGraw-Hill, México, 1971.
- [5] F. AYRES, *Ecuaciones Diferenciales*, Col. Schaum, McGraw-Hill, México, 1988.
- [6] A. C. BAJPAI, I. M. CALUS Y J. HYSLOP, *Ecuaciones Diferenciales. Texto Programado*, Paraninfo, Madrid, 1974.
- [7] F. BAYEN Y C. MARGARIA, *Problèmes de Mathématiques Appliquées*, 3 vol., Marketing, París, 1988.
- [8] R. BELLMAN Y K. L. COOKE, *Differential-Difference Equations*, Academic Press, Nueva York, 1963.
- [9] G. BIRKHOFF Y G. C. ROTA, *Ordinary Differential Equations*, 3ª ed., Wiley and Sons, Nueva York, 1978.
- [10] W. E. BOYCE Y R. C. DIPRIMA, *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, Limusa-Wiley, México, 1972.
- [11] W. E. BOYCE Y R. C. DIPRIMA, *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales*, Limusa-Wiley, México, 1972.
- [12] M. BRAUN, *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990.
- [13] J. L. BRENNER, *Problems in Differential Equations*, 2ª ed., Freeman, San Francisco, 1966.
- [14] R. BRONSON, *Ecuaciones Diferenciales Modernas*, Col. Schaum, McGraw-Hill, México, 1976.
- [15] Y. S. BUGROV Y S. M. NIKOLSKY, *Higher Mathematics. Differential Equations, Multiple Integrals, Series, Theory of Functions of a Complex Variable*, Mir, Moscú, 1983.
- [16] J. C. BURKILL, *The Theory of Ordinary Differential Equations*, 3ª ed., Longman, Londres, 1975.
- [17] I. CARMONA, *Ecuaciones Diferenciales*, Alhambra, Madrid, 1985.
- [18] H. CARTAN, *Teoría Elemental de Funciones Analíticas de Una o Varias Variables Complejas*, Selecciones Científicas, Madrid, 1968.

- [19] H. CARTAN, *Cálculo Diferencial*, 2ª ed., Omega, Barcelona, 1978.
- [20] H. CARTAN, *Formas Diferenciales*, Omega, Barcelona, 1972.
- [21] F. CHORLTON, *Ordinary Differential and Difference Equations*, Van Nostrand, Londres, 1965.
- [22] H. F. CLEAVES, *Differential Equations*, Oliver and Boyd, Edimburgo, 1969.
- [23] J. C. CLEGG, *Calculus of Variations*, Oliver and Boyd, Edimburgo, 1968.
- [24] E. A. CODDINGTON, *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, C.E.C.S.A., México, 1973.
- [25] E. A. CODDINGTON Y N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, Nueva York, 1955.
- [26] S. COLOMBO Y J. LAVOINE, *Transformations de Laplace et de Mellin. Formulaires. Mode d'Utilisation*, Gauthier-Villars, París, 1972.
- [27] J. B. CONWAY, *Functions of One Complex Variable*, 2ª ed., Springer-Verlag, Nueva York, 1978.
- [28] R. COURANT Y D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, tomo I, Wiley-Interscience, Nueva York, 1953.
- [29] P. DANKO Y A. POPOV, *Ejercicios y Problemas de Matemáticas Superiores*, tomo II, Paraninfo, Madrid, 1983.
- [30] P. DANKO, A. POPOV Y Y. KOZHEVNIKOVA, *Matemáticas Superiores en Ejercicios y Problemas*, tomo II, Mir, Moscú, 1983.
- [31] B. DAVIES, *Integral Transforms and Their Applications*, Springer-Verlag, Nueva York, 1978.
- [32] J. W. DETTMAN, *Introducción al Álgebra Lineal y a las Ecuaciones Diferenciales*, McGraw-Hill, México, 1975.
- [33] A. DOU, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, 2ª ed., Dossat, Madrid, 1969.
- [34] L. ELSGOLTZ, *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, 3ª ed., Mir, Moscú, 1983.
- [35] D. FEYEL, A. DE LA PRADELLE, *Exercices sur les Fonctions Analytiques*, Armand Colin, París, 1973.
- [36] G. FLORY, *Topologie et Analyse. Tomo IV: Séries; Équations Différentielles*, Vuibert, París, 1981.

- [37] J. FORTEA, *Introducción a los Procesos Diferenciales*, Tecnos, Madrid, 1981.
- [38] V. FRAILE, *Ecuaciones Diferenciales. Métodos de Cálculo, Problemas*, Tebar Flores, Albacete, 1984.
- [39] F. R. GANTMACHER, *The Theory of Matrices*, 2 vol., Chelsea, Nueva York, 1960.
- [40] E. GARBAYO, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Umbon, Madrid, 1983.
- [41] I. M. GELFAND Y G. E. SHILOV, *Generalized Functions*, Vol. I, Academic Press, Nueva York, 1964.
- [42] J. GENET Y G. PUPION, *Analyse Moderne*, 2 vol., Vuibert, París, 1971.
- [43] M. DE GUZMÁN, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría de Estabilidad y Control*, Alhambra, Madrid, 1975.
- [44] M. DE GUZMÁN, I. PERAL Y M. WALIAS, *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Alhambra, Madrid, 1978.
- [45] P. HARTMAN, *Ordinary Differential Equations*, Wiley and Sons, Nueva York, 1967.
- [46] J. HEADING, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Limusa, México, 1974.
- [47] M. W. HIRSCH Y S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, Nueva York, 1974.
- [48] H. HOCHSTADT, *Differential Equations. A Modern Approach*, Dover, Nueva York, 1975.
- [49] W. HUREWICZ, *Sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, 2ª ed., Rialp, Madrid, 1978.
- [50] C. IMAZ Y Z. VOREL, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Limusa-Wiley, México, 1968.
- [51] E. L. INCE, *Integration of Ordinary Differential Equations*, 7ª ed., Oliver and Boyd, Edimburgo, 1967.
- [52] D. JACKSON, *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*, Carus Monographs nº 6, A.M.S., 1971.
- [53] A. P. KARTASHOV Y B. L. ROZHDENSTVENSKI, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Fundamentos del Cálculo Variacional*, Reverté, Barcelona, 1980.
- [54] A. KISELIOV, M. KRASNOV, G. MAKARENKO, *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, 3ª ed., Mir, Moscú, 1970.

- [55] A. M. KRALL, *Linear Methods of Applied Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973.
- [56] M. KRASNOV, A. KISELIOV, G. MAKARENKO, *Ecuaciones Integrales*, Mir, Moscú, 1970.
- [57] M. KRASNOV, A. KISELIOV, G. MAKARENKO, *Funciones de Variable Compleja, Cálculo Operacional, Teoría de la Estabilidad*, Mir, Moscú, 1983.
- [58] J. G. KRZYŻ, *Problems in Complex Variable Theory*, Elsevier, Nueva York, 1971.
- [59] A. KYRALA, *Applied Functions of a Complex Variable*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1972.
- [60] F. LOWENTHAL, *Linear Algebra with Linear Differential Equations*, Wiley and Sons, Nueva York, 1975.
- [61] J. C. LUCENA Y J. L. NUÑEZ, *Problemas de Ecuaciones Diferenciales*, Alexa, Madrid, 1968.
- [62] F. MARCELLÁN, L. CASASÚS Y A. ZARZO, *Ecuaciones Diferenciales. Problemas Lineales y Aplicaciones*, McGraw-Hill, Madrid, 1990.
- [63] C. MARTÍNEZ Y M. A. SANZ, *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Reverté, Barcelona, 1991.
- [64] C. MATAIX, *Análisis Algebraico e Infinitesimal. Tomo II: Cálculo Integral*, 5ª ed., Dossat, Madrid, 1967.
- [65] J. L. MATAIX, *Mil Problemas de Cálculo Integral. 3ª parte: Derivación e Integración en el Campo Complejo. 4ª parte: Ecuaciones Diferenciales*, 8ª ed., Dossat, Madrid, 1973 (3ª parte) y 1976 (4ª parte).
- [66] D. S. MITRINOVIĆ, *Calculus of Residues*, Noordhoff, Groninga, 1966.
- [67] J. MUÑOZ, *Curso de Teoría de Funciones 1*, Tecnos, Madrid, 1978.
- [68] J. PALIS JR. Y W. DE MELO, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, I.M.P.A., Brasilia, 1978.
- [69] I. G. PETROVSKI, *Ordinary Differential Equations*, Dover, Nueva York, 1973.
- [70] O. PLAAT, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Reverté, Barcelona, 1974.
- [71] G. PÓLYA Y G. SZEGÖ, *Problems and Theorems in Analysis*, tomo I, Springer-Verlag, Berlín, 1972.

- [72] L. S. PONTRIAGUIN, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Aguilar, Madrid, 1973.
- [73] D. PORTER Y D. S. G. STIRLING, *Integral Equations. A Practical Treatment, from Spectral Theory to Applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [74] M. PUIG ADAM, *Curso Teórico Práctico de Ecuaciones Diferenciales Aplicado a la Física y Técnica*, tomo II, 11ª ed., Biblioteca Matemática, Madrid, 1970.
- [75] E. D. RAINVILLE Y P. E. BEDIENT, *Ecuaciones Diferenciales*, 5ª ed., Edit. Interamericana, México, 1977.
- [76] M. RAMA MOHANA RAO, *Ordinary Differential Equations. Theory and Applications*, Edward Arnold, Londres, 1981.
- [77] J. REY PASTOR Y A. DE CASTRO, *Funciones de Bessel y Aplicaciones*, Dossat, Madrid, 1958.
- [78] F. RIDEAU, *Exercices de Calcul Différentiel*, Hermann, París, 1979.
- [79] R. RODRÍGUEZ VIDAL, *Ecuaciones Diferenciales y Temas Afines*, Vicens Vives, Barcelona, 1972.
- [80] N. ROUCHE Y J. MAWHIN, *Équations Différentielles Ordinaires. Tomo I: Théorie Générale, II: Stabilité et Solutions Périodiques*, Masson et Cie, París, 1973.
- [81] W. RUDIN, *Análisis Real y Complejo*, 2ª ed., Alhambra, Madrid, 1979.
- [82] J. M. SEVILLA, *Ecuaciones Diferenciales. Tablas y Otros Datos Matemáticos*, Paraninfo, Madrid, 1981.
- [83] G. F. SIMMONS, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas*, McGraw-Hill, Madrid, 1988.
- [84] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, I.M.P.A., Brasilia, 1979.
- [85] M. R. SPIEGEL, *Transformadas de Laplace*, Col. Schaum, McGraw-Hill, México, 1970.
- [86] M. R. SPIEGEL, *Matemáticas Superiores para Ingenieros y Científicos*, Col. Schaum, McGraw-Hill, México, 1977.
- [87] A. N. TIKHONOV, A. B. VASIL'EVA Y A. G. SVESHNIKOV, *Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlín, 1985.
- [88] G. P. TOLSTOV, *Fourier Series*, Dover, Nueva York, 1976.

- [89] M. VALDIVIA, *Análisis Matemático III*, U.N.E.D., Madrid, 1976.
- [90] G. VALIRON, *The Geometric Theory of Ordinary Differential Equations and Algebraic Functions*, Math Sci Press, Brookline, Massachusetts, 1984.
- [91] L. VOLKOVYSKI, G. LUNTS, I. ARAMANOVICH, *Problemas sobre la Teoría de Funciones de Variable Compleja*, Mir, Moscú, 1972.
- [92] D. V. WIDDER, *The Laplace Transform*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1964.
- [93] K. YOSIDA, *Équations Différentielles et Intégrales*, Dunod, París, 1971.

MÉTODO DE ENSEÑANZA

En el sentido pedagógico, *método* es el *conjunto de procedimientos que se emplean para instruir a los alumnos*. Su actuación sobre la inteligencia del alumno debe ser constante y directa, potenciando al máximo posible su rendimiento a través de la influencia que el profesor ejercerá sobre su voluntad. La enseñanza de una ciencia tiene dos objetivos generales:

1. Instruir a los alumnos en los elementos de la ciencia.

2. Desarrollar su inteligencia para que cuando terminen sus estudios sean capaces de aprovechar el conjunto de conocimientos que ya poseen, adquirir nuevos, y efectuar adelantos sobre lo que han aprendido.

Para el primero basta con que el profesor posea conocimientos científicos, pero para el segundo es necesario además exponer con claridad los principios en que se basa la ciencia y la metódica coordinación de resultados y consecuencias, hacer compatible la claridad con la profundidad, la sencillez con la combinación, e iniciar a los alumnos en posibles nuevos caminos para su futuro. Y todo esto hacerlo inspirando vivo entusiasmo, procurando siempre despertar la inteligencia del que en esos momentos se está formando. Hay que considerar lo que se enseña más como una semilla que como un fruto maduro que se da al alumno.

En el desarrollo e impartición del programa habrá que tener en cuenta tanto las clases teóricas como las prácticas, así como las horas de tutoría.

Las clases teóricas constituirán el núcleo en que se apoyen las actividades de los alumnos, fundamentalmente su estudio personal. En ellas se desarrollarán las partes esenciales de los programas, mediante explicaciones que deberán ser ordenadas, precisas, claras y rigurosas. Su preparación debe ser efectuada en detalle incluso por el profesor más experimentado, evitando el desorden en la exposición y la discontinuidad del discurso. Tampoco hay que caer en el extremo contrario y que los alumnos vean al profesor como alguien que les dicta unos apuntes que se sabe de memoria. En nuestra opinión, es bueno que se vea que el profesor está en esos momentos pensando para desarrollar su explicación. Incluso se podría argumentar que las dudas momentáneas que surgen ante una situación concreta son estimulantes para los alumnos si ellos intentan colaborar en su solución.

Ha de cuidarse igualmente la presentación, y seguir, en la medida de lo posible, las normas ya clásicas del desarrollo de una conferencia: dedicar el

comienzo y final de la exposición a la presentación y al resumen o compendio de lo explicado, resaltando la relación de lo tratado con otras disciplinas, así como utilizar, si bien moderadamente, el recurso a la anécdota.

Por otra parte, las Matemáticas en sí son fundamentalmente abstractas, entendiendo la abstracción como la consideración de estructuras cada vez más generales de cuya comprensión y desarrollo se obtienen aplicaciones diversas a situaciones particulares. No podemos pues permitir que los alumnos se queden únicamente con casos concretos sino que deber tener una mayor visión de los temas tratados. Para ayudarles a adquirir un verdadero poder de abstracción es aconsejable, y no del todo difícil, encontrar unas palabras que justifiquen la necesidad de tal o cual teorema, e incluso a lo largo de su demostración justificar la imposición de determinadas hipótesis, relacionar el teorema en cuestión con otros ya estudiados y resaltar los pasos fundamentales y conceptuales de los meramente operativos.

Deberán proponerse también algún contraejemplo e intentar demostraciones con hipótesis menos fuertes, así como destacar las limitaciones de cada teoría y los problemas concretos que dentro de ella no se pueden resolver. Así mismo, muchas veces puede resultar útil comentarles cuestiones relacionadas con lo que se explica y que aún están planteadas como problemas abiertos. Esto puede ayudar a despertar en los alumnos tanto el interés como el sentido de la crítica, dándoles a su vez una visión amplia de la materia así como de sus posibles mejoras y prolongaciones, haciéndoles comprender la belleza de las generalizaciones.

Es claro que no podrá sacar partido de la exposición de una lección quien no sienta curiosidad o necesidad de que le expliquen aquello, y esta curiosidad debe despertarla en todos los niveles el profesor. Aquí radica uno de los aspectos más importantes del acercamiento del profesor y el alumno.

Como complemento a las clases teóricas deberán impartirse las clases prácticas siempre en estrecha conexión con las teóricas. Mediante ejemplos y ejercicios, se insistirá en los conceptos fundamentales de la materia del curso y se explicarán, siempre que se considere oportuno, cuestiones que conduzcan de los resultados generales a las aplicaciones concretas. Además, consideramos importante poner ejemplos en los que se vea la utilidad de las Ecuaciones

Diferenciales para resolver problemas de otras ciencias como puede ser la Física. Tal como ya hemos insistido a lo largo de la memoria, pensamos que esto ayuda al alumno a interesarse y a comprender el porqué de lo que está estudiando. Es también útil proponer a los estudiantes problemas para que sean resueltos fuera de las horas de clase ya que esto, además de obligarles a pensar, les permite comprobar los avances que van efectuando.

En cuanto al uso de referencias, es conveniente tener en cada tema del que se trate uno o varios textos básicos e ir dando la bibliografía adecuada al alumno. Esta no deberá ser demasiado extensa pues corremos el riesgo de que, incluso los que eventualmente puedan estar interesados en consultar libros o ampliar conocimientos, se pierdan entre una maraña de tomos entre los que no saben por cual decidirse. Pero, desde luego, es importante enseñarle al alumno a consultar libros y revistas, para que consiga descubrir lo esencial de estos y a interesarse por las cuestiones que le sean propuestas y las que él mismo debe plantearse. En este sentido no hay inconveniente en aconsejarles algún artículo de lectura sencilla como los suelen aparecer en *The American Mathematical Monthly* o *Mathematical Intelligencer*. Muchos de ellos contienen además ideas interesantes para el profesor en lo que respecta a sus explicaciones.

Por último, al margen de las clases, disponemos de las horas de tutoría en las que la relación profesor–alumno aumenta. Este tiempo debe servir tanto para prestar una ayuda adicional a los alumnos que lo necesiten como para desarrollar las facultades de quienes por su nivel superior al medio o su interés especial en la asignatura aspiren a un dominio mayor de ella.

Sin duda la labor menos grata de un profesor es la de juez de sus propios alumnos. Ningún método para calcular el grado de asimilación por parte de estos ha sido suficientemente perfeccionado. En general, un examen de tipo convencional será el medio más adecuado, pero entonces su dificultad debe medirse cuidadosamente variando desde temas o problemas sencillos que permitan aprobar a los alumnos de nivel aceptable, a otros con pequeñas dificultades que delimiten los niveles sucesivamente mejores. Nosotros nos inclinamos por la realización a lo largo del curso de dos exámenes parciales junto con otro dedicado únicamente a la resolución de ecuaciones diferenciales mediante métodos clásicos. Los alumnos que no lograsen aprobar la asignatura por parciales tendrían una segunda oportunidad en un nuevo examen al final del curso.