Zubía. Monográfico 26 39–54 Logroño 2014

SERIES DE FOURIER NO TRIGONOMÉTRICAS: UNA PERSPECTIVA FAMILIAR

ALBERTO ARENAS[1], ÓSCAR CIAURRI[1],
EDGAR LABARGA[1], LUZ RONCAL[1],
JUAN LUIS VARONA[1]

RESUMEN

En este artículo hacemos un recorrido, a grandes rasgos y desde una perspectiva histórica y familiar, sobre nuestra investigación en análisis de Fourier.

Palabras clave: Análisis de Fourier, sistemas ortogonales, polinomios ortogonales, funciones de Bessel, teoría de aproximación.

In this paper we describe the research lines of our work on Fourier Analysis. We do it from a historical and familiar point of view.

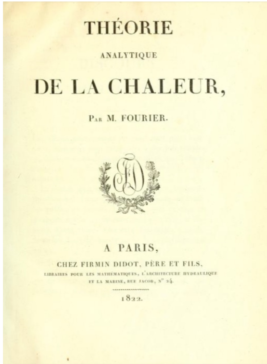
Key words: *Fourier analysis, orthogonal systems, orthogonal polynomials, Bessel functions, approximation theory.*

1. EL ORIGEN DEL ANÁLISIS DE FOURIER

A finales del año 1807, Joseph Fourier presentó al *Institut de France* una memoria titulada *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* en la que analizaba el problema de la propagación del calor en un cuerpo a lo largo del tiempo, conociendo la temperatura en el instante inicial. El trabajo fue analizado por un comité de cuatro expertos pero no se llegó a emitir ningún informe sobre el contenido del mismo. Sin embargo, el Instituto propuso como tema para su premio del año 1812 «dar la teoría matemática de las leyes de propagación del calor y comparar los resultados de esta teoría con los de experiencias exactas». A finales de 1811 Fourier entregó una nueva memoria titulada *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*. El trabajo resultó ganador pero no llegó a ser publicado por las reservas del jurado sobre su generalidad y rigor. Finalmente, en 1822

1. Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja, Logroño (La Rioja, España)
Correo electrónico: {alarenas, oscar.ciaurri, edlabarg, luz.roncal, jvarona}@unirioja.es
Los autores están financiados por el proyecto MTM2012-36732-C03-02 de la DGI.

Fourier reunió sus resultados sobre el tema en la obra *Théorie analytique de la chaleur*. La memoria premiada fue publicada, debido a la insistencia del autor, en dos partes aparecidas en 1824 y 1826. Aunque desarrollado en los trabajos posteriores, la parte principal del estudio de Fourier sobre la propagación del calor estaba ya contenida en la memoria de 1807.



THÉORIE
ANALYTIQUE
DE LA CHALEUR,
PAR M. FOURIER.

A PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,

Retrato caricaturesco de J. Fourier, atribuido a Julien Leopold Boilly, y la portada de su obra *Théorie analytique de la chaleur*.

A lo largo de su vida, J. Fourier trabajó como docente e investigador y ocupó distintos cargos políticos, llegando a ser prefecto de algunas regiones de Francia. Resulta destacable su participación en la sección científica de la expedición de Napoleón a Egipto. Desde 1815 hasta su muerte, acaecida en 1830 a los 62 años de edad, se centró en desarrollar su carrera política dentro del ámbito científico. Tras ingresar en la *Académie des Sciences* en 1817, en 1822 fue nombrado Secretario Perpetuo de la misma y en 1826 fue elegido miembro de la Academia Francesa.

En su memoria sobre la distribución del calor Fourier, para obtener su solución, necesita escribir la función que da la distribución de temperatura inicial como suma de una serie trigonométrica. Éste es precisamente el punto de partida de lo que hoy denominamos, en su honor, series de Fourier. El problema consiste en, dada una función f de periodo 2π, encontrar una serie trigonométrica de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

cuya suma coincida con $f(x)$ para cada x. Fourier decidió que los coeficientes debían venir dados por las fórmulas

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \qquad \text{y} \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx.$$

Para Fourier no había duda de que las series así definidas representaban a la función f de partida. Sin embargo, en su razonamiento había involucrados una

Núm. 26 (2014), pp. 39–54
ISSN 1131-5423
Zubía
Monográfico

serie de conceptos matemáticos que no serían clarificados hasta bastantes años después. En palabras de J. Duoandikoetxea [32]:

> A falta de demostraciones generales de sus resultados, lo que Fourier nos legó no fue un teorema sobre la representación de una función en serie trigonométrica, sino un problema. Un problema en el que estaban implicados los conceptos de función, integral, suma de series y, posteriormente, tipo de convergencia. La influencia de este problema en el desarrollo de los conceptos del análisis matemático fue considerable.

De hecho, la rigorización y el desarrollo de lo que hoy llamamos *análisis de Fourier* ha sido un proceso largo y laborioso[1] en el que todavía hay importantes cuestiones por resolver.

Mediante la relación $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, la serie de Fourier de una función f integrable y 2π-periódica puede reescribirse como

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx} \qquad \text{con} \qquad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx. \tag{1}$$

Si denotamos por $S_n f(x)$ la suma parcial de los términos de la serie de Fourier tales que $|k| \leq n$, es decir

$$S_n f(x) = \sum_{|k|\leq n} c_k(f)e^{ikx},$$

la cuestión central del análisis de Fourier consiste en determinar para qué funciones se verifica

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x),$$

entendiendo el límite en alguno de sus múltiples sentidos.

La principal característica de las funciones $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es que son ortonormales en el intervalo $[-\pi, \pi]$, es decir, cumplen que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ 1, & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Es precisamente esta propiedad la que determina que los coeficientes $c_k(f)$ tomen la expresión dada en (1).

En matemáticas es bien conocida la existencia de otras familias de funciones ortonormales (polinomios fundamentalmente, aunque existen otras) que cumplen importantes roles en campos tan dispares como la mecánica cuántica o la matemática financiera. La cuestión que surge de manera natural es si con esas familias

[1]Para un estudio breve pero detallado sobre el desarrollo histórico del análisis de Fourier podemos recomendar el citado artículo de J. Duoandikoetxea [32].

de funciones es posible realizar desarrollos de funciones en forma de serie. La respuesta a esta cuestión es afirmativa en muchos casos y ha dado lugar a lo que se denominan series de Fourier no trigonométricas. Este tipo de series se han trabajado de manera intensiva desde los años cincuenta del siglo pasado, y en nuestra universidad es una línea de investigación implantada a finales de los años ochenta (cuando aún éramos colegio universitario dependiente de Zaragoza) y que ha dado lugar a trabajos publicados en revistas de gran relevancia internacional.

2. NUESTROS PRIMEROS PASOS

Las series de Fourier no trigonométricas llegan a la Universidad de La Rioja de la mano de José Luis Rubio de Francia. El profesor Rubio de Francia fue uno de los principales exponentes de la matemática que se desarrolló en España durante los últimos años del franquismo y en los primeros de la democracia.[2] Tras su periodo formativo en la Universidad de Zaragoza, donde realizó su tesis doctoral bajo la dirección del profesor Luis Vigil[3] en problemas de análisis de Fourier abstracto, pasó dos años como estudiante postdoctoral en la Universidad de Princeton, donde entró en contacto con el análisis armónico de más alto nivel. Allí fue donde tuvo acceso a las herramientas que habrían de convertirlo en uno de los analistas más potentes de la matemática española.

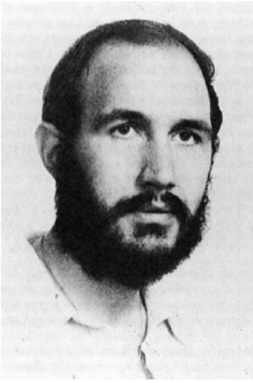
A pesar de su temprana muerte en 1988 a la edad de 38 años, el profesor Rubio de Francia fue capaz de formar a su alrededor a un grupo de matemáticos, actualmente en activo muchos de ellos, que han logrado importantes resultados dentro del análisis de Fourier. Uno de sus estudiantes fue el profesor José Javier Guadalupe, catedrático de análisis matemático de la Universidad de La Rioja, tristemente desaparecido en el año 2000. Es precisamente esta conexión la que originó que en nuestro departamento se comenzase a trabajar en series de Fourier no trigonométricas.

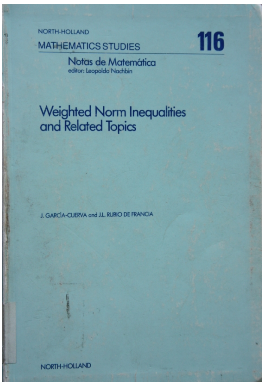
Tras su estancia en Princeton a finales de los setenta, el profesor Rubio de Francia vuelve a España y comienza a dirigir la tesis del profesor Guadalupe. Resulta interesante reseñar que, por circunstancias personales, el profesor Rubio de Francia pasó en Logroño un curso académico a principios de los ochenta impartiendo clases en el viejo Colegio Universitario de ciencias. Ese año resultó decisivo para la conclusión de la tesis del profesor Guadalupe que en aquellos años ya estaba instalado en Logroño.

Como resultado de sus investigaciones en teoría de pesos (una fecunda rama del análisis armónico), el profesor Rubio de Francia, junto al profesor J. García Cuerva, de la Universidad Autónoma de Madrid, escribió a mediados de los años

[2]El desarrollo histórico del análisis matemático en España y sus grupos de investigación está muy bien descrito en el excelente artículo [6].

[3]Precisamente este año se cumplen 100 años del nacimiento de D. Luis Vigil y Vázquez, el iniciador en España de la investigación en polinomios ortogonales, que ahora es una amplia escuela. Como recuerdo de su persona y su obra matemática, entre el 17 y 19 de octubre de 2014 se celebra en Alquézar (Huesca), el IX EITA Research Meeting in Approximation Theory.



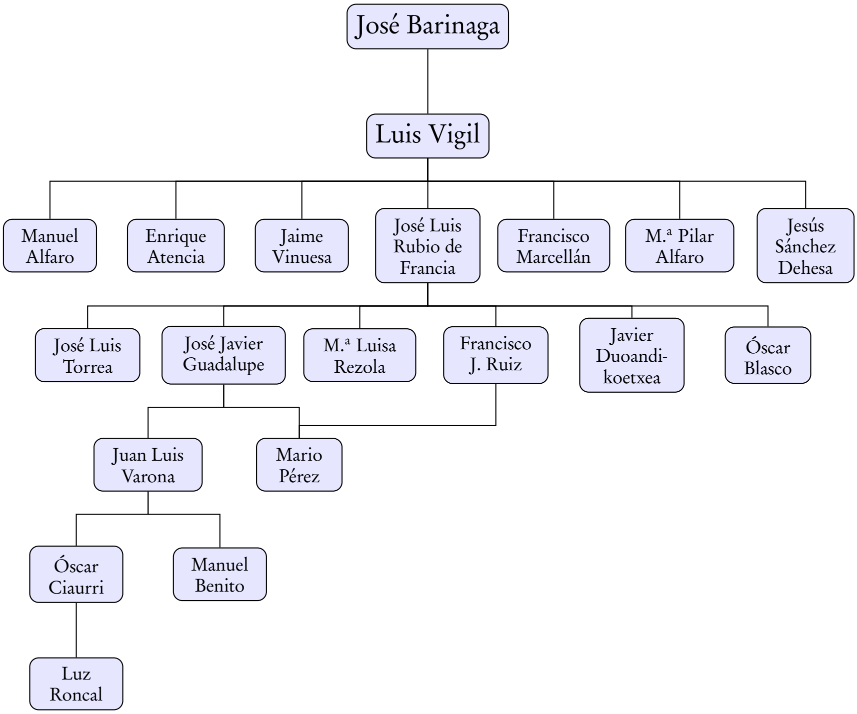


De izquierda a derecha, el profesor José Luis Rubio de Francia, portada de «El Libro» y el profesor José Javier Guadalupe.

ochenta una obra fundamental para los que nos dedicamos a esta línea de trabajo: *Weighted norm inequalities and related inequalities*, [35]. Hasta tal punto era una referencia básica para nuestro trabajo que el profesor Guadalupe solía referirse a él como «El Libro». Es precisamente en las páginas 470 y 471 de «El Libro» donde por primera vez se utiliza la teoría de pesos para el estudio de series de Fourier no trigonométricas. En concreto se analiza la acotación en espacios de Lebesgue de la suma parcial de las series de Fourier de polinomios de Legendre. El resultado era bien conocido y la demostración original se debía a H. Pollard [50]. Sin embargo, el análisis del problema desde el punto de vista de la teoría de pesos abría la posibilidad de desarrollar una nueva línea de trabajo.

El profesor Rubio de Francia propuso estudiar las posibilidades de este tipo de ideas al profesor Guadalupe y así fue como éste comenzó a dirigir dos tesis doctorales en las que se pretendía explotar la potencia de la teoría de pesos dentro del estudio de las series de Fourier no trigonométricas (la segunda de ellas codirigida por Francisco J. Ruiz, también alumno de doctorado de Rubio de Francia). Los doctorandos que realizaron esas tesis eran el profesor Juan Luis Varona, actual catedrático de matemática aplicada de nuestra universidad y uno de los autores de este trabajo, y el profesor Mario Pérez, profesor titular de análisis matemático en la Universidad de Zaragoza. Ellos son, aunque uno no esté en nuestra universidad, miembros muy activos de nuestro equipo de investigación. Después han venido otros, los profesores Óscar Ciaurri y Luz Roncal, con un currículum investigador ya consolidado, y, recientemente, los doctorandos Alberto Arenas y Edgar Labarga, que acaban de defender sus trabajos de fin de máster ([2] y [47]).

Con los años, los temas de investigación que ocupaban nuestro tiempo han ido variando y, por supuesto, ya no trabajamos en los problemas inicialmente planteados, pero las nuevas líneas de trabajo que hemos abierto aún están empapadas de aquel espíritu inicial. Aunque una gran parte de nuestra investigación sigue estando relacionada con el análisis armónico y la teoría de aproximación, también



En su sentido científico (las líneas entre nodos aluden a la dirección de la tesis doctoral), éste es el árbol genealógico de nuestro grupo (véase `http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu`).

hemos dedicado esfuerzos y obtenido resultados en otros campos de la matemática más o menos cercanos, como puede ser la teoría de números, los métodos iterativos, la matemática computacional, las ecuaciones diferenciales, o la resolución de problemas, entre otros temas. Escribir sobre todo ello sería demasiado largo, así que en este artículo solo nos ocuparemos de los aspectos de nuestro trabajo más próximos a los inicios de nuestro grupo: las series de Fourier no trigonométricas.

No queremos despedir esta sección sin rendir un cariñoso y merecido recuerdo a nuestros orígenes, personificados en José Luis y en Chicho (como habitualmente denominábamos a José Javier Guadalupe), ambos fallecidos de manera prematura, y ambos muy apreciados por la comunidad matemática española (respectivamente, véanse [33] y las referencias que contiene, y [34, 49]). A José Luis no solo hay que agradecerle su aportación a las matemáticas en una época en la que la investigación matemática en España era casi inexistente, sino su ánimo y el espíritu universitario que trasmitía, que contagió a muchos de sus compañeros. Baste decir que en 1978 él fundó, en Zaragoza y en Logroño, sendos seminarios en los que, de manera regular, se impartían conferencias de contenido matemático con el fin de divulgar resultados recientes de investigación o familiarizar a los asistentes (habitualmente compañeros) con nuevos temas; ambos seminarios continúan su andadura actualmente (véanse [1] y [46]). José Luis falleció en 1988 (solo el mayor de los autores de este artículo llegó a conocerlo), pero Chicho estaba ya impregnado de su entusiasmo y sus ganas de trabajo en la investigación matemática, que nos trasmitió a nosotros. Este grupo quedó huérfano cuando el año 2000 fallecía Chicho en un accidente de tráfico, volviendo a Logroño tras sus habituales reuniones de investigación en Zaragoza. Los que esto escribimos esperamos haber sido —y seguir siendo— dignos sucesores.

3. ALGUNAS DE NUESTRAS APORTACIONES

Para tratar de situar de un modo más detallado nuestra investigación mostraremos algunos aspectos de la misma de manera rigurosa pero sin entrar en excesivos detalles técnicos.

3.1. Series de Fourier-Jacobi

Dados $\alpha,\beta>-1$, usaremos $p_n^{(\alpha,\beta)}$ para denotar el polinomio de Jacobi de orden (α,β) y grado $n\geq 0$. Estos polinomios son ortonormales en $L^2((-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx)$; es decir, satisfacen la relación

$$\int_{-1}^{1} p_n^{(\alpha,\beta)}(x)p_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx=\begin{cases}0, & \text{si } n\neq m,\\ 1, & \text{si } n=m.\end{cases}$$

En este caso, dada una función f definida en el intervalo $(-1,1)$ definimos la serie de Fourier-Jacobi de f como

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(f)p_k^{(\alpha,\beta)}(x),$$

donde

$$d_k(f)=\int_{-1}^{1} f(x)p_k^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx.$$

El problema consiste en determinar para qué valores de p se tiene la convergencia en $L^p((-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx)$ de la serie de Fourier-Jacobi a la función f. En concreto, si

$$S_nf(x)=\sum_{k=0}^{n} d_k(f)p_k^{(\alpha,\beta)}(x)$$

es el operador de suma parcial n-ésima, nos interesa saber cuándo

$$\lim_{n\to\infty}||S_nf-f||_{L^p((-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx)}=0,$$

donde

$$||f||_{L^p((-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx)}=\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^p(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx\right)^{1/p}.$$

Que eso es cierto para $p = 2$ es un resultado sencillo (basado en que los espacios L^2 son espacios de Hilbert), pero para otros valores de p dista mucho de tener una respuesta fácil, y ése es el caso que interesa estudiar.

Como consecuencia de ciertos resultados clásicos de análisis funcional, el problema de la convergencia es equivalente a la acotación

$$\|S_n f\|_{L^p((-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx)} \le C\|f\|_{L^p((-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx)}, \tag{2}$$

donde C es una constante independiente de n y f. El estudio de la desigualdad (2) se puede generalizar incorporando ciertas funciones peso a ambos lados, donde denominamos peso a una función no negativa y localmente integrable. Si u y v son dos pesos, un problema que ha centrado nuestro interés es el análisis de las condiciones que deben verificar para que se cumpla la desigualdad

$$\|uS_n f\|_{L^p((-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx)} \le C\|vf\|_{L^p((-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx)}, \tag{3}$$

donde, de nuevo, la constante C no debe depender de n ni de f. Un ejemplo de este tipo de estimaciones, que es un caso particular del resultado principal de [36] y que no exponemos en toda su generalidad por lo complejo que resultaría introducir toda la notación necesaria, es el siguiente:

Teorema 1. *Sean $\alpha, \beta > -1$, $1 < p < \infty$ y denotemos $u_{r,s}(x) = (1-x)^r(1+x)^s$. Entonces*

$$\|u_{a,b} S_n f\|_{L^p((-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx)} \le C\|u_{A,B} f\|_{L^p((-1,1),(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx)},$$

con C independiente de n y f, si y solo si

$$-\min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\right\} - a < (\alpha+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\right\} - A, \quad a \le A,$$

y

$$-\min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2}\right\} - b < (\beta+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2}\right\} - B, \quad b \le B.$$

La demostración del resultado es una aplicación de la teoría de pesos y del análisis detallado de ciertas cuestiones técnicas. Cabe señalar que el teorema anterior ya era conocido para algunos valores particulares de los parámetros involucrados. Por ejemplo, el caso $a = b = A = B = 0$ es un resultado clásico debido a H. Pollard [51], y el caso $a = A$ y $b = B$ fue analizado por B. Muckenhoupt [48].

Es posible comprobar que la acotación uniforme del teorema anterior solo se verifica cuando p pertenece a un cierto intervalo (p_0, p_1), donde p_0 y p_1 son valores dependientes de α, β, a, b, A y B. El intervalo (p_0, p_1) suele denominarse intervalo de convergencia en media. En los valores extremos $p = p_0$ y $p = p_1$ solo cabe esperar algún tipo de *acotación débil* (cuya definición precisa omitimos), y fuera del intervalo no es posible obtener ni siquiera ese tipo de acotación (ya que un argumento de interpolación llevaría a una contradicción). Sin precisar detalles, debemos indicar que el estudio de acotaciones débiles en los extremos del intervalo de convergencia en media ha sido un problema que hemos analizado en detalle para las series de Fourier-Jacobi y los resultados pueden verse en [39], [42], [43] y [44]. Otros resultados sobre series de Fourier-Jacobi que obtuvimos a lo largo de los años noventa están recogidos en [37], [40] y [41]; en particular, merece la pena comentar que en [40] y [41] se analiza qué ocurre con la serie de Fourier (y su convergencia) cuando al peso le añadimos deltas de Dirac, problema sobre el que no había literatura matemática previa.

En los últimos años las series de Fourier-Jacobi han vuelto a ser objeto de atención de nuestro equipo investigador. En [10] se han analizado acotaciones con pesos de ciertos operadores que relacionan series de Fourier-Jacobi de distintos órdenes; en [21], al estudiar una determinada familia de operadores sobre variedades riemannianas, se realizó la acotación de los denominados operadores de integral fraccionaria asociados con las series de Fourier-Jacobi con constantes independientes del orden; en [9], en relación con un sistema ortonormal de polinomios sobre la bola unidad n-dimensional, ha sido necesario realizar estimaciones para el operador de Poisson asociado con las series de Fourier-Jacobi. El resultado más reciente que hemos obtenido da una caracterización de la acotación uniforme de las sumas parciales de las series de Fourier-Jacobi en espacios de Morrey [3], que son una generalización de los espacios de Lebesgue.

3.2. Series de Fourier-Bessel

Las funciones de Bessel de orden α, que denotaremos mediante J_α, son soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0,$$

y aparecen de manera natural en muchos problemas de la física matemática y del análisis armónico clásico. Se trata de una familia de funciones que generaliza las funciones seno y coseno (de hecho, si $\alpha = \pm 1/2$ las funciones de Bessel son ligeras modificaciones del seno y el coseno), y una de sus principales características es que tienen un conjunto numerable de ceros positivos distintos. Denotaremos esos ceros por $\lambda_{n,\alpha}$, $n = 1, 2, \ldots$, y los supondremos ordenados de forma creciente (es decir, $\lambda_{n,\alpha} < \lambda_{m,\alpha}$ si $n < m$).

Con las funciones de Bessel y sus ceros es posible comprobar que, para ciertas constantes positivas c_n, si definimos $j_{n,\alpha}(x) = c_n J_\alpha(\lambda_{n,\alpha} x)$ se verifica la relación

$$\int_0^1 j_{n,\alpha}(x) j_{m,\alpha}(x) x\, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ 1, & \text{si } n = m; \end{cases}$$

es decir, las funciones $\{j_{n,\alpha}\}_{n\geq 1}$ son un sistema ortonormal en $L^2((0,1), x\,dx)$. El sistema es además completo. Con este sistema ortonormal, para funciones f

definidas en $(0,1)$ se definen las series de Fourier-Bessel como

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k(f) j_{k,\alpha}(x),$$

siendo

$$e_k(f) = \int_0^1 f(x) j_{k,\alpha}(x) x\, dx.$$

Las acotaciones uniformes con pesos y las acotaciones débiles para el operador de suma parcial (que se define de la manera obvia) de las series de Fourier-Bessel se realizó en los años noventa, en paralelo con el caso de las series de Fourier-Jacobi. Los resultados aparecieron publicados en [38].

Cuando la acotación de las sumas parciales falla es habitual considerar lo que se denomina *métodos de sumación*, intentando de este modo ampliar el intervalo de convergencia en media. Existen multitud de métodos de sumación, pero en el caso de las series de Fourier-Bessel a nosotros nos interesaron las denominadas medias de Bochner-Riesz. Para cada $\delta > 0$ y $R > 0$ se definen como

$$B_R f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{k,\alpha}^2}{R^2}\right)_+^{\delta} e_k(f) j_{k,\alpha}(x),$$

con $t_+ = \text{máx}\{t, 0\}$. En este caso se trata de estudiar acotaciones de la forma

$$\|B_R f\|_{L^p((0,1),x\,dx)} \le C \|f\|_{L^p((0,1),x\,dx)},$$

o su versión con pesos, donde C es una constante independiente de R y f. Por supuesto, este tipo de acotaciones también da, como consecuencia, la convergencia de $B_R f$ hacia la función f en la norma $L^p((0,1), x\,dx)$. Es interesante observar que el caso límite $\delta = 0$ se corresponde esencialmente con las sumas parciales. Acotaciones con distintos tipos de pesos para este operador han sido estudiadas en los trabajos [15] y [16]. El siguiente teorema es un caso particular de algunos de los resultados de esos artículos.

Teorema 2. *Sean $\alpha \ge -1/2$, $\delta > 0$ y $1 < p < \infty$. Entonces*

$$\|B_R f\|_{L^p((0,1),x\,dx)} \le C \|f\|_{L^p((0,1),x\,dx)},$$

con C una constante independiente de R y f, si y solo si

$$\frac{4}{3+\delta} < p < \frac{4}{1-\delta}.$$

La convergencia puntual («en casi todo punto», realmente) de la suma parcial de la serie de Fourier clásica para funciones en espacios de Lebesgue fue un problema de gran dificultad planteado a principios del siglo pasado y resuelto en los años sesenta por Carleson y Hunt. El estudio de este tipo de problemas involucra la acotación de ciertos operadores maximales. En el caso de las medias de Bochner-Riesz para las series de Fourier-Bessel, el operador maximal asociado se define como

$$\mathscr{B}f(x) = \sup_{R>0} |B_R f(x)|.$$

La acotación en los espacios $L^p((0,1), x\,dx)$ del operador $\mathscr{B}f$ permite deducir la convergencia puntual de las medias de Bochner-Riesz para funciones en ese mismo espacio. Este tipo de resultados los tratamos en [19].

A lo largo de los últimos años hemos analizado otros aspectos de las series de Fourier-Bessel: la transformada de Riesz y sus potencias, en [23] y [18]; operadores relacionando series de Fourier-Bessel con funciones de Bessel de distinto orden, en [22] y [24]; las denominadas g_k-funciones de Littlewood-Paley-Stein, en [17]; y el operador de ondas, en [20].

3.3. Series de Fourier-Neumann

Las funciones de Bessel satisfacen otro tipo de relación de ortogonalidad, en este caso con respecto al orden. Para $\alpha > -1$, verifican que

$$\int_0^\infty J_{\alpha+2n+1}(x) J_{\alpha+2m+1}(x)\,\frac{dx}{x} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(\alpha+2n+1)}, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{si } n \neq m, \end{cases}$$

de lo que se deduce que las funciones $\mathscr{J}_n^\alpha(x) = \sqrt{2(\alpha+2n+1)}\,x^{-(\alpha+1)} J_{\alpha+2n+1}(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, son ortonormales en el espacio $L^2((0,\infty), x^{2\alpha+1}\,dx)$ si $\alpha > -1$. Estas funciones no son densas en el espacio L^2 correspondiente, y para describir el espacio donde son densas debemos dar algunas definiciones.

La transformada de Hankel de una función f, definida en $(0,\infty)$, está dada por la expresión integral

$$\mathscr{H}_\alpha f(x) = \int_0^\infty f(y) \frac{J_\alpha(xy)}{(xy)^\alpha} y^{2\alpha+1}\,dy, \qquad \alpha > -1;$$

con ella definimos el operador

$$M_\alpha f = \mathscr{H}_\alpha(\chi_{[0,1]} \mathscr{H}_\alpha f),$$

que se denomina multiplicador del intervalo $[0,1]$ para la transformada de Hankel. Entonces las funciones $\mathscr{J}_n^\alpha$ son densas en el espacio

$$B_{2,\alpha} = \{f \in L^2((0,\infty), x^{2\alpha+1}\,dx) : M_\alpha f = f\}.$$

Las series de Fourier asociadas con el sistema $\mathscr{J}_n^\alpha$ se denominan series de Fourier-Neumann y están dadas, para funciones f adecuadas, por

$$\sum_{k=0}^\infty h_k(f) \mathscr{J}_k^\alpha(x),$$

con

$$h_k(f) = \int_0^\infty f(y) \mathcal{J}_k^\alpha(y) y^{2\alpha+1}\, dy.$$

La convergencia de estas series se analiza en los espacios $B_{p,\alpha}$, que se definen como $B_{2,\alpha}$ pero tomando las funciones en el espacio $L^p((0,\infty), x^{2\alpha+1}\, dx)$. En concreto, si definimos las sumas parciales de las series de Fourier-Neumann de la manera obvia, en [52] puede verse el siguiente resultado.

Teorema 3. *Sean $\alpha \geq -1/2$ y $1 < p < \infty$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n f - f\|_{L^p((0,\infty),x^{2\alpha+1}\,dx)} = 0, \qquad \textit{para } f \in B_{p,\alpha},$$

si y solo si

$$\max\left\{\frac{4}{3}, \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+3}\right\} < p < \min\left\{4, \frac{4(\alpha+1)}{2\alpha+1}\right\}.$$

Tanto las series de Fourier-Neumann como ciertos operadores asociados con la transformada de Hankel han dado lugar a un buen puñado de publicaciones por parte de miembros de nuestro equipo. Sobre las series de Fourier-Neumann hemos obtenido acotaciones con pesos para el operador suma parcial [11] y acotaciones débiles [13]; las hemos aplicado en el estudio de un sistema de ecuaciones integrales [12]; hemos analizado el semigrupo de Poisson y el del calor [4]; hemos tratado un método de sumación de tipo Cesàro [26]; hemos estudiado los conmutadores asociados con las sumas parciales [45]; y hemos mostrado su convergencia puntual [30]. Sobre operadores relacionados con la transformada de Hankel realizamos varios estudios de las medias de Bochner-Riesz, [27] y [25], y sobre el multiplicador del intervalo $[0,1]$ con pesos potenciales [5]. El estudio de un análogo discreto de las series de Fourier-Neumann puede verse en [7].

3.4. Otros trabajos sobre series de Fourier no trigonométricas

Aunque el grueso de nuestro trabajo ha quedado descrito en los apartados anteriores, hemos tratado otras cuestiones también relacionadas con series de Fourier no trigonométricas. Sin dar detalles, comentamos aquí algunas de las que consideramos más interesantes.

Para polinomios de Hermite, otro sistema ortonormal asociado con el oscilador armónico, en [8] hemos obtenido un teorema de transferencia, que permite pasar acotaciones de operadores obtenidas para una cierta dimensión a otras dimensiones, y para polinomios de Hermite generalizados hemos estudiado la sumabilidad Cesàro [28].

La transformada de Dunkl es un operador que generaliza las transformadas de Fourier y de Hankel. Para esta transformada obtuvimos un teorema de muestreo de tipo Whittaker-Shannon-Kotel'nikov que es una extensión del clásico [29].

Del mismo modo que la serie de Fourier clásica es una versión discreta de la transformada de Fourier, existe una versión discreta de la transformada de Dunkl.

Estas series, que denominamos series de Fourier-Dunkl, las introdujimos en el ya citado [29]. En [31] establecimos un principio de incertidumbre para ellas, y la acotación uniforme de las sumas parciales la tratamos en [14].

REFERENCIAS

[1] M. Alfaro, El Seminario Rubio de Francia de la Universidad de Zaragoza, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **17** (2014), 39–48.

[2] A. Arenas, *Series de Fourier-Jacobi en espacios de Morrey*, trabajo fin de máster, Universidad de La Rioja, 2014.

[3] A. Arenas y Ó. Ciaurri, Fourier-Jacobi expansions in Morrey spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **415** (2014), 302–313.

[4] J. J. Betancor, Ó. Ciaurri, T. Martínez, M. Pérez, J. L. Torrea y J. L. Varona, Heat and Poisson semigroups for Fourier-Neumann expansions, *Semigroup Forum* **73** (2006), 129–142.

[5] J. J. Betancor, Ó. Ciaurri y J. L. Varona, The multiplier of the interval $[-1, 1]$ for the Dunkl transform on the real line, *J. Funct. Anal.* **242** (2007), 327–336.

[6] J. Cerdà, La evolución del Análisis Matemático en España, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **12** (2009), 457–482.

[7] Ó. Ciaurri, Discrete Fourier-Neumann series, *J. Approx. Theory* **126** (2004), 126–140.

[8] Ó. Ciaurri, A transference theorem for Hermite expansions, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **53** (2004), 231–234.

[9] Ó. Ciaurri, The Poisson operator for orthogonal polynomials in the multidimensional ball, *J. Fourier Anal. Appl.* **19** (2013), 1020–1028.

[10] Ó. Ciaurri, A. Nowak y K. Stempak, Jacobi transplantation revisited, *Math. Z.* **257** (2007), 355–380.

[11] Ó. Ciaurri, J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and almost everywhere convergence of Fourier-Neumann series, *J. Math. Anal. Appl.* **236** (1999), 125–147.

[12] Ó. Ciaurri, J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Solving dual integral equations on Lebesgue spaces, *Studia Math.* **142** (2000), 253–267.

[13] Ó. Ciaurri, M. Pérez y J. L. Varona, Weak behaviour of Fourier-Neumann series, *Glasgow Math. J.* **45** (2003), 97–104; Corrigendum, *Glasgow Math. J.* **45** (2003), 567.

[14] Ó. Ciaurri, M. Pérez, J. M. Reyes y J. L. Varona, Mean convergence of Fourier-Dunkl series, *J. Math. Anal. Appl.* **372** (2010), 470–485.

[15] Ó. Ciaurri y L. Roncal, The Bochner-Riesz means for Fourier-Bessel expansions, *J. Funct. Anal.* **228** (2005), 89–113.

[16] Ó. Ciaurri y L. Roncal, Weighted inequalities for the Bochner-Riesz means related to the Fourier-Bessel expansions, *J. Math. Anal. Appl.* **329** (2007), 1170–1180.

[17] Ó. Ciaurri y L. Roncal, Littlewood-Paley-Stein g_k-functions for Fourier-Bessel expansions, *J. Funct. Anal.* **258** (2010), 2173–2204.

[18] Ó. Ciaurri y L. Roncal, Higher order Riesz transforms for Fourier-Bessel expansions, *J. Fourier Anal. Appl.* **18** (2012), 770–789.

[19] Ó. Ciaurri y L. Roncal, The Bochner-Riesz means for Fourier-Bessel expansions: norm inequalities for the maximal operator and almost everywhere convergence, *J. Approx. Theory* **167** (2013), 121–146.

[20] Ó. Ciaurri y L. Roncal, The wave equation for the Bessel Laplacian, *J. Math. Anal. Appl.* **409** (2014), 263–274.

[21] Ó. Ciaurri, L. Roncal y P. R. Stinga, Fractional integrals on compact Riemannian symmetric spaces of rank one, *Adv. Math.* **235** (2013), 627–647.

[22] Ó. Ciaurri y K. Stempak, Transplantation and multiplier theorems for Fourier-Bessel expansions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), 4441–4465.

[23] Ó. Ciaurri y K. Stempak, Conjugacy for Fourier-Bessel expansions, *Studia Math.* **176** (2006), 215–247.

[24] Ó. Ciaurri y K. Stempak, Weighted transplantation for Fourier-Bessel series, *J. Anal. Math.* **100** (2006), 133–156.

[25] Ó. Ciaurri, K. Stempak y J. L. Varona, Uniform two-weight norm inequalities for Hankel transform Bochner-Riesz means of order one, *Tohoku Math. J. (2)* **56** (2004), 371–392.

[26] Ó. Ciaurri, K. Stempak y J. L. Varona, Mean Cesàro-type summability of Fourier-Neumann series, *Studia Sci. Math. Hungar.* **42** (2005), 413–430.

[27] Ó. Ciaurri y J. L. Varona, A uniform boundedness for Bochner-Riesz operators related with the Hankel transform, *J. Inequal. Appl.* **7** (2002), 759–777.

[28] Ó. Ciaurri y J. L. Varona, Two-weight norm inequalities for the Cesàro means of generalized Hermite expansions, *J. Comput. Appl. Math.* **178** (2005), 99–110.

[29] Ó. Ciaurri y J. L. Varona, A Whittaker-Shannon-Kotel'nikov sampling theorem related to the Dunkl transform, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), 2939–2947.

[30] Ó. Ciaurri y J. L. Varona, The surprising almost everywhere convergence of Fourier-Neumann series, *J. Comput. Appl. Math.* **233** (2009), 663–666.

[31] Ó. Ciaurri y J. L. Varona, An uncertainty inequality for Fourier-Dunkl series, *J. Comput. Appl. Math.* **233** (2010), 1499–1504.

[32] J. Duoandikoetxea, 200 años de convergencia de las series de Fourier, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **10** (2007), 651–677.

[33] J. Duoandikoetxea, En recuerdo de José Luis Rubio de Francia (1949–1988): una mirada al teorema de extrapolación, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **16** (2013), 227–240.

[34] L. Español y J. L. Varona (editores), *Margarita Mathematica en memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández*, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, 2001.

[35] J. García Cuerva y J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies, 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

[36] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Weighted L^p-boundedness of Fourier series with respect to generalized Jacobi weights, *Publ. Mat.* **35** (1991), 449–459.

[37] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Two notes on convergence and divergence a.e. of Fourier series with respect to some orthogonal systems, *Proc. Amer. Math. Soc.* **116** (1992), 457–464.

[38] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Mean and weak convergence of Fourier-Bessel series, *J. Math. Anal. Appl.* **173** (1993), 370–389.

[39] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Endpoint weak boundedness of some polynomial expansions, *J. Comput. Appl. Math.* **49** (1993), 93–102.

[40] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Asymptotic behaviour of orthogonal polynomials relative to measures with mass points, *Mathematika* **40** (1993), 331–344.

[41] J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Weighted norm inequalities for polynomial expansions associated to some measures with mass points, *Constr. Approx.* **12** (1996), 341–360.

[42] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and weak convergence of some orthogonal Fourier expansions by using A_p theory, *Lect. Notes Pure Appl. Math.* **117** (1989), 161–169.

[43] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Weak behaviour of Fourier-Jacobi series, *J. Approx. Theory* **61** (1990), 222–238.

[44] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Weighted weak behaviour of Fourier-Jacobi series, *Math. Nachr.* **158** (1992), 161–174.

[45] J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Commutators and analytic dependence of Fourier-Bessel series on $(0,\infty)$, *Canad. Math. Bull.* **42** (1999), 198–208.

[46] J. M. Gutiérrez y J. L. Varona, El Seminario Permanente de Actualización en Matemáticas de la Universidad de La Rioja, *Matematicalia – Revista digital de divulgación científica* **4**, no. 5 (dic. 2008), `http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_wrapper&Itemid=407`

[47] E. Labarga, *Análisis diádico y desigualdades con peso*, trabajo fin de máster, Universidad de La Rioja, 2014.

[48] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Jacobi series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (1969), 306–310.

[49] M. Pérez y F. J. Ruiz, In memoriam José Javier Guadalupe, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **3** (2000), 257–271.

[50] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **62** (1947), 387–403.

[51] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. III, *Duke Math. J.* **16** (1949), 189–191.

[52] J. L. Varona, Fourier series of functions whose Hankel transform is supported on $[0, 1]$, *Constr. Approx.* **10** (1994), 65–75.