ESTIMACIONES DE POLINOMIOS ORTOGONALES CON PESO $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta_{-1} + N\delta_1$

Mario Pérez Riera y Juan Luis Varona Malumbres

Abstract

Let w be a Jacobi weight function and δ_t the delta function at a point t. We obtain some estimates for the polynomials which are orthogonal with respect to $w + M\delta_{-1} + N\delta_1$, by using expresions which relate them to the Jacobi polynomials.

Clasificación A.M.S. (1980): 42C10.

Sean $\alpha, \beta > -1$ y $\{P_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ los polinomios de Jacobi usuales [4], ortogonales con respecto a la función peso $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ sobre el intervalo $[-1,1]$. Algunas propiedades que necesitaremos son Comencemos con

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}, \quad \text{donde} \quad (\alpha+1)^n = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x).$$

El coeficiente director del polinomio $P_n^{(\alpha,\beta)}$ es

$$k_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{-n}\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

y su norma al cuadrado vale

$$\begin{aligned} h_n^{(\alpha,\beta)} &= \int_{-1}^{1} [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \end{aligned}$$

Este artículo se presentó en las *XIII Jornadas Hispano Lusas de Matemáticas*, Universidad de Valladolid (Valladolid, 1988). Contrariamente a lo anunciado —y dado el tiempo ya transcurrido— parece claro que no va a haber nunca actas de dicho congreso. Así, éste es un manuscrito sin publicar; no obstante, el resultado principal de este trabajo —el teorema 2— también está demostrado, con un método totalmente distinto y mucho más general al aquí empleado, en el artículo J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Asymptotic behaviour of orthogonal polynomials relative to measures with mass points, *Mathematika* **40** (1993), 331–344.

Fórmula de Rodrigues:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-2)^{-n}(n!)^{-1}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}].$$

Finalmente, es conocida [3] la acotación

$$(h_n^{(\alpha,\beta)})^{-1/2}|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| \le K\left(1-x+\frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-1/4}\left(1+x+\frac{1}{n^2}\right)^{-\beta/2-1/4}.$$

Sean ahora $M, N \ge 0$ y

$$d\mu(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx + M\delta_{-1}(x) + N\delta_1(x)$$

sobre el intervalo $[-1,1]$, donde $\delta_{\pm1}$ es la delta de Dirac sobre el punto ±1. El propósito de este trabajo es obtener las mismas acotaciones para los polinomios ortonormales con respecto a $d\mu$.

Sea

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(x) = &\left[\frac{(\alpha+\beta+1)_n}{n!}\right]^2\left\{\frac{n+\alpha+\beta+1}{2(\alpha+\beta+1)}\right. \\ &\left.\times[B_nM(1-x)-A_nN(1+x)]P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) + A_nB_nP_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde

$$A_n = \frac{(\alpha+1)_n n!}{(\beta+1)_n(\alpha+\beta+1)_n} + \frac{n(n+\alpha+\beta+1)M}{(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}$$

y

$$B_n = \frac{(\beta+1)_n n!}{(\alpha+1)_n(\alpha+\beta+1)_n} + \frac{n(n+\alpha+\beta+1)N}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)}$$

(el caso $\alpha+\beta+1=0$ debe ser entendido por continuidad en α y β). Koornwinder [2] demuestra que estos polinomios son ortogonales en $[-1,1]$ con respecto a la medida $d\mu$.

Llamaremos $k_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ al coeficiente director de $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ y $h_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ al cuadrado de su norma:

$$h_n^{(\alpha,\beta,M,N)} = \int_{-1}^{1}[P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(x)]^2\,d\mu(x).$$

Usaremos asimismo la notación $r_n \sim s_n$ cuando $r_n/s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, siendo $\{r_n\}$ y $\{s_n\}$ sucesiones de términos no nulos. Mediante la fórmula de Stirling puede probarse, a partir de (1):

$$k_n^{(\alpha,\beta,M,N)} \sim \begin{cases} 2^{n+\alpha+\beta}\pi^{-1/2}n^{-1/2} & \text{si } M=N=0, \\ \frac{N\Gamma(\beta+1)}{\pi^{1/2}\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\alpha+2)}\,2^{n+\alpha+\beta}n^{2+2\alpha-1/2} & \text{si } N>M=0, \\ \frac{M\Gamma(\alpha+1)}{\pi^{1/2}\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(\beta+2)}\,2^{n+\alpha+\beta}n^{2+2\beta-1/2} & \text{si } M>N=0, \\ \frac{MN}{\pi^{1/2}(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+2)^2}\,2^{n+\alpha+\beta}n^{4+2\alpha+2\beta-1/2} & \text{si } M,N>0, \end{cases} \tag{2}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(1) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\, n^{\alpha} + \frac{M}{\Gamma(\beta+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\, n^{2\beta+\alpha+2}, \tag{3}$$

$$(-1)^n P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(-1) \sim \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\, n^{\beta} + \frac{N}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\, n^{2\alpha+\beta+2}. \tag{4}$$

Para el cálculo de $h_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ necesitamos algunos resultados previos:

Lema 1.

$$\int_{-1}^{1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta}\, dx \sim (-1)^{n-1} 2^{\alpha+\beta+2}\Gamma(\beta+1) n^{-(\beta+1)}.$$

Demostración. Se deduce integrando por partes, después de sustituir la fórmula de Rodrigues. □

Lema 2.

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)[(1-x)^n - 2^n](1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta}\, dx \\ &= -\int_{-1}^{1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)(1-x)^{n-1}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta}\, dx \sim \frac{(-1)^n \pi^{1/2}}{2^{n-1}}\, n^{-1/2}. \end{aligned}$$

Demostración. Se sigue de la igualdad $(1-x)^n - 2^n = -(1+x)\sum_{k=0}^{n-1} 2^k (1-x)^{n-1-k}$. □

Utilizando (1), (2), (3), (4) y los lemas 1 y 2, se puede ahora demostrar:

Teorema 1.

$$h_n^{(\alpha,\beta,M,N)} \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\, n^{-1} & \textit{si } M = N = 0, \\ \frac{N^2\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)^2\Gamma(\alpha+\beta+2)}\, n^{3+4\alpha} & \textit{si } N > M = 0, \\ \frac{M^2\Gamma(\alpha+1)}{2\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta+2)^2\Gamma(\alpha+\beta+2)}\, n^{3+4\beta} & \textit{si } M > N = 0, \\ \frac{M^2N^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)^3}\, n^{7+4\alpha+4\beta} & \textit{si } M, N > 0. \end{cases}$$

Corolario. *Si llamamos $p_n(x)$ a los polinomios ortonormales con respecto a $d\mu$, entonces*

$$p_n(1) \sim \begin{cases} \frac{2^{1/2}\Gamma(\beta+1)^{1/2}}{\Gamma(\alpha+1)^{1/2}\Gamma(\alpha+\beta+2)^{1/2}}\, n^{\alpha+1/2} & \textit{si } N = 0, \\ \frac{2^{1/2}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^{1/2}\Gamma(\alpha+\beta+2)^{1/2}}{N\Gamma(\beta+1)^{1/2}}\, n^{-\alpha-3/2} & \textit{si } N > 0. \end{cases}$$

Un resultado análogo se obtiene para $(-1)^n p_n(-1)$.

Finalmente, obtenemos para los polinomios $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ la cota que buscábamos:

Teorema 2. *Sean $\alpha, \beta > -1$, $M, N \geq 0$. Existe una constante K tal que $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \geq 0$:*

$$\begin{aligned} &(h_n^{(\alpha,\beta,M,N)})^{-1/2} |P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(x)| \\ &\qquad \leq K \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-1/4} \left(1 + x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\beta/2-1/4}. \end{aligned}$$

Demostración. Por simetría, basta demostrar que $\forall x \geq 0$ el miembro de la izquierda está acotado por $K(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}$. Como en el caso de los polinomios de Jacobi [3], ello será cierto si se tiene

$$(h_n^{(\alpha,\beta,M,N)})^{-1/2}|P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(\cos\theta)| = \begin{cases} \mathcal{O}(\theta)^{-\alpha-1/2}) & \text{si } c/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ \mathcal{O}(n^{\alpha+1/2}) & \text{si } 0 \leq \theta \leq c/n, \end{cases}$$

donde c es una constante positiva prefijada cualquiera. Como esta expresión es válida para los polinomios de Jacobi [4, T. 7.32.2], el problema puede reducirse, por (1), a la acotación de

$$(h_n^{(\alpha,\beta,M,N)})^{-1/2}\left[\frac{(\alpha+\beta+1)_n}{n!}\right]^2 A_n\Big\{B_nP_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ - N\frac{n+\alpha+\beta+1}{2(\alpha+\beta+1)}(1+x)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\Big\}.$$

Utilizando ahora el teorema 1, estimaciones para A_n y $(\alpha+\beta+1)_n/n!$, las igualdades

$$(1+x)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) = \frac{2(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta+1}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)}(x) + \frac{2n}{2n+\alpha+\beta+1}P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)$$

([4, 4.5.4]), y

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{n+\alpha+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+1}P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) - \frac{n+\beta}{2n+\alpha+\beta+1}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)}(x),$$

y la fórmula de tipo Hilb [4, T. 8.21.12]

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta}P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\theta) = \\ D^{-(\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{n!}\left(\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^{1/2}J_{\alpha+1}(D\theta) \\ + \begin{cases} \theta^{1/2}\mathcal{O}(n^{-3/2}) & \text{si } c/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ \theta^{\alpha+3}\mathcal{O}(n^{\alpha+1}) & \text{si } 0 \leq \theta \leq c/n, \end{cases}$$

donde $D = n + (\alpha+\beta+2)/2$ y $J_{\alpha+1}(z)$ es la función de Bessel, puede verse que el teorema está probado si se demuestra que las dos expresiones

$$D^{-2\alpha-2}\frac{(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)}{n}\Bigg[\frac{(\beta+1)_n n!}{(\alpha+1)_n(\alpha+\beta+1)_n} \\ + N\frac{n(n+\beta)}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)}\Bigg]\left|D^{\alpha+1}J_{\alpha+1}(D\theta) - (D-1)^{\alpha+1}J_{\alpha+1}((D-1)\theta)\right| \tag{5}$$

y

$$D^{-2\alpha-2}\left|\frac{(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)}{n}(D-1)^{\alpha+1}\right.$$
$$\times\left[\frac{(\beta+1)_n n!}{(\alpha+1)_n(\alpha+\beta+1)_n}+N\frac{n(n+\beta)}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)}\right]$$
$$-(n+\beta)\frac{D^{2\alpha+2}}{(D-1)^{\alpha+1}}\left[\frac{(\beta+1)_n n!}{(\alpha+1)_n(\alpha+\beta+1)_n}\right.$$
$$\left.\left.+N\frac{(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)}\right]\right|J_{\alpha+1}((D-1)\theta) \tag{6}$$

son ambas

$$n^{3/2-\alpha}\theta^{\alpha+1}\begin{cases}\mathcal{O}(\theta^{-\alpha-1/2}) & \text{si } c/n\le\theta\le\pi/2,\\ \mathcal{O}(n^{\alpha+1/2}) & \text{si } 0\le\theta\le c/n.\end{cases}$$

Para lograr estas estimaciones, empleamos algunas propiedades de las funciones de Bessel:

$$[z^\nu J_\nu(z)]'=z^\nu J_{\nu-1}(z);$$
$$J_\nu(z)=\mathcal{O}(z^\nu)\quad\text{cuando}\quad z\to0;\qquad J_\nu(z)=\mathcal{O}(z^{-1/2})\quad\text{cuando}\quad z\to\infty.$$

De estas propiedades y del teorema del valor medio, puede deducirse que

$$\left|(D\theta)^{\alpha+1}J_{\alpha+1}(D\theta)-((D-1)\theta)^{\alpha+1}J_{\alpha+1}((D-1)\theta)\right|$$
$$=n^{\alpha+1/2}\theta^{2\alpha+2}\begin{cases}\mathcal{O}(\theta^{-\alpha-1/2}) & \text{si } c/n\le\theta\le\pi/2,\\ \mathcal{O}(n^{\alpha+1/2}) & \text{si } 0\le\theta\le c/n,\end{cases}$$

y, de aquí, la estimación asintótica (5). Por último, (6) se logra mediante las expresiones asintóticas citadas de J_ν y utilizando la fórmula

$$\frac{(\beta+1)_n n!}{(\alpha+1)_n(\alpha+\beta+1)_n}$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)}n^{-2\alpha}\left[1-\frac{\alpha(\alpha+\beta+1)}{n}+\mathcal{O}(n^{-2})\right],$$

que puede deducirse de la expresión [1]:

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)}=n^{a-b}\left[1+\frac{(a-b)(a+b-1)}{2n}+\mathcal{O}(n^{-2})\right].$$

□

Bibliografía

[1] A. Erdélyi y otros, "Higher transcendental functions", McGraw-Hill Book Co., New York, vol. I, 1953.

[2] T. H. Koornwinder, Orthogonal polynomials with weight function $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta+M\delta(x+1)+N\delta(x-1)$, *Canad. Math. Bull.* **27** (1984), 205–214.

[3] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Jacobi series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (1969), 306–310.

[4] G. Szegő, "Orthogonal Polynomials", 3.ª ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.

Mario Pérez Riera
Dpto. de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Univ. de Zaragoza
50009 Zaragoza (España)

Juan Luis Varona Malumbres
Dpto. de Matemáticas
Col. Univ. de La Rioja
Univ. de Zaragoza
26001 Logroño (La Rioja, España)