COMPORTAMIENTO DÉBIL DE LAS SERIES DE FOURIER-JACOBI

MARIO PÉREZ RIERA
Universidad de Zaragoza

y

JUAN LUIS VARONA MALUMBRES
Colegio Universitario de La Rioja

Clasificación AMS: 42C15

Abstract

Let $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ denote the nth Jacobi polynomial with respect to the weight function $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ on the interval $(-1,1)$, and $S_N(f,x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ the Nth partial sum of the Fourier-Jacobi expansion of a function $f \in L^1(w)$. It was proved by Pollard and Muckenhoupt that there exists an interval $(p_0,p_1) \subseteq (1,\infty)$ determined by the condition $|1/p - 1/2| < \min\{1/(4\alpha+4), 1/(4\alpha+4)\}$ such that $S_N f$ converges to f in the $L^p(w)$ norm for every $f \in L^p(w)$ when $p \in (p_0,p_1)$ and that mean convergence fails if $p = p_0$ or $p = p_1$. We show that the partial sum operator is not weak type on the $L^p(w)$ spaces when $p = p_1$.

Sean $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\alpha, \beta > -1$, los polinomios de Jacobi, ortogonales en el intervalo $(-1,1)$ respecto al peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, cumpliéndose

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx = h_n^{(\alpha,\beta)}\delta_{nm}$$

con

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, \qquad h_n^{(\alpha,\beta)} \approx \frac{2^{\alpha+\beta}}{n}, \quad n \to \infty.$$

Para $\alpha, \beta \geq -1/2$ Pollard [5] demostró que $|1/p - 1/2| < \text{mín}\{1/(4\alpha+4), 1/(4\beta+4)\}$ es condición suficiente para la acotación uniforme $\|S_n f\|_{p,w} \leq C\|f\|_{p,w}$, lo cual es equivalente a la convergencia en $L^p(w)$, $1 < p < \infty$. Newman-Rudin [4] demostraron que la condición anterior también es necesaria. Más adelante Muckhenhoupt [3] extendió los resultados anteriores hasta $\alpha, \beta > -1$, encontrando la misma condición $|1/p - 1/2| < \text{mín}\{1/(4\alpha+4), 1/(4\beta+4)\}$.

ESTE ARTÍCULO APARECIÓ PUBLICADO EN: *Actas XII Jornadas Luso-Espanholas de Matemática*, Vol. II (Braga, Portugal, 1987), 429–434, Universidade do Minho, Braga, 1990.

Una convergencia menos exigente es la débil, que puede expresarse en los términos

$$\int_{|S_n(f,x)|>y} w(x)\,dx \le Cy^{-p}\int_{-1}^{1} |f(x)|^p w(x)\,dx.$$

Por otra parte, por interpolación, la desigualdad anterior sólo podría ser cierta en los extremos superior o inferior del intervalo de converencia en media. Chanillo [1] probó que no lo es para series de Fourier-Legendre ($\alpha=\beta=0$) y $p=4$. En este trabajo demostraremos que tampoco es cierta para Jacobi cualquiera en el extremo superior del intervalo de convergencia en media.

Como para $-1<\alpha,\beta\le -1/2$, las condiciones $|1/p-1/2|<\text{mín}\{1/(4\alpha+4),1/(4\beta+4)\}$ son triviales para todo p en $(1,\infty)$ supondremos que α ó $\beta>-1/2$ (de $p=\infty$ no nos ocuparemos). Por simetría, podemos suponer $\alpha>-1/2$. Más aún, $\alpha\ge\beta$ y $\alpha>-1/2$. Entonces, el intervalo de convergencia en media es

$$\frac{\alpha+1}{2\alpha+3}<p<\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}.$$

Demostraremos que no es cierta la convergencia débil para $p=4(\alpha+1)/(2\alpha+1)$.

Si lo fuera, en particular lo sería cuando $\operatorname{sop} f\subseteq[0,1]$, y, con más razón todavía, tendría que cumplirse

$$\int_{|S_n(f,x)|>y,\, x\in[0,1]} w(x)\,dx \le Cy^{-p}\int_{0}^{1} |f(x)|^p w(x)\,dx.$$

Supondremos a partir de ahora $\operatorname{sop} f\subseteq[0,1]$ y todas las integrales restringidas a $x\in[0,1]$, aunque no lo indiquemos expresamente. Esto simplifica las cosas pues nos permitirá utilizar las estimaciones de los polinomios de Jacobi con $\alpha>-1/2$, que se mantienen uniformes (independientes de n) en todo $[0,1]$.

Por simplicidad, denotaremos únicamente

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=P_n(x)\qquad \text{y}\qquad P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)=Q_n(x).$$

Muckenhoupt [3] probó que en $S_n(f,x)=\int_{-1}^{1} f(t)K_n(x,t)w(t)\,dt$ puede ponerse

$$K_n(x,t)=r_nT_1(n,x,t)+s_nT_2(n,x,t)+s_nT_3(n,x,t)$$

con $\{r_n,s_n\}$ acotado, siendo

$$\begin{aligned} T_1(n,x,t)&=nP_n(x)P_n(t),\\ T_2(n,x,t)&=n(1-t^2)\,\frac{P_n(x)Q_{n-1}(t)}{x-t},\\ T_3(n,x,t)&=T_2(n,t,x)=n(1-x^2)\,\frac{P_n(t)Q_{n-1}(x)}{t-x}. \end{aligned}$$

Además (ver Szegő [6, (7.32.6), pág. 169]), para $x\in[0,1]$ se cumple

$$n^{1/2}|P_n(x)|\le C(1-x)^{-\alpha/2-1/4}, \tag{1}$$

$$n^{1/2}|Q_n(x)|\le C(1-x)^{-\alpha/2-1/2-1/4}=C(1-x)^{-\alpha/2-3/4}. \tag{2}$$

Si denotamos $W_i(f,x)=W_{i,n}(f,x)=\int_0^1 f(t)T_i(n,x,t)w(t)\,dt$ $(i=1,2,3)$, la acotación débil de estos tres sumandos se expresaría

$$\int_{|W_i(f,x)|>y} w(x)\,dx \le Cy^{-p}\int_{0}^{1} |f(x)|^p w(x)\,dx$$

con C independiente de n, f e y.

Analicemos los tres:

$i=1$) Por (1) y la desigualdad de Hölder, si $1/p+1/q=1$, tendremos

$$\begin{aligned}|W_1(f,x)| &= \left|n^{1/2}P_n(x)\int_0^1 f(t)n^{1/2}P_n(t)w(t)\,dt\right| \\ &\le C(1-x)^{-\alpha/2-1/4}\left(\int_0^1 |f(t)|^p w(t)\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^1 (1-t)^{q(-\alpha/2-1/4)}w(t)\,dt\right)^{1/q} \\ &\le C_1(1-x)^{-\alpha/2-1/4}\left(\int_0^1 |f(t)|^p w(t)\,dt\right)^{1/p}\end{aligned}$$

siempre que $q(-\alpha/2-1/4)+\alpha>-1$, o sea $p>4(\alpha+1)/(2\alpha+3)$. Y esto es cierto para $p=4(\alpha+1)/(2\alpha+1)$. Entonces,

$$\int_{|W_1(f,x)|>y} w(x)\,dx \le \int_{(1-x)^{-1/4-\alpha/2}>\frac{y}{K\|f\|_{p,w}}} (1-x)^\alpha\,dx = C'y^{-p}\|f\|_{p,w}^p$$

luego se verifica la acotación débil para el primer sumando.

$i=3$) Veamos que para este sumando hay acotación fuerte luego, en particular, también débil. Para ello, si denotamos $H: L^p(u) \longrightarrow L^p(u)$ la transformada de Hilbert, H es acotada si y sólo si el peso u está en A_p (ver Hunt-Muckenhoupt-Wheeden [2]). Así, usando (1) y (2),

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |W_3(f,x)|^p w(x)\,dx \\ &\quad= \int_0^1 \left|n^{1/2}(1-x^2)Q_{n-1}(x)\int_0^1 \frac{n^{1/2}P_n(t)f(t)}{x-t}\,w(t)\,dt\right|^p w(x)\,dx \\ &\quad\le C\int_0^1 |H(n^{1/2}P_n(t)f(t)w(t),x)|^p(1-x)^{(1/4-\alpha/2)p+\alpha}\,dx.\end{aligned}$$

Y como $(1-x)^{(1/4-\alpha/2)p+\alpha}\in A_p(0,1)$ para $-1<(1/4-\alpha/2)p+\alpha<p-1$, lo cual es cierto para nuestro p, podemos seguir acotando, salvo constante, por

$$\int_0^1 |n^{1/2}P_n(x)f(x)w(x)|^p(1-x)^{(1/4-\alpha/2)p+\alpha}\,dx \le C\int_0^1 |f(x)|^p w(x)\,dx.$$

$i=2$) Como los dos primeros sumandos eran acotados débilmente, demostrar que la serie de Fourier no lo es, es equivalente a demostrar que tampoco lo es el tercer sumando. Para ello, se trata de probar que no es posible encontrar una constante K independiente de n, f e y tal que

$$\int_{|n^{1/2}P_n(x)H(f(t)n^{1/2}Q_{n-1}(t)(1-t^2)w(t),x)|>y} w(x)\,dx \le Ky^{-p}\int_0^1 |f(x)|^p w(x)\,dx.$$

Buscaremos ahora cotas inferiores de $|n^{1/2}P_n(x)|$ en algún subintervalo de $[0,1]$ y, para funciones $f(t)$ adecuadas, de $|n^{1/2}Q_{n-1}(t)f(t)(1-t^2)w(t)|$ en otro subintervalo de $[0,1]$ disjunto con el anterior, para poder así prescindir de $(x-t)^{-1}$ en la transformada de

Hilbert. Por el teorema 8.21.13 de Szegő [6], para $N = n + (\alpha+\beta+1)/2$ y $\gamma = -(\alpha + 1/2)\pi/2$ se cumple

$$n^{1/2}P_n(\cos\theta) = \pi^{-1/2}(\operatorname{sen}(\theta/2))^{-\alpha-1/2}(\cos(\theta/2))^{-\beta-1/2} \\ \times \{\cos(N\theta+\gamma) + (n\operatorname{sen}\theta)^{-1}O(1)\}$$

uniformemente en $c/n \le \theta \le \pi - c/n$ para cualquier $c > 0$.
A nosotros nos interesa $x = \cos\theta \in [0,1]$, luego $\theta/2 \in [0,\pi/4]$, $\operatorname{sen}(\theta/2) \sim \theta$, $\cos(\theta/2) \sim$ cte. Elijamos ahora una constante M tal que $M - \alpha/2 \in \mathbb{N}$ (M suficientemente grande, como luego veremos). Si además exigimos $\theta \in [M\pi/n, (M+1/8)\pi/n]$, se cumple

$$N\theta+\gamma \le \left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\left(M+\frac{1}{8}\right)\frac{\pi}{n} - \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(M-\frac{\alpha}{2}\right)\pi - \frac{\pi}{8}$$

y

$$N\theta+\gamma \ge \left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\frac{M\pi}{n} - \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \ge \left(M-\frac{\alpha}{2}\right)\pi - \frac{\pi}{4}$$

luego

$$\left(M-\frac{\alpha}{2}\right)\pi - \frac{\pi}{4} \le N\theta+\gamma \le \left(M-\frac{\alpha}{2}\right)\pi - \frac{\pi}{8} + \varepsilon \qquad \text{para} \quad n \ge n_0.$$

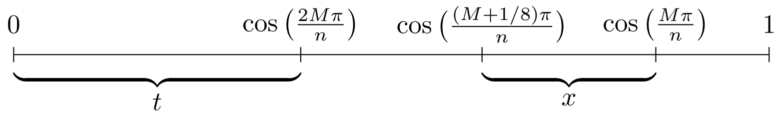
Así, $|\cos(N\theta+\gamma)|$ acotado inferiormente por una constante positiva.
Por otra parte, $(n\operatorname{sen}\theta)^{-1} \sim (n\theta)^{-1} \sim \text{cte}/M$, y $|O(1)\,\text{cte}/M|$ es más pequeño que la cota inferior de $|\cos(N\theta+\gamma)|$ para M suficientemente grande, con lo que $|\cos(N\theta+\gamma)| - |(n\operatorname{sen}\theta)^{-1}O(1)|$ está acotado inferiormente por otra constante positiva.
Entonces, $n^{1/2}P_n(\cos\theta) \ge C(\operatorname{sen}(\theta/2))^{-\alpha-1/2}$ y tomando $x = \cos\theta$,

$$n^{1/2}|P_n(x)| \ge C(1-x^2)^{-\alpha/2-1/4} \ge C'(1-x)^{-\alpha/2-1/4} \ge C''n^{\alpha+1/2}$$

para $n \ge n_0$ y $x \in \left[\cos\frac{(M+1/8)\pi}{n}, \cos\frac{M\pi}{n}\right] = I_n$.
Definamos ahora las funciones

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sig} Q_{n-1}(t)}{(1-t)^a(1+t)^b} & \text{si } 0 \le t \le \cos\frac{2M\pi}{n}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

siendo a y b tales que $\alpha - 2a = -1/2 = \beta - 2b$.
Así, cuando $x \in I_n$ y t lo tomamos en el soporte de f_n, tendremos



Utilicemos ahora el teorema 8.21.12 de Szegő [6], según el cual

$$\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta}P_n(\cos\theta) = N^{-\alpha}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\left(\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^{1/2}J_\alpha(N\theta) \\ + \begin{cases}\theta^{1/2}O(n^{-3/2}), & c/n \le \theta \le \pi/2, \\ \theta^{\alpha+2}O(n^{\alpha}), & 0 \le \theta \le c/n,\end{cases}$$

con $N = n + (\alpha + \beta + 1)/2$, c constante positiva y $J_\alpha(z)$ la función de Bessel.
Con esto, y por ser $0 < x - t < 1 - t < 1 - t^2$, haciendo el cambio de variable $t = \cos\theta$ es fácil demostrar

$$\begin{aligned} &|H(n^{1/2} f(t) Q_{n-1}(t)(1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta+1}, x)| \\ &\qquad = \left| \int_0^{\cos(2M\pi/n)} \frac{n^{1/2} |Q_{n-1}(t)| (1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta+1}}{(1-t)^a (1+t)^b (x-t)} \, dt \right| \\ &\geq K_1 \int_{2M\pi/n}^{\pi/2} n^{1/2} N^{-\alpha-1/2} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-1)!} |J_{\alpha+1}(N\theta)| (\operatorname{sen}\theta)^{-1/2} \, d\theta - K_2 \int_{2M\pi/n}^{\pi/2} n^{-1} \, d\theta. \end{aligned}$$

Además, según la expresión asintótica 1.71.7 de Szegő [6] para funciones de Bessel, por ser $N\theta \geq (n + (\alpha+\beta+1)/2)(2M\pi/n) \geq \operatorname{cte} M\pi$, para M suficientemente grande se tiene

$$|J_{\alpha+1}(N\theta)| \geq K (N\theta)^{-1/2} \left| \cos\left(N\theta - \frac{\theta\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right| - \frac{K}{(N\theta)^{3/2}}.$$

Combinando esto con la fórmula de Stirling se llega a

$$|H(n^{1/2} f(t) Q_{n-1}(t)(1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta+1}, x)| \geq K_1 \log n - K_2 n^{-1} - K_3 \geq C \log n.$$

Y por tanto

$$n^{1/2} |P_n(x)| |H(n^{1/2} f(t) Q_{n-1}(t)(1-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta+1}, x)| \geq C n^{\alpha+1/2} \log n \quad \text{para } x \in I_n.$$

Esta $Cn^{\alpha+1/2} \log n$ es lo que vamos a tomar como y.
Por otra parte, por ser $p = 4(\alpha+1)/(2\alpha+1)$, es fácil comprobar

$$\int_0^1 |f_n(t)|^p (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \, dt \leq C_1 \int_0^{\cos(2M\pi/n)} (1-t)^{-1} \, dt \leq C_2 \log n.$$

Y como la longitud del intervalo I_n es del orden cte/n^2, si fuese cierta la acotación débil se cumpliría

$$\begin{aligned} C_1 y^{-p} \log n &\geq C_2 y^{-p} \int_0^1 |f_n(t)|^p w(t) \, dt \\ &\geq \int_{|n^{1/2} P_n(x) H(f_n(t) n^{1/2} Q_{n-1}(t)(1-t^2) w(t), x)| > y} w(x) \, dx \\ &\geq \int_{I_n} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx \geq \operatorname{long}(I_n)(C_3/n^2)^\alpha \geq C_4 n^{-2-2\alpha} \end{aligned}$$

que, por ser $y = Cn^{\alpha+1/2} \log n$, se traduce en

$$n^{-2-2\alpha} \leq C (\log n)^{\frac{-2\alpha-3}{2\alpha+1}}$$

lo cual es absurdo por ser $(-2\alpha-3)/(2\alpha+1)$ negativo.

Bibliografía

[1] S. Chanillo, On the weak behaviour of partial sums of Legendre series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **268** (1981), 367–376.

[2] R. A. Hunt, B. Muckenhoupt y R. L. Wheeden, Weighted norm inequalities for the conjugate function and the Hilbert transform, *Trans. Amer. Math. Soc.* **176** (1973), 227–251.

[3] B. Muckenhoupt, Mean convergence of Jacobi series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (1969), 306–310.

[4] J. Newman y W. Rudin, Mean convergence of orthogonal series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 219–222.

[5] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series III, *Duke Math. J.* **16** (1949), 189–191.

[6] G. Szegő, "Orthogonal Polynomials", 3.ª ed. rev., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1959.