Capítulo 6

Cadenas de Markov (en tiempo discreto, con estados discretos).

Índice

1. Introducción.

¿Qué es un proceso estocástico? Damos aquí la famosa respuesta de R.A. Fisher: "What is a stochastic process? Oh, it's just one darn thing after another."

Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias $\{X_\theta\}$ definidas sobre un espacio de probabilidad común. La familia está indexada por un parámetro θ, donde θ pertenece a un conjunto de índices I.

En los ejemplos que trataremos, θ representará el tiempo. Si I es un conjunto de enteros, representando instantes de tiempo específicos, tenemos un proceso estocástico en tiempo discreto. Reemplazaremos el subíndice θ por n y hablaremos del proceso en tiempo discreto $\{X_n\}$.

Si I es la recta real (o algún intervalo de la recta real), tenemos un proceso estocástico en tiempo continuo y reemplazaremos el índice general θ por t. Cambiamos la notación, escribiendo $X(t)$.

Podría suceder también que θ fuera un vector. Sin embargo esto sucede muy ocasionalmente.

Cada variable aleatoria X_θ toma valores usualmente en un subconjunto de $\mathbb{R}$. En el contexto de los procesos estocásticos, cada valor que puede tomar una variable aleatoria se le denomina **estado**. El conjunto de estados puede ser discreto o continuo.

Por supuesto, aparte de clasificar los procesos en tiempo discreto o continuo se pueden clasificar según si el conjunto de estados es discreto o continuo.

Ejemplo. Sea el proceso estocástico discreto $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ del tiempo atmosférico del enésimo día. Supongamos que X_n toma valores en cuatro estados

$$E = \{soleado, ventoso, lluvioso, nublado\}.$$

Una realización de dicho proceso estocástico será cualquier sucesión: X_0 =soleado, X_1 =ventoso, X_2 =soleado, X_3 =lluvioso,...

Ejemplo. Sea X_n la ventas de un producto en en día n-ésimo, que pueden ser

$$E = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Uno puede tener la siguiente realización: $X_0 = 4$, $X_1 = 5$, $X_2 = 2$, $X_3 = 0$, $X_4 = 5$, ...

2. Cadenas de Markov.

Las cadenas de Markov deben su nombre al profesor Andrei A. Markov (1856-1922). En general, para un proceso a tiempo discreto, la variable aleatoria X_n depende de valores anteriores del proceso X_{n-1}, X_{n-2}, ... Por lo tanto estamos interesados en distribuciones condicionales del tipo $P(X_n|X_1, \ldots, X_{n-1})$.

Nosotros estudiaremos los procesos estocásticos que cumplen la **propiedad de Markov**:

$$P(X_n|X_1, \ldots, X_{n-1}) = P(X_n|X_{n-1}).$$

Un regla mnemónica informal para recordar la propiedad de Markov es ésta: "Dado el presente (X_{n-1}), el futuro (X_n) es independiente del pasado $(X_1, \ldots, X_{n-2})$". La propiedad de Markov es nombrada a veces como la propiedad de "falta de memoria".

Los procesos estocásticos que satisfacen la propiedad de Markov son típicamente mucho más simples de analizar que los procesos en general. Por supuesto, a la hora de modelizar cualquier sistema real será importante considerar si es verosímil que se cumpla la propiedad de Markov.

Ejemplo (Caminata aleatoria). Consideremos una persona que realiza un camino aleatorio sobre los números enteros, que forman el espacio de estados. Para cada unidad de tiempo la persona que se encuentra en el punto i da un paso hacia delante (+1) o hacia atrás (-1) con probabilidades respectivas p y $1-p$.

Ejemplo (El problema de marketing). En un pueblo sólo existen dos tipos de café: A y B. Cada habitante consume un café al día. Un estudio de marketing revela que una persona que consume el café A cambia de tipo de café en su siguiente consumición con probabilidad α (> 0). Por otro lado una persona que consume el café B cambia de tipo de café en su siguiente consumición con probabilidad $\beta > 0$. Hay dos preguntas que nos podemos plantear. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que pide café A, lo pida también n días más tarde? ¿Cuál es la proporción de tipos de café que deberá encargar el bar del pueblo a largo plazo?

Si las probabilidades condicionales $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$ son independientes del índice temporal n, diremos que la cadena de Markov es **homogénea** y denotamos

$$p_{ij} := P(X_{n+1} = j|X_n = i)$$

para todo $i, j \in E$.

Toda cadena de Markov puede transformarse en una homogénea transformando el conjunto de estados en un espacio producto que incluya el tiempo. Por tanto, sólo consideraremos cadenas homogéneas y omitiremos el adjetivo de "homogéneo". De hecho, muchas veces ésta es la definición que se da de cadenas de Markov.

La probabilidad p_{ij} representa la probabilidad de que el proceso haga una transición desde el estado i al estado j. Por tanto, $p_{ij} \geq 0$ y para i fijo $\sum_{j\in E} p_{ij} = 1$.

Definición 1. La matriz formada por las probabilidades de transición p_{ij}

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

se le llama **matriz de transición de un paso** del proceso de Markov.

A una matriz finita o infinita $P = (p_{ij})_{i,j\in E}$ que cumpla que sus elementos son no negativos y que cada fila suma uno se le llama matriz estocástica. Por tanto, las matrices de transición de un paso son matrices estocásticas.

Ejemplo (el problema de marketing). La variables aleatorias X_n pueden tomar dos estados: A y B o también $\{0, 1\}$. Diremos que $X_n = 0$ si el consumidor toma café de tipo A el día n-ésimo y $X_n = 1$ si toma café de tipo B el día n-ésimo. Es fácil comprobar que las probabilidades de transición son: $p_{00} = 1-\alpha$, $p_{01} = \alpha$, $p_{10} = \beta$ y $p_{11} = 1-\beta$. Por tanto, la matriz de transición de un paso es:

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Ejemplo (camino aleatorio). El espacio de estados es $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Una persona que se encuentra en el estado i, en el siguiente paso está en el estado $i+1$ con una probabilidad p, o en el $i-1$ con probabilidad $1-p$. Por tanto, las probabilidades de transición son $\forall i \in \mathbb{Z}$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1-p$, $p_{i,j} = 0$ $\forall j \neq i \pm 1$.

$$P = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & p & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 1-p & 0 & p & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 1-p & 0 & p & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 1-p & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Ejemplo (La ruina del jugador). Un jugador juega una repetidas veces a distintos juegos en los que gana un dólar con probabilidad p o pierde un dólar con probabilidad $1-p$. Para de jugar cuando pierde todo su dinero o bien gana un total de N dólares. Considerando el dinero del jugador en cada momento como estados, entonces el proceso es una cadena de Markov. Ademas, tenemos las probabilidades de transición

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \\ 1-p & \text{si } j = i-1 \end{cases} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, N-1,$$

y $p_{00} = p_{NN} = 1$. $p_{ij} = 0$ en otro caso. A los estados 0 y N se les llama **estados absorbentes**. El proceso permanecerá en cero o N para siempre una vez que dicho estado haya sido alcanzado. La ruina del jugador es un ejemplo de camino aleatorio con extremos absorbentes.

3. La matriz de transición de n pasos.

En la sección anterior hemos definido la matriz de probabilidades de transición de un paso. En esta sección vamos a investigar la probabilidad de una transición de n pasos en un proceso de Markov.

Definición 2. Definimos p_{ij}^n como la probabilidad de que un proceso en el estado i se encuentre en el estado j después de n pasos.

Proposición 1. La matriz de probabilidades de transición de n pasos P^n es $\overbrace{P \cdot P \cdots P}^{n \text{ veces}}$.

Demostración.

Por convenio, elegimos $P^0 = I$. Tiene sentido, ya que p_{ij}^0 es la probabilidad que que un elemento que se encuentre en el estado i, pase al estado j en cero transiciones. Es decir, $p_{ii}^0 = 1$, $p_{ij}^0 = 0$ si $i \neq j$.

Ejemplo. Consideremos el problema de marketing otra vez. En el modelo tenemos

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha = 0{,}3$ y $\beta = 0{,}4$ entonces tenemos

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0{,}5749 & 0{,}4351 \\ 0{,}5668 & 0{,}4332 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que un consumidor está en estado 0 si consume café de tipo A. $p_{00}^4 = 0{,}5749$ es la probabilidad de que un consumidor de café de tipo A lo consuma 4 días más tarde. Y p_{01}^4 es la probabilidad de que un consumidor de café de tipo A, tome café de tipo B cuatro días más tarde.

Nota. Como consecuencia de Proposición 1, se tiene que para todo $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $P^{m+n} = P^m \cdot P^n$. Es decir, si E es el conjunto de estados, para cualquier $i, j \in E$, $p_{ij}^{m+n} = \sum_{k \in E} p_{ik}^m p_{kj}^n$. Esta relación se conoce como **ecuación de Chapman-Kolmogorov**.

Supongamos en general que un proceso de Markov tiene estados $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Hasta el momento hemos considerado que en tiempo $n = 0$, el proceso estaba en el estado i_0. Es decir, en una realización particular del experimento de Markov, $X_0 = i_0$. ¿Qué pasa si consideramos ahora que el proceso está en un estado i con probabilidad a_i. O lo que es equivalente, que en infinitas realizaciones del proceso de Markov, los individuos se encuentran para tiempo cero en el estado i con probabilidad a_i. O lo que es lo mismo, que la función de masa de la variable aleatoria X_0 viene dada por $P(X_0 = i) = a_i$.

En este contexto, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que el proceso esté en el estado j después de n transiciones? Sabemos que, dado un proceso en estado i, la probabilidad de que esté en el estado j tras n transiciones es $p_{ij}^n = P(X_n = j | X_0 = i)$. Por tanto, la probabilidad que buscamos es

$$P(X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_0 = i) \cdot P(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot p_{ij}^n \tag{6.1}$$

Así, si llamamos $\tilde{X}_n$ al vector fila que dado por la función de masas de la variable aleatoria X_n, es decir $\tilde{X}_n := (P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2), \ldots)$. Notar que $\tilde{X}_0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ y por (6.1).

$$\tilde{X}_n = (a_0, a_1, a_2, \ldots)P^n = \tilde{X}_0 P^n.$$

De esta ecuación también se deduce que

$$\tilde{X}_{n+k} = \tilde{X}_k P^n.$$

Ejemplo. En el problema de marketing, si para tiempo $n = 0$ un consumidor toma café tipo "B", podemos representar esta información como

$$\tilde{X}_0 = (0, 1).$$

¿Qué pasará dentro de 4 días?

$$\tilde{X}_4 = (0, 1)P^4 = (0, 1)\begin{pmatrix} 0{,}5749 & 0{,}4351 \\ 0{,}5668 & 0{,}4332 \end{pmatrix} = (0{,}5668, 0{,}4332).$$

Esto significa que con una probabilidad de 0,4332 sigue tomando café B, y con 0,5668 toma café A.

4. Clasificación de estados

Definición 3. En una cadena de Markov, un estado j se dice **alcanzable** desde un estado i si $p_{ij}^n > 0$ para algún $n \geq 0$. Esto significa que empezando desde el estado i, es posible (con probabilidad positiva) entrar en el estado j en un número finito de transiciones. Se denota $i \to j$.

Definición 4. Se dice que los estados i y j **se comunican** si cada estado es alcanzable desde el otro. Es decir, $i \to j$ y $j \to i$. Se denota por $i \leftrightarrow j$.

Comentario. La relación de comunicación define una relación de equivalencia.

1. Reflexiva. El estado i se comunica con el estado i ya que $p_{ii}^0 = 1$.

2. Simétrica. Obvio por la definición.

3. Transitiva. Si $i \to j$ y $j \to k$, entonces existe $p_{ij}^n > 0$ y $p_{jk}^m > 0$. Así $0 < p_{ij}^n p_{jk}^m \leq \sum_{h \in E} p_{ih}^n p_{hk}^m = p_{ik}^{n+m}$. Por tanto, el estado k es alcanzable desde el estado i. Intercambiando los papeles de i y k, el estado i es alcanzable desde k.

Definición 5. A dos estados que se comunican se dice que están en la misma **clase**. Una cadena de Markov es **irreducible** si todos los estados pertenecen a la misma clase, esto es, todos se comunican entre sí.

Ejemplo. Considera la matriz de probabilidades de transición

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo.

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que desde los estados 1, 2, 3, no es posible visitar el estado 0, esto es: $p_{10}^n = 0$, $p_{20}^n = 0$, $p_{30}^n = 0$ para todo n. Por tanto, la cadena de Markov no es irreducible.

Definición 6. Una **clase** de comunicación C se dice **cerrada** si para cualquier par de estados $i \in C$, $j \notin C$, se tiene que $p_{ij} = 0$. Es decir, desde cualquier estado dentro de C no se puede alcanzar ningún estado de fuera de C.

Definición 7. Para cualquier estado i en una cadena de Markov, sea f_i la probabilidad de que empezando en el estado i, el proceso vuelva a pasar alguna vez por el estado i. el estado i se dice **recurrente** (o persistente) si $f_i = 1$ y **transitorio** si $f_i < 1$.

A continuación veremos una caracterización de los estados recurrentes:

Proposición 2. En una cadena de Markov, un estado i es recurrente si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n = \infty.$$

Usando la proposición anterior podemos probar

Proposición 3. En una cadena de Markov, si el estado i es recurrente (transitorio) e $i \leftrightarrow j$, entonces el estado j es también recurrente (transitorio).

Proposición 4. Una clase de comunicación formada por estados recurrentes, tiene que ser cerrada.

Definición 8. Un estado i recurrente se dice absorbente si $p_{ii} = 1$.

Ejercicio. Análisis de un camino aleatorio.
Consideremos el ejemplo clásico de un camino aleatorio. Una persona ejecuta un camino aleatorio en la red de enteros. En cada paso, la persona en el estado i puede moverse un paso adelante $(+1)$ o hacia atrás (-1) con probabilidades p $(0 < p < 1)$ y $1 - p$ respectivamente.

5. Cadenas de Markov absorbentes.

Definición 9. Un estado i de una cadena de Markov se dice absorbente si es imposible abandonarlo (e.d. $p_{ii} = 1$). Es, por tanto, un tipo particular de estado recurrente.

Una cadena de Markov se dice absorbente si posee al menos un estado absorbente y desde cada estado es posible llegar al estado absorbente (no necesariamente en un paso).

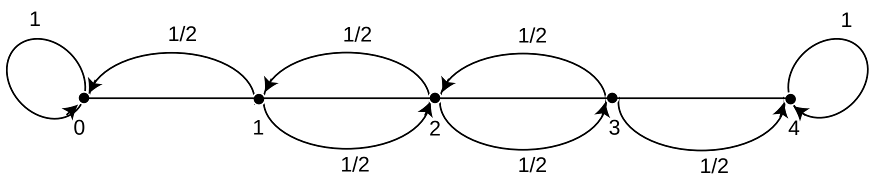
Comentario. Se puede ver que en una cadena absorbente, todos los estados que no son absorbentes son transitorios.

Ejemplo. Supongamos el caso de la ruina del jugador. Éste juega a un juego que tiene probabilidad 1/2 de ganar un dólar y probabilidad 1/2 de perderlo. Parará cuando se quede sin dinero o cuando alcance 4 dólares.

La matriz de transición es:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Desde cualquiera de los estados 1, 2 y 3 es posible alcanzar en un número finito de pasos los estados absorbentes 0 y 4. Por tanto, la cadena es absorbente. Los estados 1, 2 y 3 son transitorios.



La pregunta más obvia que se puede hacer en este tipo de cadenas es: ¿cuál es la probabilidad de que el proceso alcance alguna vez un estado absorbente? Otras preguntas interesantes son:

a) Dado un estado absorbente, ¿cuál es la probabilidad de que el proceso finalice precisamente en dicho estado?

b) ¿En promedio, cuánto le costará al proceso ser absorbido?

c) En promedio, ¿cuántas veces pasará el proceso por cada estado transitorio?

Las respuestas a estas preguntas dependerán en general no sólo de las probabilidades de transición, sino también del estado en el que se encuentre el proceso al empezar.

En realidad, ya podemos contestar a la primera de las preguntas.

Teorema 1. En una cadena de Markov absorbente, la probabilidad de estar en un estado transitorio después de n pasos tiende a cero cuando $n \to \infty$. De aquí se sigue que en una cadena de Markov absorbente con un número finito de estados, la probabilidad de que el proceso sea absorbido es 1.

5.1. Forma canónica y matriz fundamental. Número medio de pasos por un estado.

Consideremos cualquier cadena de Markov arbitraria. Reenumeramos los estados para poner los transitorios primero. Si hay r estados absorbentes y t transitorios la matriz de probabilidades de transición tendrá la siguiente **forma canónica**:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \scriptstyle TR. & \scriptstyle ABS. \end{array} \\ \begin{array}{c} \scriptstyle TR. \\ \scriptstyle ABS. \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \end{array}$$

Aquí I es la matriz identidad de orden r, 0 es una matriz nula $r \times t$, R es una matriz $t \times r$ y Q es una matriz $t \times t$.

Multiplicando por bloques tenemos que P^n es de la forma

$$P^n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \scriptstyle TR. & \scriptstyle ABS. \end{array} \\ \begin{array}{c} \scriptstyle TR. \\ \scriptstyle ABS. \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} Q^n & \widetilde{R} \\ \hline 0 & I \end{array}\right) \end{array}$$

donde $\widetilde{R}$ está en función de R y Q (es irrelevante lo que sea). Cada entrada de Q^n corrresponde a la probabilidad de estar en un estado transitorio después de n pasos, y por tanto, por el teorema anterior, tiende a cero. Es decir, $Q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Teorema 2. Para una cadena de Markov absorbente, la matriz $I-Q$ tiene una inversa: N, que se le llama matriz fundamental. La entrada ij de la matriz N: n_{ij} es el número de veces esperado que la cadena pasa por el estado j, dado que empiece en el estado i. Si $i = j$, el estado inicial se cuenta.

Ejemplo. Continuamos con el ejemplo anterior. La matriz de transición en forma canónica es:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

De aquí vemos que la matriz Q es:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que la matriz Q también puede ser obtenida sin pasar por la matriz en forma canónica. Simplemente hay que eliminar de la matriz de transiciones las filas y columnas correspondientes a estados absorbentes.

$$I - Q = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando su inversa $(I-Q)^{-1}$ tenemos

$$N = (I-Q)^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

De esta matriz podemos deducir, por ejemplo, que si empezamos en el estado 2, el número esperado de pasos en los estados 1 2 y 3 antes de ser absorbido son 1, 2 y 1.

5.2. Tiempo de absorción.

Ahora contestemos a la siguiente pregunta referida al ejemplo anterior. Si empezamos en el estado 2, ¿Cuál es en media el tiempo en ser absorbido? Parece lógico que sea $1 + 2 + 1 = 4$.

Teorema 3. Dada una cadena que empieza en el estado s_i, denotamos por t_i el tiempo promedio del número de pasos antes de que la cadena sea absorbida (i.e., el tiempo medio de absorción de todas las posibles realizaciones de una cadena que empieza en s_i). t_i se obtiene sumando todos los elementos de la fila i-ésima de la matriz fundamental del proceso.

5.3. Probabilidades de absorción.

Teorema 4. Llamamos b_{ij} a la probabilidad de que dada una cadena absorbente que empieza en el estado transitorio s_i, una realización de dicha cadena sea absorbida por el estado absorbente s_j. sea B la matriz con entradas b_{ij}. Entonces B es una matriz $t \times r$ y

$$B = NR,$$

donde N es la matriz fundamental y R es el bloque que nombramos en la forma canónica.

Ejemplo. Continuando el ejemplo anterior de la ruina del jugador

$$N = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}; \qquad R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Por tanto,

$$B = NR = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Esto quiere decir que si empezamos desde el estado 1, hay probabilidad 3/4 de quedar absorbidos por 0 y 1/4 de terminar absorbidos por 1.

6. Cadenas de Markov irreducibles.

Definición 10. Una cadena de Markov se dice **irreducible** si todos los estados se comunican entre sí. Esto es, es posible ir desde cualquier estado hasta cualquier otro estado (no necesariamente en un paso).

6.1. Equilibrio

Definición 11. Dada una cadena de Markov con un número finito de estados, un vector

$$\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{k-1})$$

se dice que es una **distribución estacionaria** de una cadena de Markov finita si satisface

1. $\pi_i \geq 0$ y $\sum_{i=0}^{k-1} \pi_i = 1$.
2. $\pi P = \pi$, esto es $\pi_i = \sum_{j=0}^{k-1} p_{ji}\pi_j$ o lo que es lo mismo $P^T \pi^T = \pi^T$.

Proposición 5. Para cualquier cadena de Markov irreducible con un número finito de estados, existe una única distribución estacionaria.

Ejemplo. Recordemos el problema de marketing otra vez. La matriz de transiciones viene dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta. \end{pmatrix}$$

Es trivial que es irreducible y aperiódica. Para calcular la distribución estacionaria (π_0, π_1) resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{lll} (1-\alpha)\pi_0 & +\beta\pi_1 & = \pi_0 \\ \alpha\pi_0 & +(1-\beta)\pi_1 & = \pi_1 \\ \pi_0 & +\pi_1 & = 1 \end{array}$$

Resolvemos el sistema y tenemos $\pi_0 = \beta/(\alpha+\beta)$, $\pi_1 = \alpha/(\alpha+\beta)$.

Interpretemos ahora el significado de la distribución estacionaria.

El hecho de que $\pi P = \pi$ nos indica que si en nuestro tiempo de partida podemos estar en el estado s_i con una probabilidad de π_i (es decir, $\tilde{X}_0 = \pi$), entonces, en cualquier instante de tiempo $\tilde{X}_n = \pi$. El proceso es estacionario, esto es, que aunque cada realización particular de la cadena esté cambiando de estado a lo largo del tiempo, desde el punto de vista macroscópico (infinitas realizaciones independientes del proceso), el proceso se mantiene en equilibrio.

Una consecuencia de la ley de grandes números para las cadenas de Markov irreducibles puede escribirse así.

Teorema 5. Con toda probabilidad, la **proporción de tiempo que la cadena pasa en el estado** s_j tiende a π_j, independientemente del estado de partida.

Ejemplo. En el problema de Marketing con parámetros $\alpha = 0{,}3$ y $\beta = 0{,}4$, la matriz de transición es

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Su distribución de equilibrio era $\pi = (\pi_A, \pi_B) = (4/7, 3/7)$. El teorema anterior afirma que un individuo que realice este problema de Marketing, a largo plazo un 57.14 % de los días toma café de tipo A y un 42.86 % de los días toma café de tipo B ($4/7 \approx 0{,}5714$).

6.2. Tiempos medios en cadenas irreducibles

En esta sección consideramos dos cantidades de interés: el tiempo medio de volver a un estado y el tiempo medio de ir de un estado a otro estado.

Sea P la matriz de transición de una cadena irreducible con estados $s_1, \ldots, s_r$. Sea $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_r)$. Entonces, como consecuencia de la ley de grandes números, para tiempo infinito el proceso habrá pasado una fracción π_j de tiempo en el estado s_j. Por tanto, empezando desde cualquier estado, la cadena alcanzará en algún momento el estado s_j. Es más, estará en el estado s_j infinitas veces.

Definición 12. En una cadena de Markov irreducible que empieza en el estado s_i, el número esperado de pasos para alcanzar el estado s_j es llamado el **tiempo medio de paso desde** s_i **a** s_j. Se denota por m_{ij}. Por convenio $m_{ii} = 0$.

Un modo de ver el problema del primer paso es el siguiente. Crear otra cadena transformando el estado s_j en absorbente, esto es, definiendo $p_{jj} = 1$. Si empezamos desde otro estado distinto de s_j, el nuevo proceso se comportará exactamente igual que el original hasta que se alcance el estado s_j por primera vez. como la cadena era irreducible, se podía alcanzar s_j desde cualquier estado, por tanto, la cadena resultante es absorbente con un único estado absorbente s_j, que será alcanzado alguna vez.

Así, la matriz fundamental N tenía como componentes la esperanza del número de pasos en cada estado antes de la absorción. Así, la suma de los elementos de su fila i-ésima, nos da el tiempo medio de absorción si partimos del estado s_i.

Definición 13. Llamamos matriz fundamental de una cadena irreducible a $Z := (I - P + W)^{-1}$, donde W es la matriz cuyas filas forman la distribución estacionaria.

El siguiente teorema nos muestra un método alternativo para calcular los tiempos esperados de primer paso.

Teorema 6. Los tiempos medios de primer paso de una cadena irreducible son:

$$m_{ij} = \frac{z_{jj} - z_{ij}}{\pi_j}.$$

La demostración está en el libro de Grinstead-Snell, páginas 455-460.

Una cantidad relacionada con el tiempo medio de primer paso es el tiempo medio de recurrencia, definido como sigue. Asumamos que empezamos en el estado s_i, consideremos la longitud de tiempo hasta que volvemos hasta el estado s_i la primera vez. Es claro que vamos a volver, por que en el primer paso, o bien permanecemos en el estado s_i o bien vamos a otro estado s_j y desde cualquier otro estado s_j en algún momento alcanzaremos s_i porque la cadena es irreducible.

Definición 14. Si una cadena irreducible empieza en el estado s_i, el número esperado (media) de pasos de retorno a s_i por primera vez es el **tiempo medio de recurrencia para** s_i. Se denota por r_i.

Teorema 7. Para una cadena irreducible, el tiempo medio de recurrencia para un estado s_i es $r_i = 1/\pi_i$, donde π_i es la i-ésima componente de la distribución estacionaria asociada.

Corolario 1. Para una cadena irreducible, su distribución estacionaria es estrictamente positiva.

Corolario 2. Un estado s_i se dice positivo recurrente si el tiempo esperado de recurrencia es finito. Por tanto, en una cadena irreducible finita, todos los estados son positivos recurrentes.

6.3. Cadenas regulares.

Definición 15. Llamaremos periodo de un estado i a $d = \text{m. c. d.}\{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^n > 0\}$. Un estado i se dice aperiódico si $d = 1$ (también se dice aperiódico si $p_{ii}^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$). En caso contrario, el estado se dice periódico con periodo $d \geq 2$.

Se puede ver que el periodo de un estado i es el mayor número d que verifica que sólo se puede dar una vuelta de i a i en múltiplos de d.

Ejemplo. Sea la matriz de probabilidad de transiciones

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } n \text{ es par y } P^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ es impar.}$$

entonces $p_{00}^{2k+1} = p_{11}^{2k+1} = 0$. Así, ambos estados 0 y 1 tienen periodo 2.

Definición 16. Una cadena de Markov se dice regular si alguna potencia de la matriz de transición tiene sólo elementos estrictamente positivos.

En otras palabras, para algún n, es posible ir desde un estado hasta cualquier otro estado en exactamente n pasos.

Proposición 6. En una cadena de Markov finita:
La cadena es regular $\Leftrightarrow$ la cadena es irreducible y todos sus estados son aperiódicos.

Ejemplo. Consideremos la urna de Ehrenfest con 4 bolas. Su matriz de transiciones de un paso es:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si empezamos desde el estado 0 estaremos en un número par de pasos en los estados 0, 2 o 4, y después de un número impar de pasos en los estados 1 ó 3. Por tanto, el estado 0 tiene periodo dos, y aunque es irreducible, no es regular.

Ejemplo. Consideremos ahora el problema de marketing con $\tilde{X}_0 = (1,0)$. Notar que

$$\tilde{X}_1 = \tilde{X}_0 P = (1,0)\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = (0{,}7, 0{,}3)$$

$$\tilde{X}_2 = \tilde{X}_0 P^2 = (1,0)\begin{pmatrix} 0{,}61 & 0{,}39 \\ 0{,}52 & 0{,}48 \end{pmatrix} = (0{,}61, 0{,}39)$$

$$\tilde{X}_4 = \tilde{X}_0 P^4 = (1,0)\begin{pmatrix} 0{,}5749 & 0{,}4251 \\ 0{,}5668 & 0{,}4332 \end{pmatrix} = (0{,}5749, 0{,}4251)$$

$$\tilde{X}_8 = \tilde{X}_0 P^8 = (1,0)\begin{pmatrix} 0{,}5715 & 0{,}4285 \\ 0{,}5714 & 0{,}4286 \end{pmatrix} = (0{,}5715, 0{,}4285)$$

$$\tilde{X}_{16} = \tilde{X}_0 P^{16} = (1,0)\begin{pmatrix} 0{,}5714 & 0{,}4286 \\ 0{,}5714 & 0{,}4286 \end{pmatrix} = (0{,}5714, 0{,}4286)$$

Parece que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{X}_n = (0{,}57\ldots, 0{,}42\ldots).$$

De hecho, este límite existe y ¡es independiente de $\tilde{X}_0$! Significa que a largo plazo, la probabilidad de que un consumidor en el día n tome café A es 0,57 y tipo B: 0,42.

Notemos que $\tilde{X}_n = \tilde{X}_{n-1}P$. Por tanto, si

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{X}_n = \pi,$$

entonces

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \tilde{X}_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{X}_{n-1}P = \pi P.$$

Teorema 8. Para cualquier cadena de Markov finita (con k estados) irreducible y aperiódica, para cada distribución inicial $\tilde{X}_0$

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{X}_n - \pi\| = \lim_{n\to\infty} \|\tilde{X}_0 P^n - \pi\| = 0,$$

donde π es la distribución estacionaria para la matriz de transiciones P.