Aplicación del Álgebra Homológica para la detección de errores en cálculos topológicos

Ana Romero
Universidad de La Rioja

Congreso de jóvenes investigadores RSME
7 septiembre 2015

Problema general

Problema general

Frente a un problema matemático complejo:

Problema general

Frente a un problema matemático complejo:

- Razonamiento teórico

Problema general

Frente a un problema matemático complejo:

- Razonamiento teórico
- Cálculos con ordenador

Problema general

Frente a un problema matemático complejo:

- Razonamiento teórico
- Cálculos con ordenador
    - Obtener resultados desconocidos

Problema general

Frente a un problema matemático complejo:

- Razonamiento teórico
- Cálculos con ordenador
  - Obtener resultados desconocidos
  - Comprobar resultados "esperables"

Problema general

Frente a un problema matemático complejo:

- Razonamiento teórico
- Cálculos con ordenador
    - Obtener resultados desconocidos
    - Comprobar resultados "esperables"
    - Producir cálculos intermedios

Cálculos con ordenador. Corrección

Cálculos con ordenador. Corrección

Desarrollo de programas, ¿cómo estar seguros de su corrección?

Cálculos con ordenador. Corrección

Desarrollo de programas, ¿cómo estar seguros de su corrección?

- Verificación automática

Cálculos con ordenador. Corrección

Desarrollo de programas, ¿cómo estar seguros de su corrección?

- Verificación automática
- Testeo.

Cálculos con ordenador. Corrección

Desarrollo de programas, ¿cómo estar seguros de su corrección?

- Verificación automática
- Testeo. Tres posibles situaciones:

Cálculos con ordenador. Corrección

Desarrollo de programas, ¿cómo estar seguros de su corrección?

- Verificación automática
- Testeo. Tres posibles situaciones:
  - Los resultados coinciden

Cálculos con ordenador. Corrección

Desarrollo de programas, ¿cómo estar seguros de su corrección?

- Verificación automática
- Testeo. Tres posibles situaciones:
  - Los resultados coinciden
  - Se obtienen algunos resultados que no se conocían

Cálculos con ordenador. Corrección

Desarrollo de programas, ¿cómo estar seguros de su corrección?

- Verificación automática
- Testeo. Tres posibles situaciones:
  - Los resultados coinciden
  - Se obtienen algunos resultados que no se conocían
  - Los resultados NO coinciden

Cálculos con ordenador. Corrección

Cálculos con ordenador. Corrección

¿Qué hacemos en la tercera situación?

Cálculos con ordenador. Corrección

¿Qué hacemos en la tercera situación?

Si los resultados no coinciden:

Cálculos con ordenador. Corrección

¿Qué hacemos en la tercera situación?

Si los resultados no coinciden:

1. Pensamos que nuestro programa es incorrecto y buscamos el error

Cálculos con ordenador. Corrección

¿Qué hacemos en la tercera situación?

Si los resultados no coinciden:

1. Pensamos que nuestro programa es incorrecto y buscamos el error
2. Seguimos pensando que nuestro programa es incorrecto y seguimos buscando el error

Cálculos con ordenador. Corrección

¿Qué hacemos en la tercera situación?

Si los resultados no coinciden:

1. Pensamos que nuestro programa es incorrecto y buscamos el error
2. Seguimos pensando que nuestro programa es incorrecto y seguimos buscando el error
3. ...

Cálculos con ordenador. Corrección

¿Qué hacemos en la tercera situación?

Si los resultados no coinciden:

1. Pensamos que nuestro programa es incorrecto y buscamos el error
2. Seguimos pensando que nuestro programa es incorrecto y seguimos buscando el error
3. ...
4. Repasamos los cálculos teóricos, por si acaso...

Cálculos con ordenador. Corrección

¿Qué hacemos en la tercera situación?

Si los resultados no coinciden:

1. Pensamos que nuestro programa es incorrecto y buscamos el error
2. Seguimos pensando que nuestro programa es incorrecto y seguimos buscando el error
3. . . .
4. Repasamos los cálculos teóricos, por si acaso...
5. ¿Y si "casualmente" estaba mal el resultado teórico?

Nuestro caso

Nuestro caso

Por un lado:

Nuestro caso

Por un lado:

On homotopy groups of the suspended classifying spaces
Roman Mikhailov and Jie Wu
Algebraic and Geometric Topology 10(2010), 565 – 625

Nuestro caso

Por un lado:

On homotopy groups of the suspended classifying spaces
Roman Mikhailov and Jie Wu
Algebraic and Geometric Topology 10(2010), 565 – 625

en el que se calcula $\pi_n(\Sigma K(G,1))$ para $n = 4, 5$ y distintos grupos G.

Nuestro caso

Por un lado:

On homotopy groups of the suspended classifying spaces
Roman Mikhailov and Jie Wu
Algebraic and Geometric Topology 10(2010), 565 – 625

en el que se calcula $\pi_n(\Sigma K(G,1))$ para $n = 4, 5$ y distintos grupos G.

Por otro lado:

Nuestro caso

Por un lado:

On homotopy groups of the suspended classifying spaces
Roman Mikhailov and Jie Wu
Algebraic and Geometric Topology 10(2010), 565 – 625

en el que se calcula $\pi_n(\Sigma K(G,1))$ para $n = 4, 5$ y distintos grupos G.

Por otro lado:

Nuevo módulo del sistema Kenzo para el cálculo de homología de grupos

Nuestro caso

Por un lado:

On homotopy groups of the suspended classifying spaces
Roman Mikhailov and Jie Wu
Algebraic and Geometric Topology 10(2010), 565 – 625

en el que se calcula $\pi_n(\Sigma K(G,1))$ para $n = 4, 5$ y distintos grupos G.

Por otro lado:

Nuevo módulo del sistema Kenzo para el cálculo de homología de grupos

Graham Ellis nos propone aplicar nuestro programa para el cálculo de grupos de homotopía de espacios clasificantes suspendidos tratando de obtener como casos particulares los resultados de Mikhailov y Wu.

Nuestro caso

Nuestro caso

Comparamos los resultados del artículo con los de nuestros programas y:

Nuestro caso

Comparamos los resultados del artículo con los de nuestros programas y:

- Algunos resultados coinciden (por ejemplo $\pi_*(\Sigma K(A,1))$ para distintos grupos abelianos finitamente generados)

Nuestro caso

Comparamos los resultados del artículo con los de nuestros programas y:

- Algunos resultados coinciden (por ejemplo $\pi_*(\Sigma K(A,1))$ para distintos grupos abelianos finitamente generados)
- Obtenemos algunos cálculos que no aparecen en el artículo de Mikhailov y Wu ($\pi_6(\Sigma K(G,1))$ para algunos grupos y $\pi_n(\Sigma K(G,1))$ para otros grupos no abelianos que no se consideran en el artículo)

Nuestro caso

Comparamos los resultados del artículo con los de nuestros programas y:

- Algunos resultados coinciden (por ejemplo $\pi_*(\Sigma K(A, 1))$ para distintos grupos abelianos finitamente generados)
- Obtenemos algunos cálculos que no aparecen en el artículo de Mikhailov y Wu ($\pi_6(\Sigma K(G, 1))$ para algunos grupos y $\pi_n(\Sigma K(G, 1))$ para otros grupos no abelianos que no se consideran en el artículo)
- Aparece una discrepancia:

  Theorem 5.4: *Let A_4 be the 4-th alternating group.*
  Then $\pi_4(\Sigma K(A_4, 1)) = \mathbb{Z}_4$

  pero nosotros obtenemos $\pi_4(\Sigma K(A_4, 1)) = \mathbb{Z}_{12}$

Nuestro caso

Comparamos los resultados del artículo con los de nuestros programas y:

- Algunos resultados coinciden (por ejemplo $\pi_*(\Sigma K(A,1))$ para distintos grupos abelianos finitamente generados)
- Obtenemos algunos cálculos que no aparecen en el artículo de Mikhailov y Wu ($\pi_6(\Sigma K(G,1))$ para algunos grupos y $\pi_n(\Sigma K(G,1))$ para otros grupos no abelianos que no se consideran en el artículo)
- Aparece una discrepancia:

  Theorem 5.4: *Let A_4 be the 4-th alternating group. Then $\pi_4(\Sigma K(A_4,1)) = \mathbb{Z}_4$*

  pero nosotros obtenemos $\pi_4(\Sigma K(A_4,1)) = \mathbb{Z}_{12}$

Al principio pensamos que hay un error en nuestros programas.

Nuestro caso

Comparamos los resultados del artículo con los de nuestros programas y:

- Algunos resultados coinciden (por ejemplo $\pi_*(\Sigma K(A, 1))$ para distintos grupos abelianos finitamente generados)
- Obtenemos algunos cálculos que no aparecen en el artículo de Mikhailov y Wu ($\pi_6(\Sigma K(G, 1))$ para algunos grupos y $\pi_n(\Sigma K(G, 1))$ para otros grupos no abelianos que no se consideran en el artículo)
- Aparece una discrepancia:

  Theorem 5.4: *Let A_4 be the 4-th alternating group.*
  Then $\pi_4(\Sigma K(A_4, 1)) = \mathbb{Z}_4$

  pero nosotros obtenemos $\pi_4(\Sigma K(A_4, 1)) = \mathbb{Z}_{12}$

Al principio pensamos que hay un error en nuestros programas. Después repasamos la demostración de Mikhailov y Wu, y con la ayuda de Francis Sergeraert advertimos que está mal y nuestro resultado es el correcto.

Nuestro caso

Comparamos los resultados del artículo con los de nuestros programas y:

- Algunos resultados coinciden (por ejemplo $\pi_*(\Sigma K(A,1))$ para distintos grupos abelianos finitamente generados)
- Obtenemos algunos cálculos que no aparecen en el artículo de Mikhailov y Wu ($\pi_6(\Sigma K(G,1))$ para algunos grupos y $\pi_n(\Sigma K(G,1))$ para otros grupos no abelianos que no se consideran en el artículo)
- Aparece una discrepancia:

  Theorem 5.4: *Let* A_4 *be the* 4*-th alternating group.*
  Then $\pi_4(\Sigma K(A_4,1)) = \mathbb{Z}_4$

  pero nosotros obtenemos $\pi_4(\Sigma K(A_4,1)) = \mathbb{Z}_{12}$

Al principio pensamos que hay un error en nuestros programas. Después repasamos la demostración de Mikhailov y Wu, y con la ayuda de Francis Sergeraert advertimos que está mal y nuestro resultado es el correcto.

Los autores reconocen el error; dicen que habían olvidado la componente 3-primaria.

Grupos de homotopía de espacios clasif. suspendidos

Grupos de homotopía de espacios clasif. suspendidos

El funtor suspensión Σ eleva los grupos de homología:
$H_n(\Sigma X) \cong H_{n-1}(X)$.

Grupos de homotopía de espacios clasif. suspendidos

El funtor suspensión Σ eleva los grupos de homología: $H_n(\Sigma X) \cong H_{n-1}(X)$. Sin embargo, para el caso de los grupos de homotopía la situación no es tan favorable y en general no hay una relación directa entre $\pi_*(\Sigma X)$ y $\pi_*(X)$.

Grupos de homotopía de espacios clasif. suspendidos

El funtor suspensión Σ eleva los grupos de homología: $H_n(\Sigma X) \cong H_{n-1}(X)$. Sin embargo, para el caso de los grupos de homotopía la situación no es tan favorable y en general no hay una relación directa entre $\pi_*(\Sigma X)$ y $\pi_*(X)$.

Ejemplo: $X = S^1$ y $\Sigma S^1 = S^2$

Grupos de homotopía de espacios clasif. suspendidos

El funtor suspensión Σ eleva los grupos de homología: $H_n(\Sigma X) \cong H_{n-1}(X)$. Sin embargo, para el caso de los grupos de homotopía la situación no es tan favorable y en general no hay una relación directa entre $\pi_*(\Sigma X)$ y $\pi_*(X)$.

Ejemplo: $X = S^1$ y $\Sigma S^1 = S^2$

Dado un grupo G, su espacio clasificante $K(G, 1)$ tiene grupos de homotopía sencillos:

$$\pi_1(K(G,1)) \cong G \text{ y } \pi_n(K(G,1)) = 0 \text{ si } n \neq 1$$

Grupos de homotopía de espacios clasif. suspendidos

El funtor suspensión Σ eleva los grupos de homología: $H_n(\Sigma X) \cong H_{n-1}(X)$. Sin embargo, para el caso de los grupos de homotopía la situación no es tan favorable y en general no hay una relación directa entre $\pi_*(\Sigma X)$ y $\pi_*(X)$.

Ejemplo: $X = S^1$ y $\Sigma S^1 = S^2$

Dado un grupo G, su espacio clasificante $K(G,1)$ tiene grupos de homotopía sencillos:

$$\pi_1(K(G,1)) \cong G \text{ y } \pi_n(K(G,1)) = 0 \text{ si } n \neq 1$$

Pero $\pi_*(\Sigma K(G,1))$ son desconocidos en general.

Grupos de homotopía de espacios clasif. suspendidos

Grupos de homotopía de espacios clasif. suspendidos

Por medio de diferentes técnicas de teoría de grupos y teoría de homotopía, Mikhailov y Wu han calculado algunos grupos $\pi_n(\Sigma K(G,1))$ para varios casos particulares de G y n.

Grupos de homotopía de espacios clasif. suspendidos

Por medio de diferentes técnicas de teoría de grupos y teoría de homotopía, Mikhailov y Wu han calculado algunos grupos $\pi_n(\Sigma K(G,1))$ para varios casos particulares de G y n. Los principales resultados del artículo son:

Grupos de homotopía de espacios clasif. suspendidos

Por medio de diferentes técnicas de teoría de grupos y teoría de homotopía, Mikhailov y Wu han calculado algunos grupos $\pi_n(\Sigma K(G,1))$ para varios casos particulares de G y n. Los principales resultados del artículo son:

- Expresión general para $\pi_4(\Sigma K(A,1))$ y $\pi_5(\Sigma K(A,1))$ para A cualquier grupo abeliano finitamente generado. A partir de la expresión formal, se pueden obtener π_4 y π_5 para $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$, etc.

Grupos de homotopía de espacios clasif. suspendidos

Por medio de diferentes técnicas de teoría de grupos y teoría de homotopía, Mikhailov y Wu han calculado algunos grupos $\pi_n(\Sigma K(G,1))$ para varios casos particulares de G y n. Los principales resultados del artículo son:

- Expresión general para $\pi_4(\Sigma K(A,1))$ y $\pi_5(\Sigma K(A,1))$ para A cualquier grupo abeliano finitamente generado. A partir de la expresión formal, se pueden obtener π_4 y π_5 para $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$, etc.
- $\pi_4(\Sigma K(G,1))$ y $\pi_5(\Sigma K(G,1))$ para $G = \Sigma_3$ el grupo simétrico de grado 3 y $G = SL(\mathbb{Z})$ el grupo linear estándar

Grupos de homotopía de espacios clasif. suspendidos

Por medio de diferentes técnicas de teoría de grupos y teoría de homotopía, Mikhailov y Wu han calculado algunos grupos $\pi_n(\Sigma K(G,1))$ para varios casos particulares de G y n. Los principales resultados del artículo son:

- Expresión general para $\pi_4(\Sigma K(A,1))$ y $\pi_5(\Sigma K(A,1))$ para A cualquier grupo abeliano finitamente generado. A partir de la expresión formal, se pueden obtener π_4 y π_5 para $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$, etc.
- $\pi_4(\Sigma K(G,1))$ y $\pi_5(\Sigma K(G,1))$ para $G = \Sigma_3$ el grupo simétrico de grado 3 y $G = SL(\mathbb{Z})$ el grupo linear estándar
- $\pi_4(\Sigma K(A_4,1)) = \mathbb{Z}_4$ para A_4 el grupo alternado de grado 4

Homología efectiva

Homología efectiva

Definición

Una *reducción* ρ entre dos complejos de cadenas C_* y D_* (denotada por $\rho : C_* \Rightarrow\!\!\!\!\!\Rightarrow D_*$) es una terna $\rho = (f, g, h)$

$$\begin{tikzcd} C_* \arrow[loop left, "h"] \arrow[rr, bend left, "f"] & & D_* \arrow[ll, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

que verifica las siguientes relaciones:

1) $fg = \mathrm{Id}_{D_*}$;
2) $d_C h + h d_C = \mathrm{Id}_{C_*} - gf$;
3) $fh = 0; \quad hg = 0; \quad hh = 0.$

Homología efectiva

Definición

Una *reducción* ρ entre dos complejos de cadenas C_* y D_* (denotada por $\rho : C_* \Rrightarrow D_*$) es una terna $\rho = (f, g, h)$

$$\begin{tikzcd} C_* \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, bend left, "f"] & D_* \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

que verifica las siguientes relaciones:

1) $fg = \mathrm{Id}_{D_*}$;
2) $d_C h + h d_C = \mathrm{Id}_{C_*} - gf$;
3) $fh = 0; \quad hg = 0; \quad hh = 0.$

Si $C_* \Rrightarrow D_*$, entonces $C_* \cong D_* \oplus A_*$, con A_* acíclico, lo que implica que $H_n(C_*) \cong H_n(D_*)$ para todo n.

Homología efectiva

Homología efectiva

Definición

Una *equivalencia (fuerte)* ε entre C_* y D_*, $\varepsilon : C_* \Lleftarrow\Rrightarrow D_*$, es una terna $\varepsilon = (B_*, \rho, \rho')$ donde B_* es un complejo de cadenas, $\rho : B_* \Rrightarrow C_*$ y $\rho' : B_* \Rrightarrow D_*$.

$$\begin{tikzcd} & B_* \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ C_* & & D_* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \frac{42}{30} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \frac{14}{10} & & \frac{21}{15} \end{tikzcd}$$

Homología efectiva

Definición

Una *equivalencia (fuerte)* ε entre C_* y D_*, $\varepsilon : C_* \Lleftarrow\!\!\Rrightarrow D_*$, es una terna $\varepsilon = (B_*, \rho, \rho')$ donde B_* es un complejo de cadenas, $\rho : B_* \Rrightarrow C_*$ y $\rho' : B_* \Rrightarrow D_*$.

$$\begin{tikzcd} & B_* \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ C_* & & D_* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \frac{42}{30} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \frac{14}{10} & & \frac{21}{15} \end{tikzcd}$$

Definición

Un *objecto con homología efectiva* es una tupla $(X, C_*(X), E_*, \varepsilon)$ donde E_* es un complejo de cadenas *efectivo* y $\varepsilon : C_*(X) \Lleftarrow\!\!\Rrightarrow E_*$.

Homología efectiva

Definición

Una *equivalencia (fuerte)* ε entre C_* y D_*, $\varepsilon : C_* \Lleftarrow\!\!\Rrightarrow D_*$, es una terna $\varepsilon = (B_*, \rho, \rho')$ donde B_* es un complejo de cadenas, $\rho : B_* \Rrightarrow C_*$ y $\rho' : B_* \Rrightarrow D_*$.

$$
\begin{tikzcd}
 & B_* \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
C_* & & D_*
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & \frac{42}{30} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\frac{14}{10} & & \frac{21}{15}
\end{tikzcd}
$$

Definición

Un *objecto con homología efectiva* es una tupla $(X, C_*(X), E_*, \varepsilon)$ donde E_* es un complejo de cadenas *efectivo* y $\varepsilon : C_*(X) \Lleftarrow\!\!\Rrightarrow E_*$.

En particular, esto implica $H_n(X) \cong H_n(E_*)$ para todo n.

Homología efectiva

Homología efectiva

Dado un espacio X, ¿cómo podemos calcular su homología efectiva?

Homología efectiva

Dado un espacio X, ¿cómo podemos calcular su homología efectiva?

- Si su complejo de cadenas es de tipo finito, entonces su homología efectiva es trivial (y podemos calcular sus grupos de homología directamente por medio de operaciones con matrices)

Homología efectiva

Dado un espacio X, ¿cómo podemos calcular su homología efectiva?

- Si su complejo de cadenas es de tipo finito, entonces su homología efectiva es trivial (y podemos calcular sus grupos de homología directamente por medio de operaciones con matrices)
- En algunos casos hay resultados teóricos que nos dan una equivalencia entre cierto complejo de cadenas (infinito) y un complejo *efectivo*. Por ejemplo: $C_*(K(\mathbb{Z},1)) \Rrightarrow C_*(S^1)$

Homología efectiva

Dado un espacio X, ¿cómo podemos calcular su homología efectiva?

- Si su complejo de cadenas es de tipo finito, entonces su homología efectiva es trivial (y podemos calcular sus grupos de homología directamente por medio de operaciones con matrices)

- En algunos casos hay resultados teóricos que nos dan una equivalencia entre cierto complejo de cadenas (infinito) y un complejo *efectivo*. Por ejemplo: $C_*(K(\mathbb{Z},1)) \Rrightarrow C_*(S^1)$

- A partir de espacios con homología efectiva construimos nuevos espacios con homología efectiva:
  - si X tiene homología efectiva, ΩX tiene homología efectiva
  - si $F \hookrightarrow E \to B$ es un fibrado y F y B tienen homología efectiva, entonces E tiene homología efectiva

Homología efectiva

Dado un espacio X, ¿cómo podemos calcular su homología efectiva?

- Si su complejo de cadenas es de tipo finito, entonces su homología efectiva es trivial (y podemos calcular sus grupos de homología directamente por medio de operaciones con matrices)
- En algunos casos hay resultados teóricos que nos dan una equivalencia entre cierto complejo de cadenas (infinito) y un complejo *efectivo*. Por ejemplo: $C_*(K(\mathbb{Z},1)) \Rrightarrow C_*(S^1)$
- A partir de espacios con homología efectiva construimos nuevos espacios con homología efectiva:
  - si X tiene homología efectiva, ΩX tiene homología efectiva
  - si $F \hookrightarrow E \to B$ es un fibrado y F y B tienen homología efectiva, entonces E tiene homología efectiva

Implementado en el sistema Kenzo (F. Sergeraert)

Homología efectiva de $K(G, 1)$

Homología efectiva de $K(G,1)$

Dado un grupo G, su espacio clasificante es un conjunto simplicial con $\pi_1(K(G,1)) \cong G$ y $\pi_n(K(G,1)) = 0$ si $n \neq 1$.

Homología efectiva de $K(G, 1)$

Dado un grupo G, su espacio clasificante es un conjunto simplicial con $\pi_1(K(G, 1)) \cong G$ y $\pi_n(K(G, 1)) = 0$ si $n \neq 1$. Sus grupos de homología son por definición los grupos de homología de G.

Homología efectiva de $K(G, 1)$

Dado un grupo G, su espacio clasificante es un conjunto simplicial con $\pi_1(K(G, 1)) \cong G$ y $\pi_n(K(G, 1)) = 0$ si $n \neq 1$. Sus grupos de homología son por definición los grupos de homología de G.

Problema: $K(G, 1)_n = G^n$ para $n > 1$.

Homología efectiva de $K(G,1)$

Dado un grupo G, su espacio clasificante es un conjunto simplicial con $\pi_1(K(G,1)) \cong G$ y $\pi_n(K(G,1)) = 0$ si $n \neq 1$. Sus grupos de homología son por definición los grupos de homología de G.

Problema: $K(G,1)_n = G^n$ para $n > 1$. En particular, si $G = \mathbb{Z}$ entonces $K(G,1)$ es infinito y no se puede calcular directamente sus grupos de homología.

Homología efectiva de $K(G,1)$

Dado un grupo G, su espacio clasificante es un conjunto simplicial con $\pi_1(K(G,1)) \cong G$ y $\pi_n(K(G,1)) = 0$ si $n \neq 1$. Sus grupos de homología son por definición los grupos de homología de G.

Problema: $K(G,1)_n = G^n$ para $n > 1$. En particular, si $G = \mathbb{Z}$ entonces $K(G,1)$ es infinito y no se puede calcular directamente sus grupos de homología. Si G es finito, $K(G,1)_n$ es finito pero hay problemas de complejidad para calcular $H_n(K(G,1))$ directamente.

Homología efectiva de $K(G, 1)$

Dado un grupo G, su espacio clasificante es un conjunto simplicial con $\pi_1(K(G,1)) \cong G$ y $\pi_n(K(G,1)) = 0$ si $n \neq 1$. Sus grupos de homología son por definición los grupos de homología de G.

Problema: $K(G,1)_n = G^n$ para $n > 1$. En particular, si $G = \mathbb{Z}$ entonces $K(G,1)$ es infinito y no se puede calcular directamente sus grupos de homología. Si G es finito, $K(G,1)_n$ es finito pero hay problemas de complejidad para calcular $H_n(K(G,1))$ directamente.

¿Podemos calcular su homología efectiva?

Homología efectiva de $K(G,1)$

Homología efectiva de $K(G,1)$

Los espacios $K(G,1)$ están implementados en Kenzo usando programación funcional.

Homología efectiva de $K(G,1)$

Los espacios $K(G,1)$ están implementados en Kenzo usando programación funcional.

Para calcular sus grupos de homología, hemos desarrollado un algoritmo que determina la homología efectiva de $K(G,1)$ a partir de una resolución de tipo finito para G.

Homología efectiva de $K(G,1)$

Los espacios $K(G,1)$ están implementados en Kenzo usando programación funcional.

Para calcular sus grupos de homología, hemos desarrollado un algoritmo que determina la homología efectiva de $K(G,1)$ a partir de una resolución de tipo finito para G. Para algunos grupos la resolución ha sido implementada directamente en Kenzo; en otros casos la resolución se obtiene del programa GAP gracias al paquete HAP (dedicado al cálculo de homología de grupos), y se importa a Kenzo por medio del lenguaje OpenMath.

Homología efectiva de $K(G,1)$

Los espacios $K(G,1)$ están implementados en Kenzo usando programación funcional.

Para calcular sus grupos de homología, hemos desarrollado un algoritmo que determina la homología efectiva de $K(G,1)$ a partir de una resolución de tipo finito para G. Para algunos grupos la resolución ha sido implementada directamente en Kenzo; en otros casos la resolución se obtiene del programa GAP gracias al paquete HAP (dedicado al cálculo de homología de grupos), y se importa a Kenzo por medio del lenguaje OpenMath.

Una vez que la resolución está instalada en Kenzo, aplicamos nuestro algoritmo para calcular la homología efectiva de $K(G,1)$, es decir, una equivalencia $C_*(K(G,1)) \Lleftarrow\!\!\Rrightarrow E_*$ con E_* efectivo.

Homología efectiva de $K(G,1)$

Los espacios $K(G,1)$ están implementados en Kenzo usando programación funcional.

Para calcular sus grupos de homología, hemos desarrollado un algoritmo que determina la homología efectiva de $K(G,1)$ a partir de una resolución de tipo finito para G. Para algunos grupos la resolución ha sido implementada directamente en Kenzo; en otros casos la resolución se obtiene del programa GAP gracias al paquete HAP (dedicado al cálculo de homología de grupos), y se importa a Kenzo por medio del lenguaje OpenMath.

Una vez que la resolución está instalada en Kenzo, aplicamos nuestro algoritmo para calcular la homología efectiva de $K(G,1)$, es decir, una equivalencia $C_*(K(G,1)) \Lleftarrow\!\!\Rrightarrow E_*$ con E_* efectivo. Así ya podemos calcular los grupos de homología de $K(G,1)$.

Grupos de homotopía de $\Sigma K(G,1)$

Grupos de homotopía de $\Sigma K(G,1)$

Además de calcular los grupos de homología de $K(G,1)$, podemos usar este espacio en otras construcciones obteniendo nuevos espacios con homología efectiva (por ejemplo, en extensiones centrales o 2-tipos).

Grupos de homotopía de $\Sigma K(G,1)$

Además de calcular los grupos de homología de $K(G,1)$, podemos usar este espacio en otras construcciones obteniendo nuevos espacios con homología efectiva (por ejemplo, en extensiones centrales o 2-tipos). En concreto, Kenzo tiene implementada la versión con homología efectiva de la suspensión, por lo que el espacio clasificante suspendido $\Sigma K(G,1)$ tiene homología efectiva.

Grupos de homotopía de $\Sigma K(G,1)$

Además de calcular los grupos de homología de $K(G,1)$, podemos usar este espacio en otras construcciones obteniendo nuevos espacios con homología efectiva (por ejemplo, en extensiones centrales o 2-tipos). En concreto, Kenzo tiene implementada la versión con homología efectiva de la suspensión, por lo que el espacio clasificante suspendido $\Sigma K(G,1)$ tiene homología efectiva.

Utilizando el método de Kenzo para calcular grupos de homotopía (de espacios con homología efectiva), podemos determinar los grupos de homotopía de $\Sigma K(G,1)$ (siempre que tengamos una resolución de tipo finito para el grupo G).

Cálculos y resultados

Cálculos y resultados

Cuadro: Resultados de los cálculos

	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6
$\Sigma K(\mathbb{Z},1) \simeq S^2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$
$\Sigma K(\mathbb{Z}_2,1)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2{}^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_2{}^{\oplus 2}$
$\Sigma K(\mathbb{Z}_3,1)$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3{}^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_3{}^{\oplus 5}$
$\Sigma K(\mathbb{Z}_4,1)$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4{}^{\oplus 2}$	
$\Sigma K(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,1)$	$\mathbb{Z}_2{}^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_2{}^{\oplus 4}$	$\mathbb{Z}_2{}^{\oplus 4} \oplus \mathbb{Z}_4{}^{\oplus 4}$		
$\Sigma K(\mathbb{Z}_5,1)$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_5$	$\mathbb{Z}_5{}^{\oplus 2}$	
$\Sigma K(\mathbb{Z}_6,1)$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_6{}^{\oplus 2}$	
$\Sigma K(\mathbb{Z}_7,1)$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_7{}^{\oplus 2}$	
$\Sigma K(\mathbb{Z}_8,1)$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8{}^{\oplus 2}$	
$\Sigma K(\mathbb{Z}_9,1)$	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_9$	$\mathbb{Z}_9{}^{\oplus 2}$	
$\Sigma K(\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3,1)$	$\mathbb{Z}_3{}^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_3{}^{\oplus 4}$	$\mathbb{Z}_3{}^{\oplus 8}$		
$\Sigma K(\Sigma_3,1)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2{}^{\oplus 2}$	
$\Sigma K(\Sigma_4,1)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2{}^{\oplus 2}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3$		
$\Sigma K(A_4,1)$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_{12}$		

Resultados del artículo
Resultados nuevos
Discrepancia