# Índice

- ## Sesión I
  **Introducción a la homología efectiva**
  Teoría de la homología efectiva y uso del sistema Kenzo.
- ## Sesión II
  **Teoremas de perturbación**
  Dos teoremas que nos permitirán calcular la homología efectiva de muchos espacios y algunos ejemplos de su uso.
- ## Sesión III
  **Aplicaciones**
  Uso de la homología efectiva para el cálculo de sucesiones espectrales, homología persistente y sistemas espectrales.

# Sesión III:

## Aplicaciones (sucesiones espectrales y otras)

Diapositivas en `www.unirioja.es/cu/anromero/EJT-sesion3.pdf`

# Introducción

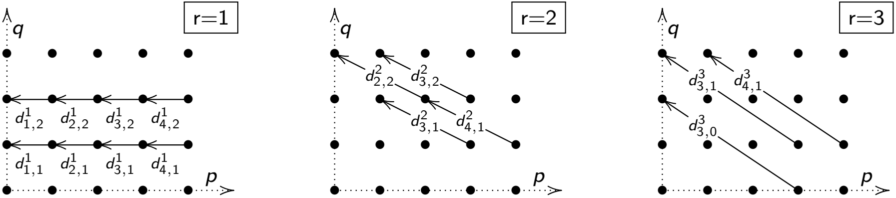
¿Por qué me gusta hablar sobre sucesiones espectrales?

- Son una herramienta muy útil en topología algebraica que puede ser usada en muchas situaciones diferentes.
- Mucha gente no las conoce o les da miedo utilizarlas.
- Mucha gente piensa que no son una herramienta computacional.
- He trabajado con sucesiones espectrales durante mucho tiempo...

# Definición de sucesión espectral

## Definición

Una **sucesión espectral** $E = (E^r, d^r)_{r\geq 1}$ es una famillia de $\mathbb{Z}$-módulos bigraduados $E^r = \{E^r_{p,q}\}$, cada uno de ellos con una aplicación diferencial $d^r = \{d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}\}$ de bigrado $(-r, r-1)$ y con isomorfismos $H(E^r, d^r) = \operatorname{Ker} d^r / \operatorname{Im} d^r \cong E^{r+1}$ para cada $r \geq 1$.




Puesto que $E^{r+1}_{p,q}$ es un subcociente de $E^r_{p,q}$ para cada $r \geq 1$, se puede definir los **grupos finales** de la sucesión espectral como $E^\infty_{p,q} = \bigcap_{r\geq 1} E^r_{p,q}$. Bajo buenas condiciones (muy frecuentemente), la sucesión espectral **se estabiliza**.

# ¿Por qué son útiles las sucesiones espectrales?

Habitualmente **convergen** a cosas **interesantes** (frecuentemente, grupos de homología y homotopía).

**Definición**

Sea $H_* = \{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un grupo graduado. Se dice que una sucesión espectral $(E^r, d^r)_{r\geq 1}$ **converge** a $H_*$ (denotado por $E^1 \Rightarrow H_*$) si existe una filtración $F$ de $H_*$ y para cada $(p, q)$ se tiene un isomorfismo $E^\infty_{p,q} \cong \frac{F_p H_{p+q}}{F_{p-1} H_{p+q}}$

Ejemplos:

- La **sucesión espectral de Serre** converge a los grupos de homología del espacio total de una fibración.
- La **sucesión espectral de Eilenberg–Moore** converge a los grupos de homología del espacio de lazos de un conjunto simplicial.
- La **sucesión espectral de Adams** converge a los grupos de homotopía de un conjunto simplicial.

# ¿Por qué son útiles las sucesiones espectrales?

**Teorema (Serre, 1951)**

*Sea $G \hookrightarrow E \to B$ una* **fibración** *y supongamos que la base $B$ es 1-reducida. Existe una sucesión espectral que converge a $H_*(E)$ cuya segunda página viene dada por $E^2_{p,q} = H_n(B; H_q(G))$.*

Supongamos que $H_i(G)$ y $H_i(B)$ son cero para $i$ impar y grupos abelianos libres para $i$ par. Las entradas $E^2_{p,q}$ de la página $E^2$ son cero a menos que $p$ y $q$ sean par.

$$
\begin{array}{ccccccc}
q & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\bullet & 0 & \bullet & 0 & \bullet & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\bullet & 0 & \bullet & 0 & \bullet & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\bullet & 0 & \bullet & 0 & \bullet & 0 & p
\end{array}
\qquad \boxed{\text{r=2}}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
q & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\qquad \boxed{\text{r=2}}
$$

r=3

# Problemas de las sucesiones espectrales

- El problema de las **diferenciales**
  En muchos casos no es posible deducir todas las diferenciales para obtener los grupos finales

- El problema de **extensión**
  Incluso si obtenemos todos los grupos finales, podemos encontrar problemas de extensión para determinar $H_*$

**No son algoritmos para obtener el grupo $H_*$ deseado**

# Sucesiones espectrales de complejos filtrados

## Definición

Una **filtración creciente** $F$ de un complejo de cadenas $C_* = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de sub-complejos de cadenas
$\ldots \subseteq F_{p-1}C_* \subseteq F_n C_* \subseteq F_{p+1}C_* \subseteq \ldots$

## Teorema

*Sea $C_*$ un complejo de cadenas con una filtración. Existe un sucesión espectral con*

$$E^r_{p,q} = \frac{Z^r_{p,q} + F_{p-1}C_{p+q}}{d_{p+q+1}(Z^{r-1}_{p+r-1,q-r+2}) + F_{p-1}C_{p+q}}$$

*donde $Z^r_{p,q}$ is $Z^r_{p,q} = \{a \in F_n C_{p+q} | \ d_{p+q}(a) \in F_{p-r}C_{p+q-1}\} \subseteq F_n C_{p+q}$, y $d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}$ es el morfismo inducido por $d_{p+q} : C_{p+q} \to C_{p+q-1}$. Esta sucesión espectral* ***converge*** *a $H_*(C)$.*

# Programas para el cálculo de suc. espectrales de complejos filtrados

**Nota:** cuando el complejo de cadenas inicial es de tipo finito, los grupos $E^r_{p,q}$ (¡de todos los niveles!) se pueden determinar por medio de algoritmos de diagonalización sobre algunas matrices **sin conocer las diferenciales**.


A. R., J. Rubio, F. Sergeraert. *Computing spectral sequences.* Journal of Symbolic Computation 41 (10), 1059–1079, 2006.

M. Barakat. *Spectral filtrations via Generalized Morphisms.* Preprint, 2009. https://arxiv.org/abs/0904.0240

G. Ellis, P. Smith. *Computing group cohomology rings from the Lyndon-Hochschild-Serre spectral sequence.* Journal of Symbolic Computation 46 (4), 360–370, 2011.

A. Boocher, N. Grieve, E. Grifo. *The software package SpectralSequences.* Preprint, 2016. https://arxiv.org/abs/1610.05338

# Programas para el cálculo de suc. espectrales de complejos filtrados

**Nota:** Cuando el complejo de cadenas filtrado no es de tipo finito, los grupos $E^r_{p,q}$ y las diferenciales $d^r_{p,q}$ no se pueden determinar **directamente**.

Usando la teoría de la **homología efectiva**, implementada en el sistema Kenzo, también es posible determinar sucesiones espectrales de complejos de cadenas que no son de tipo finito.

# Programas para el cálculo de suc. espectrales de complejos filtrados

Nuestros programas trabajan de modo similar al método que Kenzo usa para determinar los grupos de homología de un complejo de cadenas:

- Si un complejo filtrado $C_*$ es de tipo finito, su sucesión espectral se puede determinar por medio de algoritmos de diagonalización sobre algunas matrices.
- En otro caso, se considera la homología efectiva $C_* \Lleftarrow D_* \Rrightarrow E_*$ y se define una filtración sobre $E_*$ tal que (gracias a algunos resultados teóricos) las sucesiones espectrales de $C_*$ y $E_*$ son isomorfas a partir de cierto nivel.

Nuestros programas determinan los grupos $E^r_{p,q}$ y las diferenciales $d^r_{p,q}$ para cada nivel $r$.

# Programas para el cálculo de suc. espectrales de complejos filtrados

Los programas se basan en el siguiente resultado teórico:

**Teorema**

*Sea* $\rho = (f, g, h) : C_* \Rrightarrow D_*$ *una reducción entre los complejos de cadenas* $C_* = (C_n, d_{C_n})_{n \in \mathbb{N}}$ *y* $D_* = (D_n, d_{D_n})_{n \in \mathbb{N}}$*, tal que hay definidas filtraciones* $F_C$ *y* $F_D$ *para* $C_*$ *y* $D_*$ *respectivamente. Si los morfimos* $f$ *y* $g$ *son morfismos de complejos filtrados (es decir, son compatibles con las filtraciones) y el operador de homotopía* $h$ *tiene orden* $\leq k$*, entonces el morfismo inducido en las sucesiones espectrales* $f : E(C_*, F_C) \to E(D_*, F_D)$ *produce un isomorfismo de módulos bigraduados para cada paso* $r > k$*:*

$$f^r : E(C_*, F_C)^r \cong E(D_*, F_D)^r \quad \textit{for all } r > k$$

# Aplicaciones

Aplicaciones de nuestros programas para el cálculo de sucesiones espectrales de complejos filtrados:

- Podemos calcular la sucesión espectral asociada a un bicomplejo.
- Podemos calcular las sucesiones espectrales clásicas de Serre y Eilenberg–Moore, definidas por medio de complejos filtrados, incluso cuando los espacios no son de tipo finito y (algunas) diferenciales no se pueden determinar fácilmente.

# Aplicaciones

La sucesión espectral de Serre se define mediante una filtración en el espacio total de la fibración (producto cartesiano torcido). Consideramos la homología efectiva, vista en la sesión anterior:

$$\begin{tikzcd}
& C_*(G \times_\tau B) \arrow[dl, Rightarrow, "\mathrm{Id}"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\rho_1"] & & DG_* \otimes_t DB_* \arrow[dl, Rightarrow, "\rho_2"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\rho_3"] & \\
C_*(G \times_\tau B) & & C_*(G) \otimes_t C_*(B) & & EG_* \otimes_t EB_*
\end{tikzcd}$$

En todas las reducciones, los morfismos $f$ y $g$ respetan las filtraciones. La componente $h$ de la reducción $\rho_1$ mantiene el índice de filtración y las de $\rho_2$ y $\rho_3$ aumentan en 1 el índice de filtración.

Por tanto, las sucesiones espectrales de $C_*(G \times_\tau B)$ y $EG_* \otimes_t EB_*$ son isomorfas a partir de la página 2.

# Sucesión espectral de Bousfield–Kan

Asociada con un conjunto simplicial $X$, no está definida por medio de un complejo filtrado, bajo buenas condiciones converge a $\pi_*(X)$.

Su definición es mucho más complicada e involucra diferentes estructuras matemáticas como:

- Espacios cosimpliciales
- Espacios de lazos
- Límites inversos
- Torres de fibraciones

Hemos desarrollado un algoritmo utilizando la teoría de la homología efectiva y otras construcciones (en particular, una nueva teoría de homotopía efectiva).

Sea $K$ un complejo simplicial filtrado:

$$\emptyset = K^0 \subseteq K^1 \subseteq K^2 \subseteq \cdots \subseteq K^m = K$$

La filtración produce una secuencia de grupos y homomorfismos:

$$0 = H_n(K^0) \to H_n(K^1) \to \cdots \to H_n(K^m) = H_n(K)$$

**Definición**

Los **grupos de homología persistente** $n$-ésimos de $K$ se definen como $H_n^{i,j} = \operatorname{Im} f_n^{i,j}$, para $0 \leq i \leq j \leq m$.

Si $\gamma$ **nace** en el paso $K^i$ y **muere** en $K^j$, se denota $\operatorname{pers}(\gamma) = j - i$. Si se calcula la homología con coeficientes en un cuerpo, los grupos $H_n^{i,j}$ quedan determinados por sus rangos, denotados $\beta_n^{i,j}$. Esto permite representar todos los grupos $H_n^{i,j}$ por medio de un **diagrama de código de barras**.

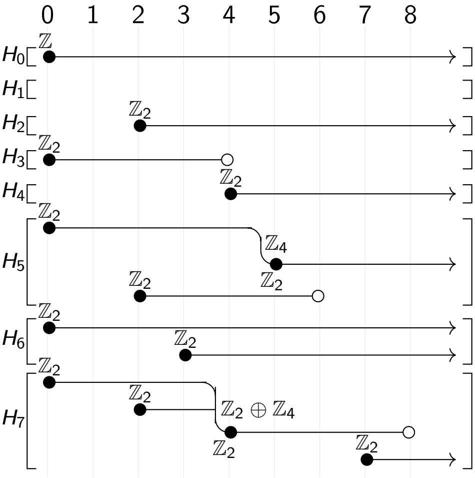
# Programas para el cálculo de la homología persistente

- Los grupos $H_n^{i,j}$ se pueden expresar en términos de los subgrupos que aparecen en la sucesión espectral:

$$H_n^{i,j} = \frac{Z_{i,n-i}^{i}}{d_{n+1}(Z_{j,n-j+1}^{j-i})}$$

- De este modo, fue sencillo adaptar nuestros programas para el cálculo de sucesiones espectrales para calcular $H_n^{i,j}$ para complejos simpliciales (filtrados).
- Nuestros programas también son válidos para el caso entero y esto hace posible resolver los posibles problemas de extensión.
- También se pueden utilizar en el caso infinito, donde el método de la homología efectiva se puede usar para determinar los grupos $H_n^{i,j}$ por medio de una **equivalencia** entre el complejo de cadenas inicial $C_*$ y un complejo de cadenas auxiliar de tipo finito.

Nueva definición de *barcode* para persistencia con coeficientes enteros, resolviendo los posibles problemas de extensión:



La noción de sucesión espectral de un complejo filtrado ha sido generalizada por B. Matschke para una filtración indexada sobre un **poset** $I$ (esto es, una colección de sub-complejos de cadenas $\{F_i C_*\}_{i \in I}$ con $F_i C_* \subseteq F_j C_*$ if $i \leq j$).

Un **sistema espectral** (también llamado **sucesión espectral generalizada** o **sucesión espectral superior**) es un conjunto de grupos, para todo $z \leq s \leq p \leq b$ in $I$ y para cada grado $n$:

$$S_n[z,s,p,b] = \frac{F_n C_n \cap d_n^{-1}(F_z C_{n-1})}{d_{n+1}(F_b C_{n+1}) + F_s C_n}$$

# Sucesiones espectrales generalizadas

Bajo hipótesis adecuadas en $z_1, q_1, \ldots, b_3 \in I$, existen diferenciales

$$S[z_3, q_3, p_3, b_3] \to dS[z_2, q_2, p_2, b_2] \to d'S[z_1, q_1, p_1, b_1]$$

tal que

$$\frac{\ker d'}{\operatorname{Im} d} \cong S[q_1, q_2, p_2, p_3].$$

Como las sucesiones espectrales **clásicas**, convergen habitualmente a **cosas interesantes**.

- Sucesión espectral de Serre generalizada para una torre de fibraciones.
- Sucesión espectral de Eilenberg-Moore generalizada para un diagrama de pull-back de fibraciones.

# Programas para el cálculo de sucesiones espectrales generalizadas

- Adaptando nuestros programas para las sucesiones espectrales clásicas, podemos calcular también los grupos

$$S[z,q,p,b] := \frac{F_n \cap d^{-1}(F_z)}{d(F_b) + F_q},$$

- Nuestros programas también son válidos en el caso entero y de este modo se evitan los problemas de extensión.

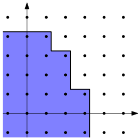
- También se pueden aplicar al caso infinito, en el que usamos el método de la homología efectiva para determinar los grupos $S[z,q,p,b]$ por medio de una equivalencia entre el complejo de cadenas inicial $C_*$ y un complejo de cadenas auxiliar de tipo finito.

(Trabajo conjunto con A. Guidolin)

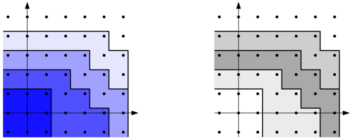
# Los posets $\mathbb{Z}^m$ y $D(\mathbb{Z}^m)$

Consideramos $\mathbb{Z}^m$, visto como el poset $(\mathbb{Z}^m, \leq)$ con la relación de orden por coordenadas: $P = (p_1, \ldots, p_m) \leq Q = (q_1, \ldots, q_m)$ si y solo si $p_i \leq q_i$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Un **downset** de $\mathbb{Z}^m$ es un subconjunto $p \subseteq \mathbb{Z}^m$ tal que, si $P \in p$ y $Q \leq P$ en $\mathbb{Z}^m$, entonces $Q \in p$.



Denotamos como $D(\mathbb{Z}^m)$ la colección de todos los downsets de $\mathbb{Z}^m$, que es un poset con respecto a la inclusión $\subseteq$.



Recordamos la definición de la sucesión espectral de Serre:

**Teorema (Serre, 1951)**

*Sea $G \hookrightarrow E \to B$ una* **fibración** *y supongamos que la base $B$ es 1-reducida. Existe una sucesión espectral que converge a $H_*(E)$ cuya segunda página viene dada por $E^2_{p,q} = H_n(B; H_q(G))$.*

Este resultado lo hemos generalizado para torres de fibraciones:

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_{m-1} \arrow[r] & B \\ G_0 \arrow[u] & & G_{m-1} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

**Theorem (Matschke, 2013)**

*Consideramos una torre de m fibraciones. Existe un sistema espectral asociado sobre $D(\mathbb{Z}^m)$ con página 2 dada por:*

$$S_n^*(P;m) \cong H_{p_m}(B; H_{p_{m-1}}(G_{m-1}; \ldots H_{p_1}(G_1; H_{p_0}(G_0)))),$$

*con $P = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{Z}^m$ y $p_0 = n - p_1 - \cdots - p_m$, que bajo hipótesis adecuadas converge a $H_*(E_0)$.*

Para $m = 2$, tenemos dos fibraciones:

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & N & \longrightarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ G & & M & & \end{array}$$

donde la base $B$ es 1-reducida. Entonces, existe un sistema espectral sobre $D(\mathbb{Z}^2)$ que converge a $H_*(E)$ y cuya página segunda viene dada por

$$S_n^*(P;2) = H_{p_2}(B; H_{p_1}(M; H_{n-p_1-p_2}(G))), \quad P = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

# Programas para el cálculo de sistemas espectrales

- Hemos mejorado nuestros programas para sucesiones espectrales clásicas, para poder calcular los grupos $S_n[z,s,p,b]$ y las diferenciales para todos los índices.

- Nuestros programas también son válidos en el caso enteroo y esto hace posible resolver los posibles problemas de extensión.

- También podemos aplicarlos en el caso infinito, utilizando la homología efectiva para determinar los grupos $S_n[z,s,p,b]$ mediante una pareja de reducciones entre el complejo de cadenas inicial $C_*$ y un complejo de cadenas auxiliar de tipo finito.

# Programas para el cálculo de sistemas espectrales

- Consideramos una torre de fibraciones **simpliciales**.
- Definimos un sistema espectral asociado en este marco.
- Usamos los programas anteriores y el método de la homología efectiva para trabajar con espacios de naturaleza infinita.

# Relación con multipersistencia

Consideramos una filtración sobre $\mathbb{Z}^m$, junto con el orden parcial usual por coordenadas $\leq$.

Para **m=2**:

$$
\begin{tikzcd}
K_{1,N'} \arrow[r, hook] & K_{2,N'} \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & K_{N,N'} \\
\cdots \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[u, hook] & & \cdots \arrow[u, hook] \\
K_{1,2} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & K_{2,2} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & K_{N,2} \arrow[u, hook] \\
K_{1,1} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & K_{2,1} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & K_{N,1} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

Invariante asociado: **rank invariant**

$$\beta_n^{P,Q} := \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Im}(H_n(K_n) \to H_n(K_Q)), \qquad P, Q \in \mathbb{Z}^m, \quad P \leq Q.$$

# Relación con multipersistencia

- Mostramos que los sistema espectrales y la multipersistencia están relacionados, generalizando los resultados previos para sucesiones espectrales y homología persistente.
- Hemos desarrollado programas para el cálculo de multipersistencia utilizando nuestros programas previos para sistema espectrales, generalizando otro software existente.
- Proponemos y calculamos un nuevo descriptor que nos permite expresar otras características topológicas y distinguir entre varias filtraciones.
- Usamos la teoría de la homología efectiva para aplicar nuestros programas a espacios de tipo infinito.

(Trabajo conjunto con A. Guidolin, J. Divasón y F. Vaccarino)

# Sistemas espectrales combinando las sucesiones espectrales de Serre y Eilenberg–Moore

Consideramos el siguiente diagrama de fibraciones:

$$\begin{tikzcd} \Omega B \arrow[d] & F \arrow[d] & \\ \tilde{F} \arrow[r] & E \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

y las siguientes sucesiones espectrales:

- Suc. esp. de Eilenberg–Moore de $F \to E \to B$, que converge a $H_*(F)$.
- Suc. esp. de Serre de $\Omega B \to \tilde{F} \to E$, que converge a $H_*(\tilde{F}) \cong H_*(F)$.

Definimos y calculamos un sistema espectral que combina ambas sucesiones espectrales, por medio de una filtración sobre $\mathbb{Z}^2$ para el complejo de cadenas $\mathrm{Cobar}^{C_*(B)}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \otimes_t C_*(E)$.

(Trabajo conjunto con A. Guidolin, D. Miguel y J. Rubio)

# Ejemplos de cálculo

- Ejemplos de cálculo de sucesiones espectrales en SageMath:
  `www.unirioja.es/cu/anromero/EJT_sage_sesion3.ipynb`

# Bibliografía


A. Romero, J. Rubio, F. Sergeraert. *Computing spectral sequences*. Journal of Symbolic Computation 41 (10) (2006) 1059–1079.

A. Romero, F. Sergeraert. *A Bousfield–Kan Algorithm for Computing the Effective Homotopy of a Space*. Foundations of Computational Mathematics 17(5) (2017) 1335–1366.

B. Matschke. Successive Spectral Sequences. Preprint, 2013. `http://arxiv.org/abs/1308.3187v1`.

A. Guidolin, A. Romero *Effective Computation of Generalized Spectral Sequences*. Proceedings ISSAC 2018, 183–190.

A. Guidolin, A. Romero *Computing Higher Leray–Serre Spectral Sequences of Towers of Fibrations*. Foundations of Computational Mathematics 21(4) (2021), 1023–1074.

# Bibliografía


A. Guidolin, J. Divasón, A. Romero, F. Vaccarino. *Computing Multipersistence by Means of Spectral Systems*. Proceedings ISSAC 2019, 195–202.

A. Guidolin, J. Divasón, A. Romero, F. Vaccarino. *Computing invariants for multipersistence via espectral systems and effective homology*. Journal of Symbolic Computation 104 (2021), 724–753.

D. Miguel, A. Guidolin, A. Romero, J. Rubio. *Effective spectral systems relating Serre and Eilenberg–Moore spectral sequences*. Journal of Symbolic Computation 114 (2023), 122–148.

¡Gracias!