Homología efectiva y aplicaciones

Ana Romero
Universidad de La Rioja

X Encuentro de jóvenes topólogos, Zaragoza,
18-20 de octubre de 2022

(Basado en resultados de J. Rubio y F. Sergeraert y mi trabajo conjunto con ellos y otros coautores)

Sobre mí

Soy profesora (e investigadora) en la Universidad de La Rioja
`https://investigacion.unirioja.es/investigadores/278/detalle`
`https://www.unirioja.es/cu/anromero`

Doctora en Matemáticas (2007) en la UR con una tesis de título "Homología efectiva y sucesiones espectrales", dirigida por Julio Rubio y Francis Sergeraert

Temas de investigación: topología computacional, topología algebraica y álgebra computacional
En concreto: álgebra homológica, sucesiones espectrales

Resumen:

La teoría de homología efectiva es una técnica de topología algebraica que puede ser utilizada para el cálculo de grupos de homología y de homotopía de espacios complicados que, en particular, pueden ser de tipo infinito. Esta técnica fue desarrollada por Francis Sergeraert y algunos colaboradores y ha sido implementada en el sistema de cálculo simbólico Kenzo, lo que ha permitido calcular resultados no conocidos anteriormente. También puede ser aplicada para el cálculo de sucesiones espectrales, homología persistente con coeficientes enteros, sistemas espectrales o reducciones de complejos de cadenas de tipo infinito mediante teoría de Morse discreta. El objetivo de este curso es presentar las principales definiciones y algoritmos de la teoría de homología efectiva y algunas de sus aplicaciones. Para facilitar su comprensión, mostraremos ejemplos de cálculo utilizando el sistema Kenzo y su interfaz dentro de SageMath.

Índice

- ## Sesión I
  Introducción a la homología efectiva
  Teoría de la homología efectiva y uso del sistema Kenzo.
- ## Sesión II
  Teoremas de perturbación
  Dos teoremas que nos permitirán calcular la homología efectiva de muchos espacios y algunos ejemplos de su uso.
- ## Sesión III
  Aplicaciones
  Uso de la homología efectiva para el cálculo de sucesiones espectrales, homología persistente y sistemas espectrales.

Sesión I:

Introducción a la homología efectiva

Diapositivas en `www.unirioja.es/cu/anromero/EJT-sesion1.pdf`

Introducción

- La teoría de la homología efectiva es una técnica de topología algebraica para el cálculo de grupos de homología y homotopía de espacios complicados.
- Fue diseñada para el trabajo con espacios de tipo infinito (número infinito de generadores en alguno de los grados).
- Diseñada por Francis Sergeraert y Julio Rubio.
- Implementada en el sistema Kenzo.

Consideramos un **complejo de cadenas**

$$C_* : \quad \cdots \leftarrow C_{n-1} \xleftarrow{d_n} C_n \xleftarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \leftarrow \cdots \qquad d_n d_{n+1} = 0$$

El n-ésimo **grupo de homología** de C_* se define como

$$H_n(C_*) := \frac{\text{Ker } d_n}{\text{Im } d_{n+1}}$$

Dado un **conjunto simplicial** X, se puede construir un complejo de cadenas asociado $C_*(X)$ tal que sus grupos de homología se definen como

$$H_n(X) := H_n(C_*(X))$$

Introducción

- Si el complejo de cadenas es de tipo finito, sus grupos de homología se pueden calcular mediante operaciones de diagonalización de matrices.
- ¿Se pueden calcular los grupos de homología de un complejo de cadenas que no sea de tipo finito?

Ejemplo:

$$X = \Omega(\Omega(\Omega(P^{\infty}\mathbb{R}/P^{3}\mathbb{R}) \cup_4 D^4) \cup_2 D^2)$$

Gracias a la homología efectiva y a Kenzo obtenemos:

$$H_5(X) = (\mathbb{Z}/2)^{23} \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/16$$
$$H_6(X) = (\mathbb{Z}/2)^{52} \oplus (\mathbb{Z}/4)^3 \oplus \mathbb{Z}^3$$
$$H_7(X) = (\mathbb{Z}/2)^{113} \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus (\mathbb{Z}/8)^3 \oplus \mathbb{Z}/16 \oplus \mathbb{Z}/32 \oplus \mathbb{Z}$$

Definición

Una **reducción** ρ entre dos complejos de cadenas C_* y D_* (denotado por $\rho : C_* \Rrightarrow D_*$) es una terna $\rho = (f, g, h)$

$$\begin{tikzcd} C_* \arrow[loop left, "h"] \arrow[r, bend left, "f"] & D_* \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

donde f y g son morfismos de complejos de cadenas, h es un operador de homotopía $h : C_* \to C_{*+1}$, y se verifican las siguientes relaciones:

1) $fg = \mathrm{Id}_{D_*}$;
2) $d_C h + h d_C = \mathrm{Id}_{C_*} - gf$;
3) $fh = 0; \quad hg = 0; \quad hh = 0.$

Si $C_* \Rrightarrow D_*$, entonces $C_* \cong D_* \oplus A_*$, con A_* acíclico, lo que implica que $H_n(C_*) \cong H_n(D_*)$ para todo n.

Homología efectiva

Definición

Una **equivalencia (fuerte)** ε entre C_* y D_*, $\varepsilon : C_* \Longleftrightarrow D_*$, es una terna $\varepsilon = (B_*, \rho, \rho')$ donde B_* es un complejo de cadenas, $\rho : B_* \Rrightarrow C_*$ y $\rho' : B_* \Rrightarrow D_*$.

$$\begin{tikzcd} & B_* \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ C_* & & D_* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \frac{42}{30} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \frac{14}{10} & & \frac{21}{15} \end{tikzcd}$$

Definición

Un complejo de cadenas **efectivo** C_* es un complejo de cadenas libre donde cada C_n es finitamente generado y existe un algoritmo que devuelve una $\mathbb{Z}$-base β_n, para cada grado n.

Definición

Un **objeto con homología efectiva** es una cuaterna $(X, C_*(X), EC_*, \varepsilon)$ donde EC_* es un complejo de cadenas efectivo y $\varepsilon : C_*(X) \Longleftrightarrow EC_*$.

Esto implica que $H_n(X) \cong H_n(EC_*)$ para todo n.

Situación habitual:

- X es un objeto complicado que puede ser de tipo infinito en el que no puedo calcular sus grupos de homología (directamente).
- EC_* es efectivo y por tanto puedo calcular sus grupos de homología.
- Gracias al isomorfismo $H_n(X) \cong H_n(EC_*)$, puedo calcular los grupos de homología de X a través de los grupos de homología de EC_*.

Cálculo de homología efectiva

Dado un complejo de cadenas C_*, cómo se puede determinar su homología efectiva?

- Si un complejo de cadenas C_* es efectivo, entonces podemos elegir la homología efectiva trivial $C_* \lll C_* \ggg C_*$.
- En algunos casos, se conocen resultados teóricos que nos dan una equivalencia entre un complejo de cadenas C_* y otro complejo de cadenas **efectivo**. Ejemplo: $C_*(K(\mathbb{Z},1)) \ggg C_*(S^1)$.
- El siguiente **meta-teorema** da un método para calcular la homología efectiva de espacios **complicados**.

Cálculo de homología efectiva

Meta-teorema

Sean $X_1, \ldots, X_k$ una colección de objetos con homología efectiva y Φ un "constructor habitual":

$$\Phi : (X_1, \ldots, X_k) \to X.$$

Entonces existe una versión con homología efectiva Φ^{EH}

$$\Phi^{EH} : ((X_1, C(X_1), EC_1, \varepsilon_1), \ldots, (X_k, C(X_k), EC_k, \varepsilon_k)) \to (X, C(X), EC, \varepsilon)$$

El proceso es estable y puede ser usado de nuevo para cálculos sucesivos.

Ejemplos: producto cartesiano de conj. simpliciales, productos cartesianos torcidos, espacios de lazos, espacios clasificantes, suspensiones, etc.

Nota: Se necesitan algoritmos particulares para cada uno de los constructores anteriores.

Definición

Un **conjunto simplicial** K consiste en:

- un conjunto K_n para cada entero $n \geq 0$;
- para cada pareja de enteros (i, n) tal que $0 \leq i \leq n$, operadores de **cara** y **degeneración** $\partial_i : K_n \to K_{n-1}$ y $s_i : K_n \to K_{n+1}$ que cumplen las **identidades simpliciales:**

$$
\begin{aligned}
\partial_i \partial_j &= \partial_{j-1} \partial_i & \text{si } i < j \\
s_i s_j &= s_{j+1} s_i & \text{si } i \leq j \\
\partial_i s_j &= s_{j-1} \partial_i & \text{si } i < j \\
\partial_i s_j &= \mathrm{Id} & \text{si } i = j, j+1 \\
\partial_i s_j &= s_j \partial_{i-1} & \text{si } i > j+1
\end{aligned}
$$

Es una generalización de complejo simplicial. Un **grupo simplicial** G es un conjunto simplicial donde cada G_n es un grupo y los operadores de cara y degeneración son morfismos de grupos.

Ejemplo: homología efectiva de productos cartesianos

Nota: Un conjunto simplicial K tiene asociado canónicamente un complejo de cadenas $C_*(K) = (C_n(K), d_n)$, donde cada grupo $C_n(K)$ se define como el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por K_n, y la diferencial $d_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ se define como la suma alternada de caras, $d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i$.

Definición

El **producto cartesiano** $X \times Y$ de dos conjuntos simpliciales X e Y es el conjunto simplicial cuyo conjunto de n-símplices es $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$, con caras y degeneraciones definidas componente a componente: si $(x, y) \in (X \times Y)_n$, entonces

$$\begin{aligned} \partial_i(x,y) &= (\partial_i x, \partial_i y), & 0 \le i \le n; \\ s_i(x,y) &= (s_i x, s_i y), & 0 \le i \le n. \end{aligned}$$

Ejemplo: homología efectiva de productos cartesianos

Teorema (Eilenberg y Zilber, 1953)

Dados dos conjuntos simpliciales X e Y, existe una reducción

$$\rho = (f, g, h) : C_*(X \times Y) \Rrightarrow C_*(X) \otimes C_*(Y).$$

Proposición

Dadas dos reducciones $\rho = (f, g, h) : C_* \Rrightarrow D_*$ y $\rho' = (f', g', h') : C'_* \Rrightarrow D'_*$, se tiene una reducción $\rho'' = \rho \otimes \rho' = (f'', g'', h'') : C_* \otimes C'_* \Rrightarrow D_* \otimes D'_*$ dada por

$$f'' = f \otimes f', \qquad g'' = g \otimes g', \qquad h'' = h \otimes \mathrm{Id}_{C'_*} + (gf) \otimes h'.$$

Ejemplo: homología efectiva de productos cartesianos

Dados X e Y conjuntos simpliciales con homologías efectivas $C_*(X) \Lleftarrow DX_* \Rrightarrow EX_*$ y $C_*(Y) \Lleftarrow DY_* \Rrightarrow EY_*$, la homología efectiva de $X \times Y$ se construye como la composición de las equivalencias:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & C_*(X \times Y) \arrow[dl, Rightarrow, "\mathrm{Id}"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\rho_1"] & & DX_* \otimes DY_* \arrow[dl, Rightarrow, "\rho_2"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\rho_3"] & \\ C_*(X \times Y) & & C_*(X) \otimes C_*(Y) & & EX_* \otimes EY_* \end{tikzcd}$$

¿Qué es Kenzo?

- **Kenzo** es un sistema de Cálculo Simbólico para Topología Algebraica Constructiva, desarrollado por Francis Sergeraert.
- El acrónimo CAT (Constructive Algebraic Topology) le dio a Francis la idea del nombre del programa.

- El objetivo de Kenzo es determinar grupos de homología y homotopía de espacios complicados.

Ejemplo:

$$X = \Omega(\Omega(\Omega(P^{\infty}\mathbb{R}/P^{3}\mathbb{R}) \cup_4 D^4) \cup_2 D^2)$$

$$H_5(X) = (\mathbb{Z}/2)^{23} \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/16$$
$$H_6(X) = (\mathbb{Z}/2)^{52} \oplus (\mathbb{Z}/4)^3 \oplus \mathbb{Z}^3$$
$$H_7(X) = (\mathbb{Z}/2)^{113} \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus (\mathbb{Z}/8)^3 \oplus \mathbb{Z}/16 \oplus \mathbb{Z}/32 \oplus \mathbb{Z}$$

X es complicado y no es de tipo finito.

El sistema Kenzo usa la noción de **objeto con homología efectiva** para calcular grupos de homología de espacios complicados.

- Si el complejo es efectivo, entonces sus grupos de homología se pueden determinar por medio de algoritmos de diagonalización de matrices.
- En otro caso, el programa usa la homología efectiva.

Objetos infinitos y programación funcional

En Kenzo, los objetos infinitos se codifican mediante **programación funcional** (Common Lisp).

No podemos implementarlos de forma **global** (no podemos almacenar la lista de todos los generadores o símplices) pero podemos trabajar con sus elementos de forma **local**.

Ejemplo típico: $K(G, 1)$

Dado un grupo G, $K(G,1)$ es un conjunto simplicial

tal que el conjunto de n-simplices de $K(G,1)$ es:

$$K(G,1)_n := \{(a_1, \ldots, a_n), a_i \in G\} = G^n$$

- Si G es finito, entonces $K(G,1)$ es de tipo finito.
- Si G no es finito, entonces $K(G,1)$ no es de tipo finito.

Cómo se implementa $K(\mathbb{Z}, 1)$ en Kenzo?

No podemos implementarlo de forma **global** (no podemos almacenar la lista de todos los símplices) pero podemos trabajar con los elementos de $K(\mathbb{Z}, 1)$ de forma **local**.

Ejemplos de operador de cara en $K(\mathbb{Z}, 1)$:

$$\partial_2(3, 4, 5, 6, 7) := (3, 4 + 5, 6, 7) = (3, 9, 6, 7)$$

$$\partial_4(3, 9, 6, 5, 2) := (3, 9, 6, 5 + 2) = (3, 9, 6, 7)$$

Problema:

¿Cómo podemos obtener propiedades “globales” de este tipo de objetos?

Ejemplo:

¿Cómo podemos calcular los grupos de homología de un conjunto simplicial de tipo infinito codificado funcionalmente?

Solución: homología efectiva

Combinando objetos infinitos y objetos finitos.

$\text{Objeto} = \boxed{\textbf{Parte-Inf} \ \Lleftarrow\!\!\!\Rrightarrow \ \textbf{Parte-Fin}}$

Kenzo almacena esta información dentro de un campo de cada objeto que construimos.

- Sucesiones espectrales de complejos filtrados (A. R., J. Rubio, F. Sergeraert, 2006)

  Permite, en particular, calcular las sucesiones de Serre y Eilenberg-Moore de fibraciones de espacios con homología efectiva.

- Homología de grupos (A. R., J. Rubio, 2009)

  En el artículo: *R.Mikhailov and J. Wu, On homotopy groups of the suspended classifying spaces. Algebraic and Geometric Topology, 2010, vol.10, pp.565–625* los autores afirman en el Teorema 5.4:

  Let A_4 be the 4-th alternating group. Then $\pi_4(\Sigma K(A_4,1)) = \mathbb{Z}_4$

  Nuestros programas producen un resultado diferente, $\pi_4(\Sigma K(A_4,1)) = \mathbb{Z}_{12}$.

  Los autores del artículo se olvidadon de la componente 3-primaria (admitido en una comunicación privada).

Módulos externos de Kenzo

- Campos de vectores discretos (F. Sergeraert, 2010)
- Homología persistente (A. R., J. Rubio, F. Sergeraert, 2010)
- Homotopía efectiva (A. R., J. Rubio, F. Sergeraert, 2015)
- Sucesiones espectrales generalizadas y sistemas espectrales de Serre (A. Guidolin, A. R., 2018 y 2020)
- Espacios topológicos finitos (J. Cuevas-Rozo, L. Lambán, A. R., H. Sarria, 2020)
- Persistencia multiparamétrica (A. Guidolin, J. Divasón, A. R., 2020)
- Grupos de homotopía de espacios simplemente conexos (J. Heras, A. R., 2021)
- Sucesión espectral de Eilenberg–Moore para fibraciones generales (A. R., J. Rubio, F. Sergeraert, M. Szymik 2020)
- Nuevos sistemas espectrales (D. Miguel, 2022)

¿Cómo podemos usar Kenzo?

- Con un IDE de Common Lisp (Allegro Common Lisp, LispWorks, ...)
  - Instrucciones de instalación: `www.unirioja.es/cu/anromero/KenzoInstallInstructions.pdf`
  - Ejemplos: `www.unirioja.es/cu/anromero/EJT_lisp_sesion1.cl`

- (Parcialmente) Paquete opcional de Kenzo e interfaz dentro de SageMath
  Trabajo conjunto con J. Cuevas-Rozo, J. Divasón y M. Marco-Buzunáriz
  Permite comunicar ambos sistemas. En particular, podemos calcular en SageMath grupos de homología y homotopía de espacios complicados.
  - Ejemplos (cuaderno de Jupyter): `www.unirioja.es/cu/anromero/EJT_sage_sesion1.ipynb`

Bibliografía

F. Sergeraert. *The computability problem in Algebraic Topology*. Advances in Mathematics 104(1) (1994), 1–29.

J. Rubio, F. Sergeraert. *Constructive Algebraic Topology*. Bulletin des Sciences Mathématiques 126(5) (2002), 389–412.

J. Rubio, F. Sergeraert. *Constructive Homological Algebra and Applications*. Preprint, 2006, `http://arxiv.org/abs/1208.3816`

X. Dousson, J. Rubio, F. Sergeraert, Y. Siret. *The Kenzo program*. Institut Fourier, Grenoble, 1999, `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Kenzo/`

J. P. May. *Simplicial objects in Algebraic Topology*. Van Nostrand Mathematical Studies, University of Chicago Press, 1967.

S. Eilenberg, J. A. Zilber. *On products of complexes*. American Journal of Mathematics 75 (1953), 200–204.

J. Cuevas-Rozo, J. Divasón, M. Marco-Buzunáriz, A. Romero. *Integration of the Kenzo system within SageMath for new algebraic topology computations*. Mathematics 9(7), (2021) 722.