UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Taller de Matemáticas:
De Arquímedes a Cavalieri
hacia el cálculo integral
UR, 8 de Abril de 2011

Contenido:

Este pequeño dossier de 8 páginas es parte del taller completo que puedes encontrar en:

http://jorge-fernandez/talleres/taller_cavalieri/index.html

Página: 2. Los indivisibles:

El principio de Cavalieri funciona cuando hablamos de indivisibles y hay que tener en cuenta que nuestra simulación será mejor cuanto más cerca de un indivisible estén nuestros cortes o secciones.

Página: 3. Corte de un cilindro:

Desarrollo para recortar y observar que, cortando un cilindro por un plano inclinado, obtenemos una elipse.

Página: 4. Demostrando … una falsedad:

La demostración es algo importante, fundamental en matemáticas. Uno de nuestros participantes nos desengaña de una conjetura falsa por muy bonita que hubiera sido.

Página: 5. Área de la elipse por Cavalieri:

Detalle de cómo, aplicando el principio de Cavalieri concluimos que:

$\text{Área de la Elipse} = \pi \cdot a \cdot b$

Siendo ***"a"*** uno de los semiejes y ***"b"*** el otro semieje.

Página: 6. Desarrollo recortable de una pirámide inclinada

Si observamos veremos que, cada corte paralelo a la base de ésta pirámide inclinada es un cuadrado exactamente igual que el que aparecería en una pirámide de base cuadrada no inclinada de la que hemos detallado a la derecha una de sus caras laterales.

Página: 7. Cuadratura de la parábola

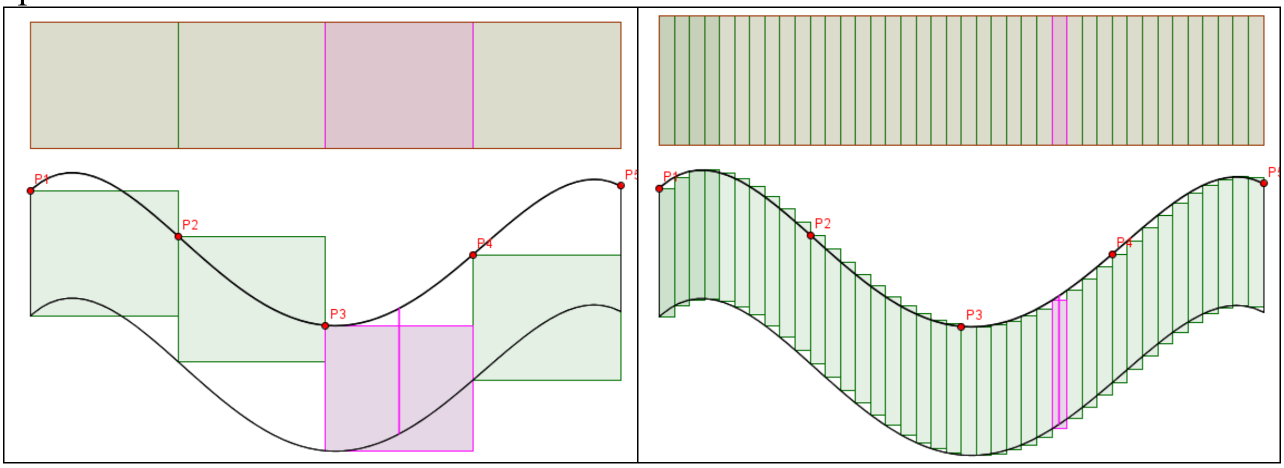
Detalle de cómo, abusando del principio de Cavalieri, conseguimos cuadrar la parábola.

Página: 8. Cubatura de la esfera por Cavalieri

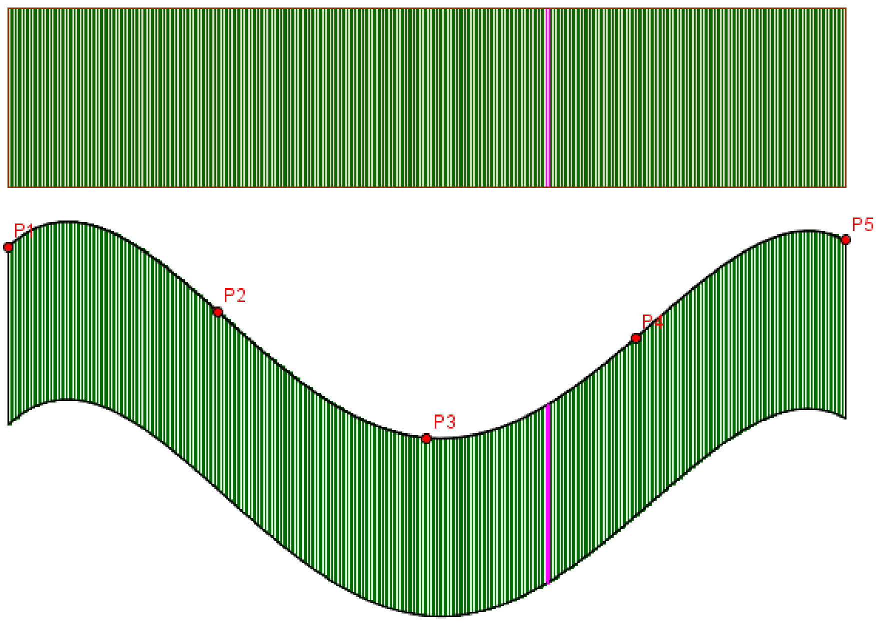
Si laminamos un cuarto de esfera por planos verticales vamos obteniendo semicírculos.
De cada uno de estos semicírculos podemos calcular su área.
Pero, resulta que, esta secuencia de láminas de semicírculos puede compararse con una secuencia de láminas de cuadrados a las que le vamos quitando un pedacito que, en cada caso, será un pequeño cuadrado. Todo esto nos conforma un cubo al que le hemos quitado una pirámide y, por tanto, es muy fácil calcular su volumen. Éste nos permitirá ahora calcular el correspondiente volumen de la esfera.

Los Indivisibles:

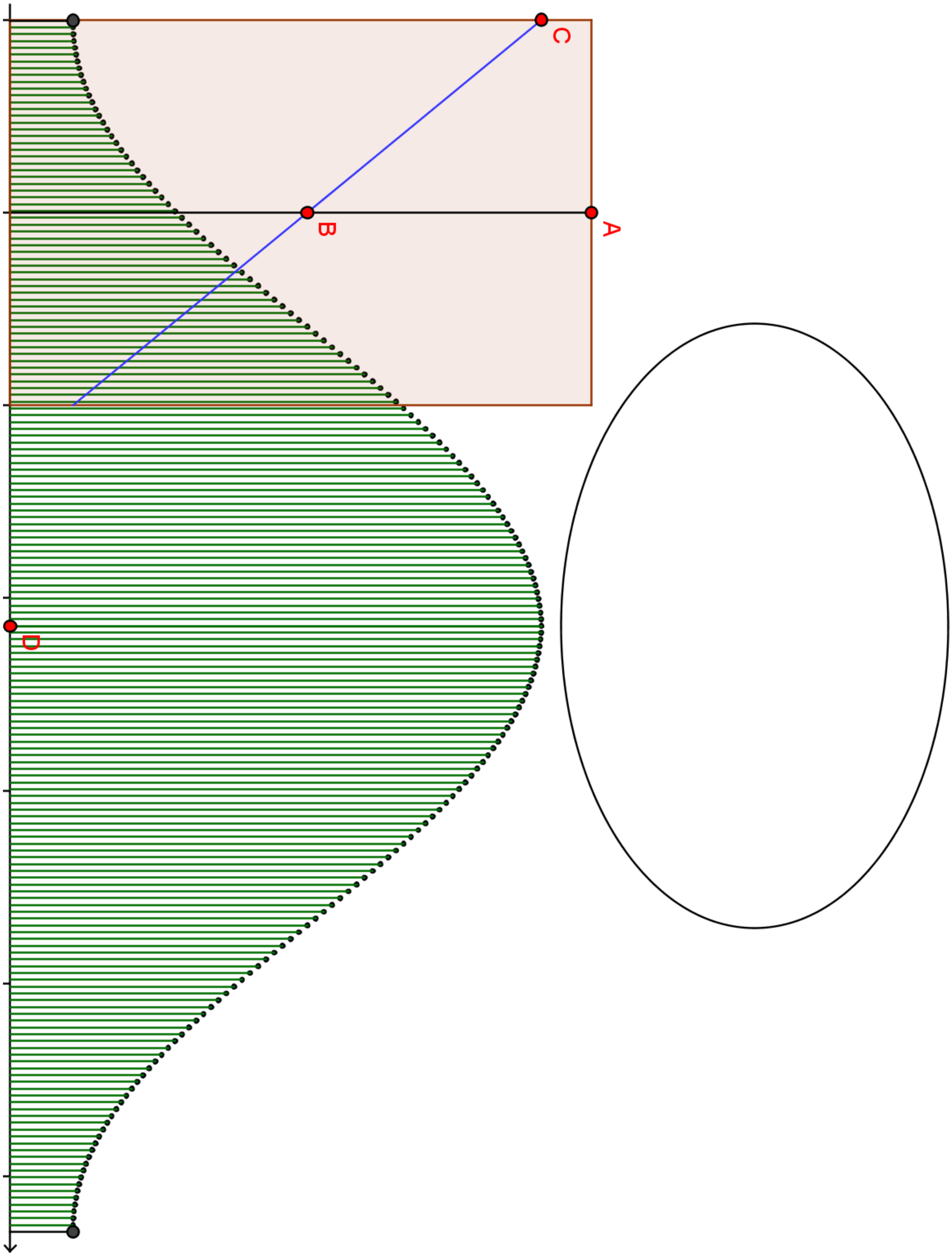
Si nuestros cortes no son tales indivisibles sino elementos muy gruesos, la figura delimitada por las líneas curvas no se parecerá a la figura delimitada por nuestras piezas.



Cuanto más se aproximen nuestros cortes a indivisibles, más estaremos ajustando la idea a la realidad



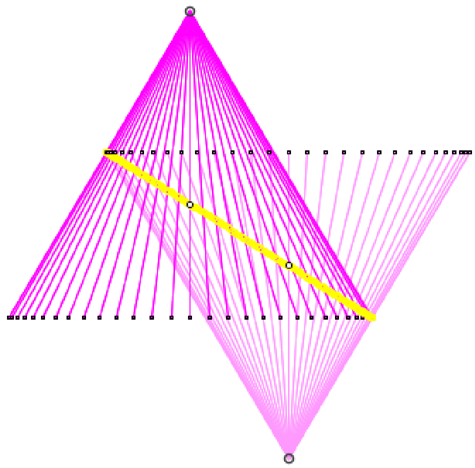
Corte de un cilindro:

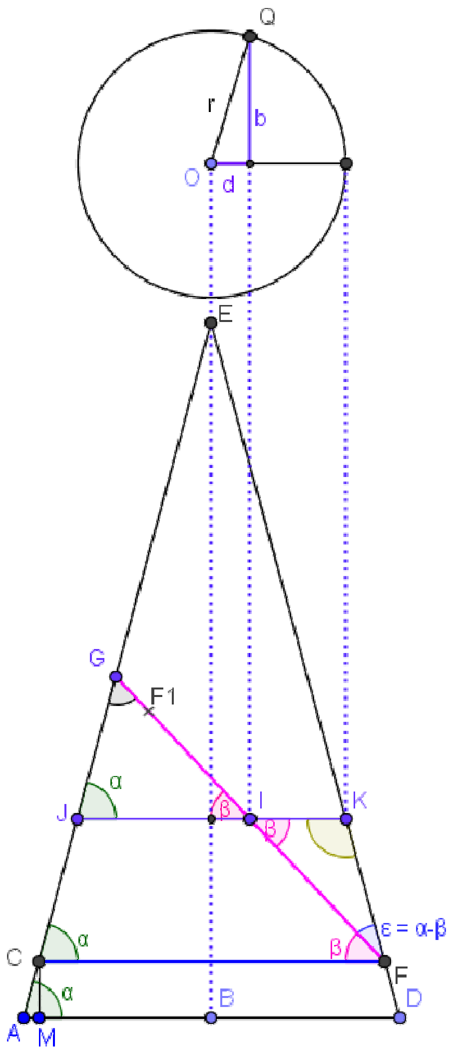


El propio Arquímedes introdujo en sus escritos algún resultado erróneo:
[…] resulta que añadí a la lista dos problemas de los que yo aún no había determinado completamente la solución, para que los que andan diciendo que lo descubren todo pero no dan a conocer ninguna demostración queden refutados por haber admitido que habían descubierto imposibles.

Tratado sobre las líneas espirales
Arquímedes

Y hubiera sido hermoso que fuera cierto que los focos de una elipse salen de una figura como la de la derecha, pero, como nos ha demostrado alguno de nuestros participantes, es falso.





$$\overline{AM}=\frac{\overline{CM}}{\tan(\beta)}$$

$$\overline{CF}=2*(\overline{AD}-\overline{AM})$$

$$\frac{\sin(C)}{GF}=\frac{\sin(G)}{CF}\Rightarrow 2a=GF=\frac{\overline{CF}*\sin(\alpha)}{\sin(180°-\alpha-\beta)}$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{a}=\frac{\sin(G)}{\overline{JI}}\Rightarrow \overline{JI}=\frac{a*\sin(G)}{\sin(\alpha)}$$

$$\frac{\sin(K)}{a}=\frac{\sin(\varepsilon)}{\overline{IK}}\Rightarrow \overline{IK}=\frac{a*\sin(\varepsilon)}{\sin(K)}$$

$$\boxed{d=r-\overline{IK}}$$

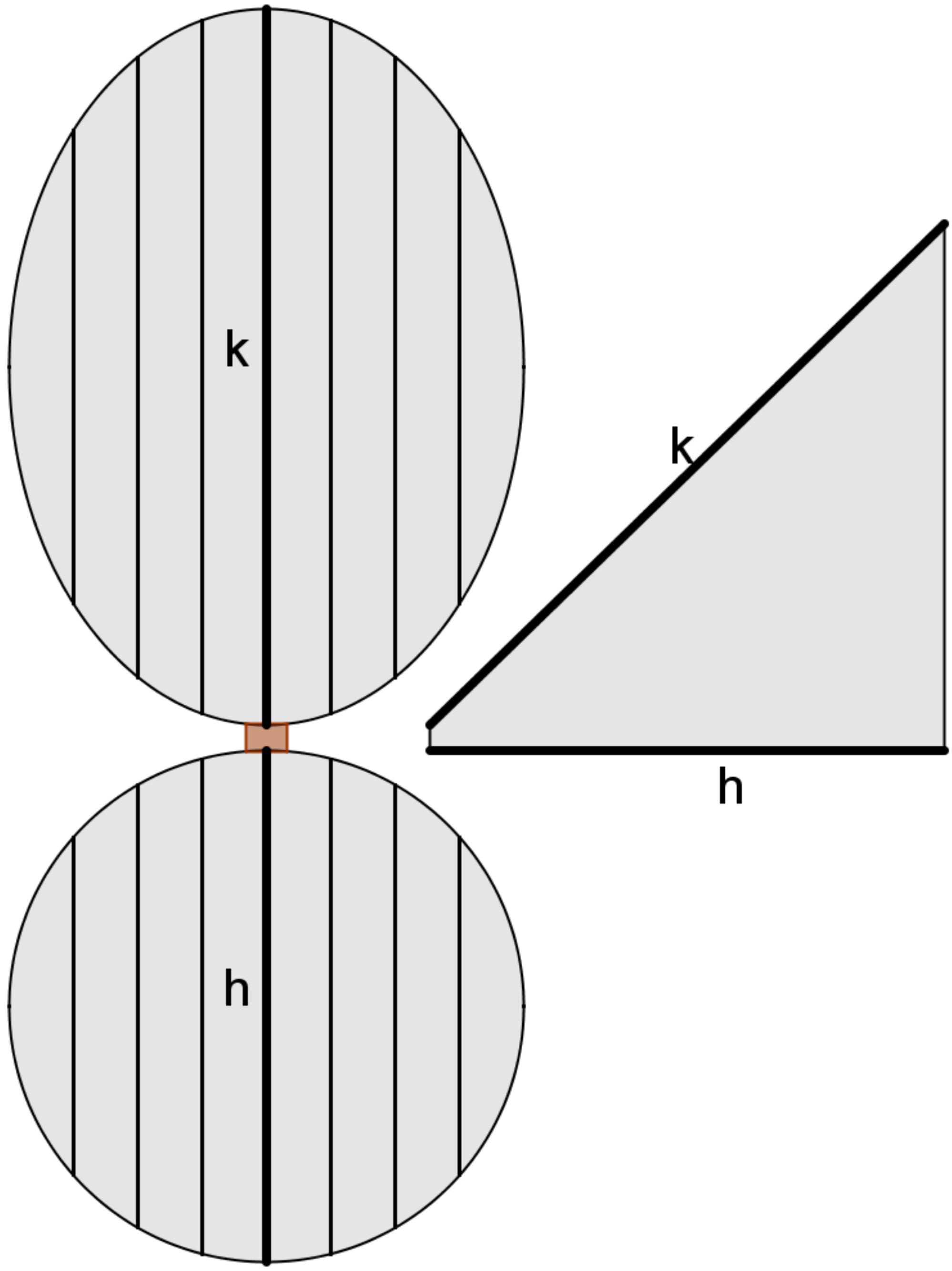
$$b=\sqrt{r^2-d^2}$$

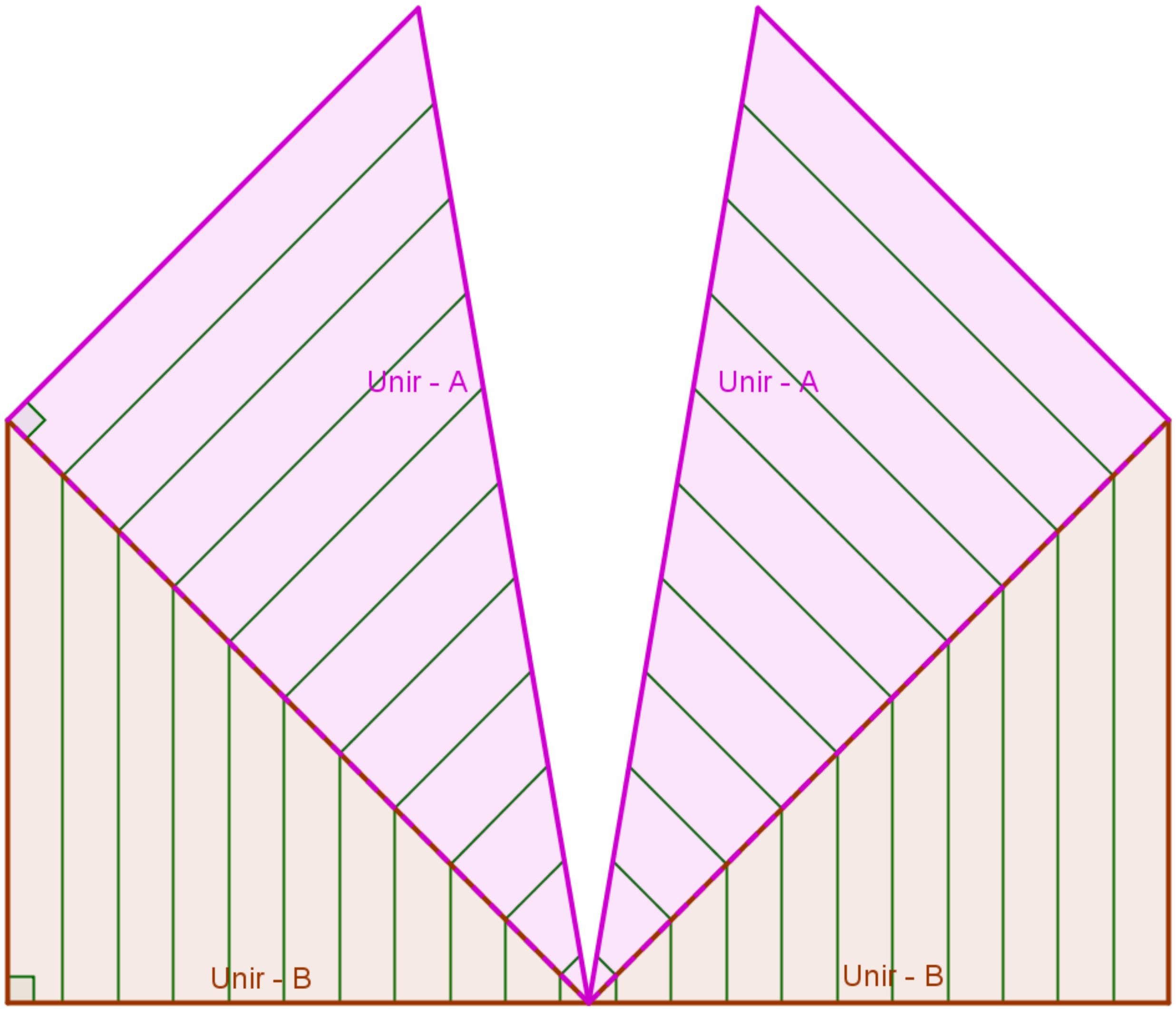
$$c=\sqrt{(a)^2-b^2}$$

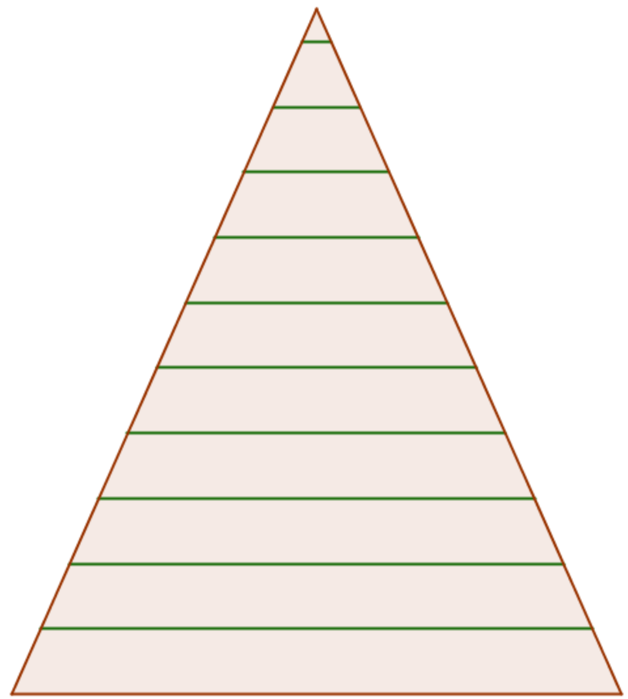
Área de la elipse por Cavalieri:

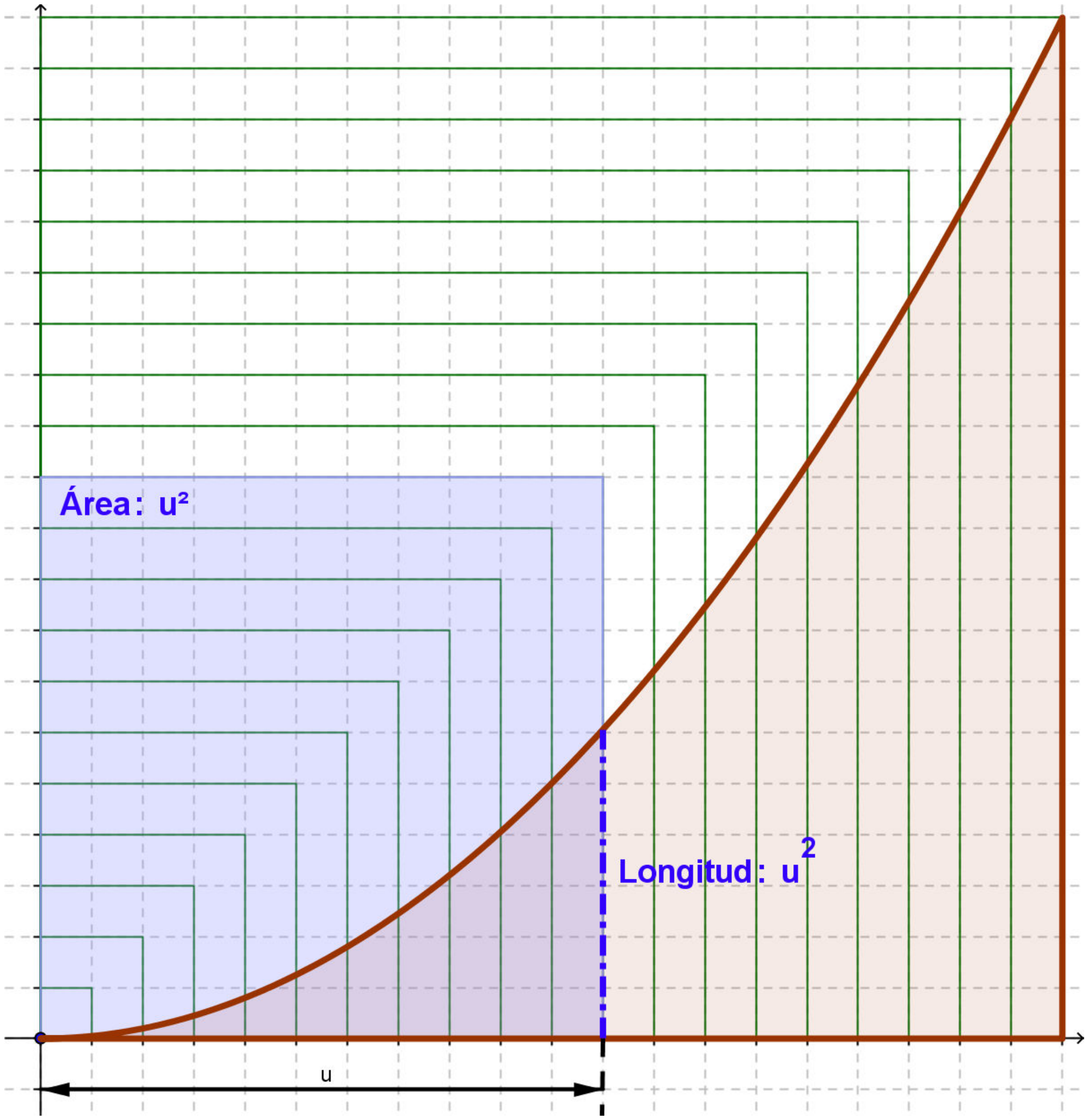
Cada sección por un plano vertical de un cilindro deja en la elipse una línea y su correspondiente en la circunferencia de la base.

Cada corte de la elipse mide $\frac{t}{Cos\alpha}$, siendo t la medida del corte en el círculo y α el ángulo del corte aplicado al cilindro para obtener la elipse.
Haciendo el desarrollo en el plano observamos que es equivalente a alinear la elipse y el círculo en paralelo por el eje menor de la elipse y cortarlos por líneas verticales.
En este caso




Unir - A
Unir - A
Unir - B
Unir - B





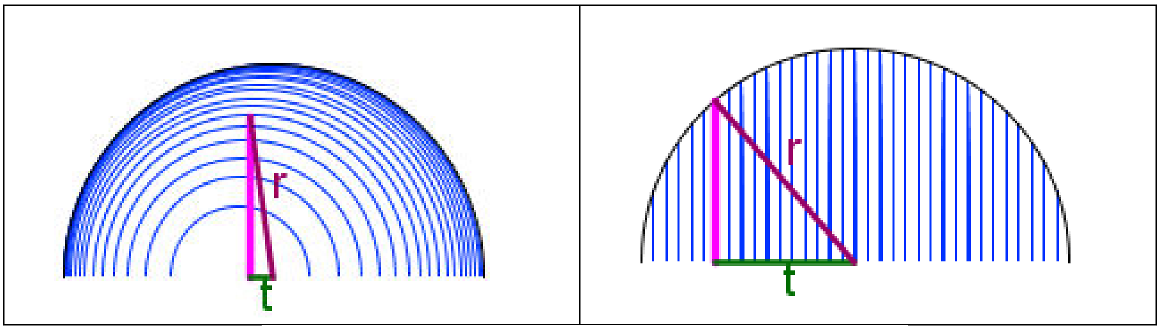
Cada sección de la parábola $y = x^2$ (línea vertical con $x = U$) tiene una longitud que, en valor, es el mismo que el área del correspondiente cuadrado de lado U, $\acute{A}rea = U^2$.

La unión de la secuencia de líneas conforman la parábola

La unión de la secuencia de cuadrados conforman una pirámide de la que conocemos su volumen: $\frac{1}{3}\left(\acute{A}rea\ base \cdot altura\right)$.

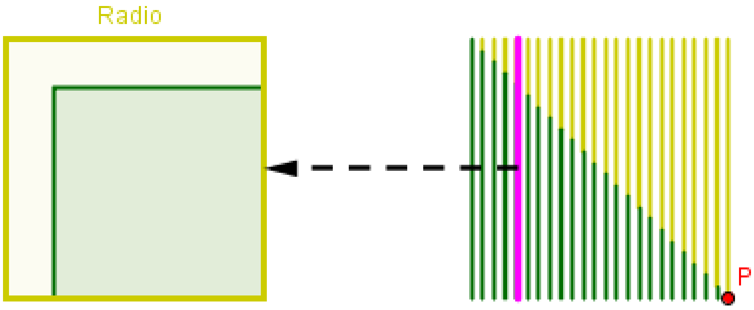
Haciendo ahora el paralelismo inverso, el número del volumen de la pirámide nos dará el número del área de la figura bajo la parábola.

Seccionando la esfera por planos verticales



$$\text{Área de cada sección} = \frac{\pi\cdot\left(r^2-t^2\right)}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\left(r^2-t^2\right)$$

Pero, observando, cada sección se puede comparar con:



$$\text{Área de Cada sección} = r^2-t^2$$

$$\frac{\text{Volumen Esfera}}{\text{Volumen Figura}} = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\left(r^2-t^2\right)}{r^2-t^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Volumen Figura} = r^3 - \frac{r^3}{3} = \frac{2\cdot r^3}{3}$$

Luego:

$$\text{Volumen}\left(\frac{\text{Esfera}}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\cdot r^3}{3}}{4} = \frac{\pi\cdot r^3}{3}$$