LIII OME - SEGUNDA PRUEBA FASE LOCAL, COMUNIDAD DE MADRID

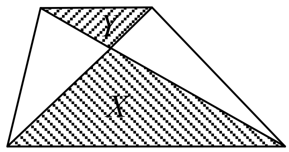
21 de diciembre de 2016

---

1. El producto de dos números del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 26\}$ es igual a la suma de los restantes. Encuentra dichos números.

2. Un "capicúa" es un número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. (Por ejemplo, 323 ó 19591). ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor capicúa, si ambos son de cinco cifras y múltiplos de 45?

3. Dividimos el trapecio de la figura en cuatro triángulos trazando las diagonales. Si X e Y son las áreas de los triángulos sombreados, obtén en función de X e Y el área del trapecio.

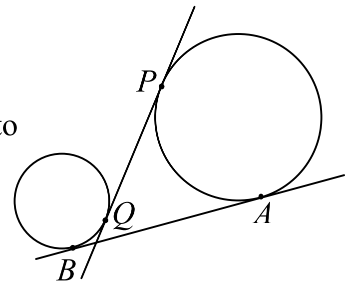


4. Considera las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ en las que a, b y c son números primos de una sola cifra. ¿En cuántas de estas ecuaciones hay al menos una solución entera?

5. En una bolsa hay bolas rojas y bolas azules, en total menos de 2016. Sabemos que la probabilidad de que al coger dos bolas (sin reemplazamiento) sean ambas del mismo color, es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el máximo número de bolas rojas que puede haber en la bolsa?

6. Los puntos de corte de la parábola $y = x^2 - ax + 2a$ con el eje de abscisas, tienen coordenadas enteras. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de a?

7. El dibujo muestra dos circunferencias y dos rectas tangentes a ambas Siendo A, B, P y Q los puntos de tangencia. Si la longitud del segmento PQ es 14 y la del AB es 16, calcula el producto de los radios de las circunferencias.



8. En una circunferencia de centro O y diámetro AB marcamos un punto C (distinto de A y B) desde el que trazamos la perpendicular al diámetro AB, al que corta en el punto D. Si M es un punto de la cuerda BC tal que $B\widehat{M}O = 90^\circ$ y $DB = 3 \cdot OM$, calcula el ángulo $A\hat{B}C$.

9. Hay un único triángulo ABC para el que $AC = 14$, $\cos \mathrm{A} = \frac{4}{5}$ y el radio del círculo inscrito es 4. Calcula el área de dicho triángulo.

10. Sean x, y, z números reales tales que: $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} + 3\sqrt{z-9} = \frac{x+y+z}{2}$. Determinar el valor de $x + 2y + 3z$.