Seminario de problemas. Curso 2017–18. Hoja 4 (Congruencias)

25. Busca un criterio de divisibilidad por 37.

26. Se ha escrito un número. Luego se ha escrito otro, permutando las cifras del primero. La diferencia de los dos números es 2691726X ¿Qué dígito es la última cifra representada por X?

27. Demostrar que un número es divisible por 4 si y sólo si sus unidades más el duplo de sus decenas es múltiplo de 4.

28. Hallar el resto al dividir 29^{2017} por 3.

29. Un número está formado por dos cifras idénticas. Probar que tal número divide al que se forma intercalando en el primero un número par de ceros entre sus dos cifras.

30. Sea p un primo. Comprueba que, entonces, $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ si y sólo si $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

31. Prueba que al dividir el número 2^{p-1} por el primo impar p el resto es 1 (ejemplos: $2^2 = 3a + 1$, $2^4 = 5b + 1$, $2^6 = 7c + 1$, $2^{10} - 1 = 1023 = 11 \cdot 93$).

32. La suma de los cubos de tres enteros se resta del cubo de la suma de estos números. ¿Esta diferencia es siempre divisible por 3?

Misma pregunta con la potencia quinta y la divisibilidad por 5, y para la potencia séptima y la divisibilidad por 7.

Primer extra. Prueba que, si n y m son enteros y $m > 2$, entonces $3^m \pm 1 \neq 2^n$.

Segundo extra. Demuestra que no existe ningún polinomio f de coeficientes enteros y grado mayor o igual que 1 tal que $f(n)$ sea un número primo para todo $n \in \mathbb{Z}$ (y tampoco si sólo exigimos que $f(n)$ sea primo para los $n \geq n_0$).

Nota: Este bonito resultado es debido a Christian Goldbach, quien lo probó en 1752. Goldbach es mucho más conocido por su famosa conjetura «cada número par mayor que dos puede escribirse como suma de dos primos», formulada en 1742, y que aún permanece abierta.

Sugerencia: Toma $a \in \mathbb{Z}$ y $p = f(a)$. Ahora, aplicando que los polinomios conservan las congruencias (es decir, $r \equiv s \pmod{p} \Rightarrow f(r) \equiv f(s) \pmod{p}$), construye una demostración por reducción al absurdo.