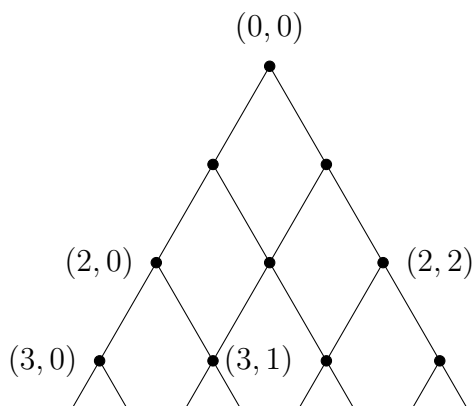


Seminario de problemas. Curso 2017-18. Hoja 11 (Probabilidad)

- 78.** *Homenaje a Cacumen, con reproche:* En el antiguo reino de Trapizonda, que nunca existió, a los reos condenados a muerte se les concedía una última oportunidad: eran puestos, con los ojos vendados, en un lugar aleatorio del interior de un círculo pintado en el suelo, desde donde debían caminar (en línea recta y en la dirección que quisieran) una distancia igual al radio. Si no se salían del círculo eran liberados. ¿Qué probabilidad tenían de lograrlo?
- Nota:* la aleatoriedad de la posición en el círculo era *uniforme*: la probabilidad de ser puestos en una región cualquiera era proporcional al área de dicha región.
- 79.** Decimos que un dado es equilibrado si las seis caras salen con la misma probabilidad. Si lanzamos dos veces consecutivas un dado equilibrado, halla la probabilidad de obtener ambas veces el mismo resultado. Prueba también que, si el dado no es equilibrado, la probabilidad es mayor.
- 80.** Una permutación de $(1, 2, \dots, n)$ fija un número de elementos variable entre 0 y n . Por ejemplo, para $n = 5$, la permutación $(1, 3, 5, 4, 2)$ fija dos elementos –solo 1 y 4 están en su lugar inicial– y $(2, 5, 1, 3, 4)$ no fija ninguno. Calcula el promedio del número de elementos que fijan todas las permutaciones de $(1, 2, \dots, n)$.
- 81.** Este trata sobre caminos aleatorios: una partícula cae desde la cúspide (nivel 0) de un mallado triangular como el del dibujo en un descenso sin fin. Si a los nodos del nivel n los denominamos $(n, 0), (n, 1), \dots, (n, n)$, entonces del nodo (n, k) puede descender bien al $(n+1, k)$ o bien al $(n+1, k+1)$.



Llamaremos $c_{n,k}$ al número de maneras de llegar a (n, k) , y $p_{n,k}$ a la probabilidad de que un camino descendente pase por (n, k) , supuesto que la probabilidad de tomar cada bifurcación es $1/2$.

- Expresa la relación de recurrencia que determina $c_{n+1,k}$ en función de los valores $c_{n,i}$.
- Expresa la relación análoga para $p_{n+1,k}$.
- Prueba que $\sum_{k=0}^n c_{n,k} = 2^n$ para cada n . ¿Cómo se interpreta combinatoriamente esta identidad?
- Prueba que $\sum_{k=0}^n p_{n,k} = 1$ y que $\sum_{k=0}^n p_{n+k,k} = 1$ para cada n . ¿Cómo se interpretan probabilísticamente ambas identidades?

- 82.** Epi y Blas tenían en una urna $2n$ bolas de cristal, distintas tan solo por su color: n blancas y n negras. En lugar de jugarse las cosas a cara o cruz, Epi sacaba dos de las bolas a ciegas, y ganaba si eran de distinto color. Calcula si tenía ventaja.

El caso es que les gusta jugarse las cosas con esa probabilidad, pero por desgracia han perdido una de las bolas. ¿Qué deben hacer?

- 83.** a) A y B (se llaman así) juegan por turnos tirando a canasta, empezando A . Su probabilidad de acierto es p , y la de B es q ($0 < p, q < 1$, y no cambian con el cansancio por mucho que jueguen). Gana el primero que enceste. ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno?

b) Queremos jugar al parchís pero no tenemos dados, aunque sí tenemos una moneda equilibrada. ¿Cómo podemos decidir, lanzando sucesivamente la moneda, un resultado entre 1, 2, 3, 4, 5 y 6, todos con la misma probabilidad? Hay varias soluciones, pero se pide una en la que, a partir del tercero, todos los lanzamientos o bien deciden el resultado o bien obligan a lanzar otra vez.

- 84.** Elegimos un elemento X_n de la lista $(1, 2, \dots, n)$, procediendo como sigue: un primer valor n_1 tomado al azar (quiere decirse que todos son equiprobables) hace que nos quedemos con la lista $(n, n-1, \dots, n_1)$. Un segundo valor al azar entre los que quedan, n_2 , nos deja la lista $(n_1, \dots, n_2)$, y así sucesivamente (en cada paso rechazamos los anteriores al elegido e invertimos el orden). Terminamos cuando la lista es de un solo elemento, y ese es X_n .

¿Cuál es la probabilidad de que sea $X_n = n$?