

## Seminario de problemas. Curso 2017-18. Hoja 10 (Geometría 2)

---

71. En el interior de un cuadrado de lados  $ABCD$ , elegimos un punto  $E$  de modo que  $\angle ECD = \angle EDC = 15^\circ$ . Probar que el triángulo  $AEB$  es equilátero.
72. Calcular el área de un octógono convexo inscrito en un círculo que tiene cuatro lados consecutivos de longitud  $3u$  y los otros cuatro lados de longitud  $2u$ . Dar la respuesta en la forma  $a + b\sqrt{c}$ .
73. Probar que, entre todos los triángulos de base  $AB$  y ángulo opuesto  $C$  fijos, el triángulo con longitud de bisectriz del ángulo  $C$  máxima es el isósceles.
74. Sea  $ABC$  un triángulo rectángulo en  $C$ , con hipotenusa  $AB$  y cateto más largo  $BC$ . La circunferencia de centro  $D$  y radio  $DC$  corta a la recta  $AB$  en dos puntos distintos  $E$  y  $F$ , de tal modo que  $F$  está sobre la hipotenusa  $AB$ . Si  $P$  es el punto de corte entre el segmento  $QE$  y el cateto  $AC$ , probar que  $PE = QF$ .
75. Tomamos tres puntos fijos alineados  $A, B, C$  y ordenados de izquierda a derecha. Sea  $\gamma$  una circunferencia que pasa por  $A$  y  $C$  cuyo centro no está sobre  $AC$  y  $P$  el punto por el que pasan las tangentes a  $\gamma$  por  $A$  y  $C$ . La circunferencia  $\gamma$  corta a la recta  $PB$  en el punto  $Q$ . Probar que el punto de corte de la bisectriz del ángulo  $\angle AQC$  y la recta  $AC$  es independiente de la circunferencia  $\gamma$  tomada.
76. Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos circunferencias concéntricas de radios  $R$  y  $r$  respectivamente con  $R > r$ . En la circunferencia pequeña, tomamos un punto  $P$  fijo y  $B$  un punto variable de la grande. La recta  $BP$  corta a la circunferencia grande en el punto  $C$  al otro lado de  $P$ . La recta perpendicular  $l$  a  $BP$  por el punto  $P$  corta a la pequeña en el punto  $A$  (si  $l$  es tangente a la circunferencia pequeña,  $P = A$ ). Se pide:
- Calcular  $BC^2 + CA^2 + AB^2$ .
  - Calcular el lugar geométrico del punto medio de  $AB$ .
77. En un triángulo  $ABC$ , sea  $P$  el pie de la altura desde el vértice  $A$  y  $H$  el ortocentro. Si  $a = \frac{AP}{HP}$ :
- Expresar la relación entre los ángulos sobre los vértices  $B$  y  $C$  en función de  $a$ .
  - Si  $B$  y  $C$  son fijos, hallar el lugar geométrico del vértice  $A$  para cada valor de  $a$ .