GEOMETRÍA 2

Introducción a la Geometría analítica

Las ideas básicas del análisis elemental, orden, distancia, operaciones con números, nacen de situaciones bien concretas y visuales. Miguel de Guzmán (1936-2004)

Dos de cada cuatro problemas propuestos en olimpiadas tratan sobre vectores, geometría clásica, números complejos y transformaciones geométricas. Hemos visto métodos para resolver problemas usando relaciones entre figuras de forma muy elegante (Geometría 1: Recursos básicos en Geometría plana). La aproximación a la resolución de problemas mediante el uso de coordenadas es menos creativa pero puede se de gran utilidad. Las coordenadas permiten expresar relaciones geométricas mediante fórmulas relacionando de esta manera Geometría y Álgebra. En estas notas presentamos algunas estrategias de trabajo con configuraciones geométricas y con coordenadas.

Contenidos

1. Heurística en resolución de problemas
2. Geometría con coordenadas
   a) Vectores y coordenadas
   b) Ecuaciones y fórmulas básicas en el plano euclídeo
3. Propuesta de problemas

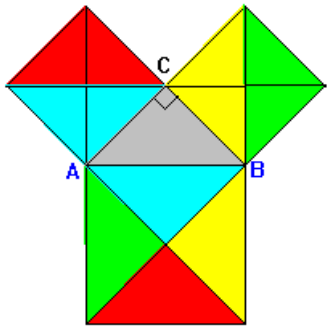
1. Heurística y problemas

Hay distintas estrategias y tácticas básicas, pequeñas ideas que son sencillas pero potentes a la hora de resolver problemas de matemáticas. Los siguientes ejemplos ilustran algunas de ellas. En muchos casos una simple figura proporciona el resultado sin necesidad de añadir palabra alguna. Este tipo de pruebas se dicen demostraciones visuales o demostraciones sin palabras. Desde una configuración geométrica asociada a un problema, la obtención de una figura adecuada que nos permita desarrollar un procedimiento de resolución del problema requiere crear líneas auxiliares y/o arcos de circunferencia que localizamos por simetrías, traslaciones, extensiones o rotación de la figura o de partes de la misma.

Ejemplo 1.1. Completar una figura.

Teorema de Pitágoras: En un triángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

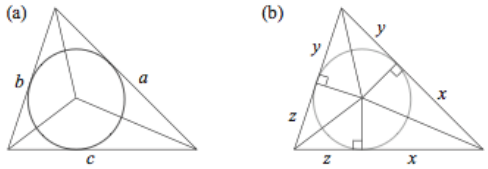
Solución 1: Triángulo rectángulo isósceles. Sobre cada lado del triángulo rectángulo, construímos un cuadrado y dibujamos sus diagonales, llegando a la figura coloreada que nos da una demostración visual de la fórmula en este caso particular.



Solución 2. (Localizada en el documento chino Chou pei suan ching, 200 BC) Completamos a cuadrado de lado a+b y usamos traslaciones de triángulos.

Ejemplo 1.2. Explotar la simetría de una figura.

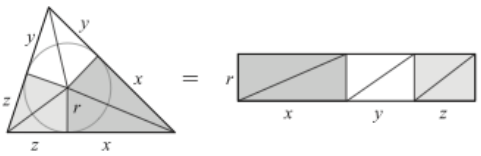
Sustitución de Ravi: Esta configuración nos permite dar una demostración rápida de la fórmula del área de un triángulo usando el semiperímetro y el radio de la circunferencia inscrita. También es util en demostraciones de desigualdades que involucran a los lados de un triángulo.



$a = x + y, b = y + z, c = z + x.$

Aplicación 1. El área de un de un triángulo T de lados a, b, c se puede expresar en la forma: $A = r \cdot p$ donde r es el radio de la circunferencia inscrita en T y p es el semiperímetro, luego $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Solución.



Aplicación 2. (Alessandro Padoa, 1925) En cualquier triángulo de lados a, b, c se cumple la siguiente desigualdad:

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Solución. Usamos la sustitución de Ravi ytenemos que la desigualdad es equivalente a probar

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq (2x)(2y)(2z) = 8xyz.$$

Aplicamos ahora la desigualdad de media aritmética y geométrica, $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ y tenemos el resultado:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 2\sqrt{xy}\,2\sqrt{yz}\,2\sqrt{zx} = 8xyz.$$

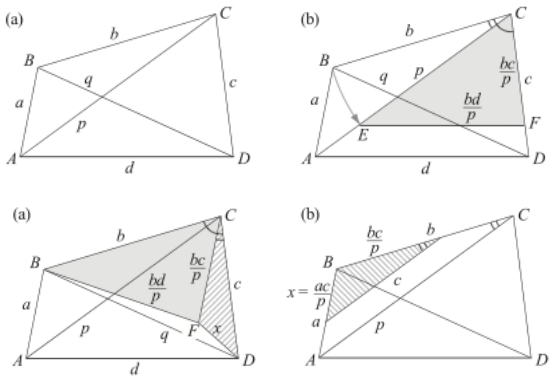
Ejemplo 1.3. Modificar una figura usando rotaciones.

Desigualdad de Ptolomeo: En cualquier cuadrilátero convexo, el producto de sus diagonales es menor o igual que la suma de los productos de sus lados opuestos[1].

Solución. Dibujamos el cuadrilátero de vérices $ABCD$ y longitudes de lados a, b, c, d. Rotamos el lado $\overline{BC}$ con centro el vérice C un ángulo $\angle BCA$ (sentido antihorario) hasta hacerlo coincidir sobre la diagonal AC obteniendo el punto E, luego $BC = CE$. Trazamos la paralela a $\overline{AD}$ desde el punto E que corta al lado $\overline{CD}$ en el punto F. Ahora tenemos que los triángulos CEF y CAD son semejantes; de la relación de semejanza obtenemos las longitudes de los lados de CEF que aparecen en la figura. Rotamos el triángulo CEF sobre el vérice C hasta hacer coincidir E y B. Y observamos el triángulo rayado $DF'C$. Escsribimos $x = FD$ y, desde la figura, observamos que se cumple la desigualdad $bd/p + x \geq q$. El triángulo $DF'C$ es semejante a ABC: tenemos la proporcionalidad $BC/CF = p/c = CA/CD$ y estos lados proporcionales determinan el mismo ángulo. De este modo, $x = ac/p$. Así

$$bd/p + ac/p \geq q,$$

lo que nos da la desigualdad.

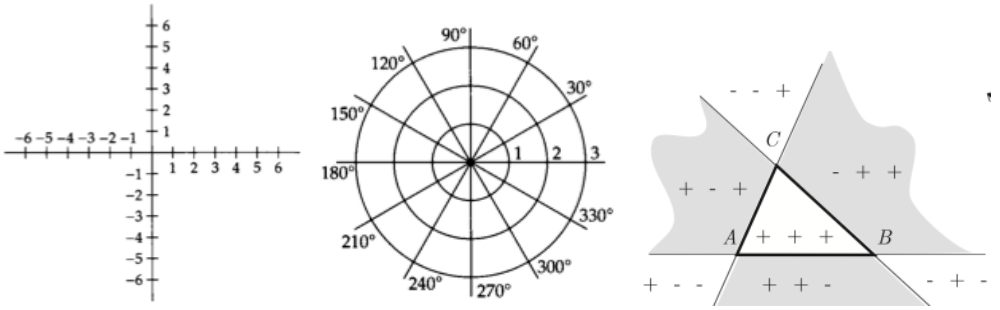


[1]El Teorema de Ptolomeo afirma que la igualdad se da si y solamente si el cuadriláteto es cíclico (ver Geomettría 1: Recursos básicos en Geometría plana)

2. Geometría con coordenadas: Geometría analítica vs sintética

El trabajo con coordenadas cartesianas (en el plano (A) tenemos ejes perpendiculares x, y con igual unidad de distancia 1; plano dividido cuadrados 1×1) es habitual en Secundaria y Bachillerato para la representación de los puntos del plano y del espacio. Cada punto está determinado de forma única por su posición respecto el origen de coordenadas y las unidad de medida (igual) que hemos fijado en cada uno de los ejes. Si los dos ejes cartesianos en el plano, los inclinamos uno sobre otro (sin hacerlos coincidir) y tomamos unidades distintas en cada eje, tenemos el plano dividido otra vez en cuatro regiones y cada punto del plano tiene, de nuevo, una única representación (el plano ahora lo tenemos dividido en paralelogramos. Esto indica que existen múltiples formas distintas de establecer coordenadas siempre y cuando los puntos queden determinados de forma única. En el plano podemos trabajar con otro tipo de coordenadas distintas de las cartesianas:

- (B) Coordenadas polares: cada punto se referencia mediante una par (r, θ) usando la distancia al origen del punto (r) y el ángulo con respecto al eje (habitualmente el x).
- (C) Coordenadas baricéntricas: plano dividido en seis regiones mediante un triángulo ABC llamado de referencia (6 exteriores al triángulo y una interior). Los puntos se describen mediante 3 coordenadas $P(x : y : z)$ que indican la proporción del área de ABC y las áreas de cada uno de los tres triángulos que el punto P determina con los vértices del triángulo de referencia . En algunos problemas geométricos, la resolución en coordenadas baricéntricas proporciona un método limpio, rápido y elegante. En otros, resulta engorroso.



(A) (B) (C)

En el espacio, el sistema de coordenadas análogo a las polares son las coordenadas esféricas.

El uso de unos sistemas coordenadas u otros en el plano y el espacio euclídeo, depende de la expresión de las ecuaciones de las curvas mediante ecuaciones y de cómo cada sistema expresa y maneja las transformaciones básicas: traslaciones, rotaciones y reflexiones. En estas notas nos vamos a dedicar solamente a ejemplificar soluciones en coordenadas cartesianas. Veremos que esta técnica es muy habitual, por ejemplo, en el cálculo de lugares geométricos. En este tipo de problemas, expresamos las condiciones del enunciado

para describir las coordenadas de un punto genérico P del lugar geométrico que queremos describir. Cuando empleamos coordenadas para resolver problemas, es importante una buena elección de los ejes y del tipo de ecuaciones que nos interesa buscar (paramétricas ó generales).

Antes de empezar vamos a formalizar adecuadamente los vectores libres, aunque no trabajaremos este concepto desde el punto de vista de resolución de problemas.

2.1. Vectores en el plano y en el espacio real. Podemos pensar en los vectores (libres) en dos y tres dimensiones como segmentos orientados. Dos puntos cualesquiera P y Q definen un vector $\overrightarrow{PQ}$ de origen P y extremo Q. En un tal vector distinguiremos los siguientes conceptos:

- Su módulo $\|\overrightarrow{PQ}\| =\mid PQ \mid = PQ$: distancia de P a Q. Las notaciones alternativas $\mid PQ \mid$ y PQ si no hay lugar a confusión.
- Su dirección: la de la recta que lo contiene, que es la misma que la de cualquier paralela a ella.
- Su sentido: para andar por casa, el que "indica su flecha"[2].
- Si $P = Q$ el vector que definen tiene módulo cero y se dice vector nulo. Escribimos $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$.
- Dos vectores son iguales si tienen el mismo módulo, dirección y sentido; esto es, los vectores están en rectas paralelas y tienen la misma orientación.
- Si fijamos un punto O, para cada vector $\vec{v}$ hay un único vector igual $\vec{v}$ con origen en el punto O.
- Dados dos vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, el ángulo entre ambos es el ángulo $\alpha \in [0, \pi]$ entre vectores iguales a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que tienen un mismo origen.

Disponemos de varias operaciones entre vectores:

- Suma de vectores $\vec{u} + \vec{v}$ (ley del paralelogramo).
- Multiplicacón por un número real a, lo escribimos como $\overrightarrow{a\vec{u}}$. El producto por un número a, reescala el módulo del vector: $\|\overrightarrow{a\vec{u}}\| = a\|\vec{u}\|$. Si a es negativo, $\vec{u}$ y $\overrightarrow{a\vec{u}}$ tienen sentidos contrarios y el mismo sentido si a es positivo. El vector $-\vec{u} = (-1)\vec{u}$ se dice vector opuesto de $\vec{u}$. La resta de vectores
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}),$$
queda definida como la suma con el opuesto.
- El producto escalar entre vectores es el número real (donde α es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$):
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|u\|\|v\| \cos \alpha.$$
Si el ángulo entre los vectores es $\pi/2$, los vectores se dicen ortogonales o perpendiculares (su producto escalar es cero).

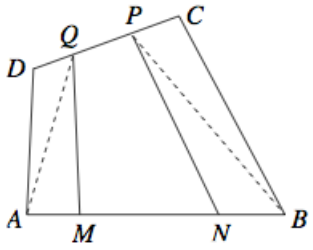
[2]De forma rigurosa, el módulo está determinado de forma única por la distancia de los puntos que definen el vector. La dirección y sentido se definen usando rectas. Una dirección y dos sentidos por cada haz de rectas paralelas a la recta que contiene los puntos que definen el vector

En tres dimensiones disponemos de dos operaciones adicionales entre vectores. El producto vectorial denotado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ y el mixto $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$, que es un combinado entre escalar y vectorial. Los tres productos tienen significados geométricos muy interesantes:

- El producto escalar nos proporciona el llamado vector proyección ortogonal, $proj_{\vec{u}}(\vec{v})$, de un vector sobre el otro:
$$proj_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}.$$
- El producto vectorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es un vector ortogonal al plano que determinan los otros dos vectores (regla del sacacorchos girando la mano desde el vector $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$) con módulo:
$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|u\|\|v\| \sin \alpha.$$
Este módulo es igual al área del paralelogramo que determinan ambos vectores.

Un ejemplo de problema sobre vectores (se puede dar una solución simple usando el producto vectorial y operaciones básicas entre vectores):

Ejemplo. En un cuadriláteto convexo $ABCD$, tomamos cuatro puntos, M y N sobre el lado AB y P y Q sobre el lado CD. Probar que si $AM = NB$, $CP = QD$ y los cuadriláteros $AMQD$ y $BNPC$ tienen la misma área, los lados AB y CD son paralelos.



2.2. Coordenadas cartesianas. Es una terna en el plano $\{0, \vec{u_1}, \vec{u_2}\}$, cuaterna en el espacio $\{0, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$, formada por un punto O, llamado origen de coordenadas y dos o tres vectores de módulo 1 y ortogonales entre sí.

Todo vector $\vec{v}$ del plano o $\vec{w}$ del espacio se puede expresar mediante suma de los vectores $\vec{u_i}$ multiplicados por números reales, a, b, c (los números a, b y c son únicos):

$$\vec{v} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2} \text{ (en el plano)} \quad \vec{v} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3} \text{ (en el espacio).}$$

Escritos como un par ordenado $\vec{v} = (a, b)$ o terna ordenada $\vec{W} = (a, b, c)$ se dicen coordenadas de $\vec{u}$ respecto de $\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ o $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}$).

Cada punto P del plano tiene asociado el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ y las coordenadas de $P(x, y)$ en el sistema cartesiano son las de su vector de posición, esto es:

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{u_1} + y\vec{u_2}.$$

En el espacio tenemos $P(x, y, z)$. El sistema de referencia nos permite dar una representación coordenada única para cada punto del plano.

Las operaciones de suma entre vectores del plano relacionan las coordenadas del vector $\overrightarrow{PQ}$ usando las coordenadas de su origen $P(p_1, p_2)$ y su extremo $Q(q_1, q_2)$ en la forma:

$$\overrightarrow{OP} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2).$$

Esta relación permite introducir la suma de un punto $P(p_1, p_2)$ y un vector $\vec{v} = (a, b)$ de coordenadas (a, b) como el punto $Q(q_1 + a, q_2 + b)$, lo que equivale a que $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. En el espacio sucede lo mismo.

2.3. Ecuaciones y fórmulas básicas.

PLANO EUCLÍDEO

a) Producto escalar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

donde $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

b) Coordenadas del punto M que divide al segmento $\overline{PQ}$ de extremos $P(p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ en la proporción $m : n$,

$$M(\frac{np_1 + mq_1}{m+n}, \frac{np_2 + mq_2}{m+n}).$$

c) Condición para que tres puntos $P(p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ y $R(r_1, r_2)$ distintos estén alineados ($p_i \neq q_i$ para $i = 1, 2$),

$$\frac{r_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{r_2 - p_2}{q_2 - p_2}.$$

En otro caso: $p_i = q_i = r_i$.

d) Coordenadas del baricentro G de un triángulo $\triangle ABC$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$,

$$G(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}).$$

e) Una recta l está definida por un punto P y la dirección de un vector no nulo $\vec{u}$. Hay distintas formas de expresarla:

- Ecuación general o implícita:

$$l \equiv ax + by + c = 0.$$

Aquí, $(a, b) \neq (0, 0)$ y $P(x, y)$ representa las coordenadas de un punto cualquiera de l y $\vec{u} = (-b, a)$ es un vector de dirección de l.

- Vector de dirección de l con origen y extremo puntos de P y Q de l: $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ donde $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$.
- Ejes coordenados: $y = 0$ ecuación eje x, $x = 0$ ecuación eje y.
- Pendiente de l:

$$m = \tan \alpha = \frac{b}{a},$$

donde $\alpha \in [0, \pi]$ es el ángulo que la recta forma con el eje x ó su vector director es $\vec{u} = (a, b)$.

- Si $b \neq 0$ la ecuación la podemos escribir como $y = mx + n$.
- Si $b = 0$ la recta tiene ecuación $x = k$ y es paralela al eje y (pendiente infinito). Si $a = 0$, la ecuación de l es $y = k$ siendo paralela al eje x (pendiente 0).
- Si $P(a, b)$ es un punto de l y m es su pendiente, la recta se l se describe con la ecuación

$$y - b = m(x - a).$$

- Ángulo entre dos rectas distintas que se cortan: ángulo $\alpha \in [0, \pi/2]$ que forman dos de sus vectores de dirección.
- Rectas paralelas tienen vectores directores proporcionales. Así:

$$l_1 \| l_2 \Longleftrightarrow m_1 = m_2.$$

- Rectas perpendiculares tienen vectores directores ortogonales. De este modo,

$$l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow m_1 m_2 = -1.$$

f) Distancias:
- Modulo o norma de un vector: $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
- Distancia entre dos puntos:

$$d(P(p_1, p_2), Q(q_1, q_2)) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}.$$

- Distancia del punto $P(p_1, p_2)$ a la recta $ax + by + c = 0$,

$$d(P, l) = \frac{\mid ap_1 + bp_2 + c \mid}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Espacio Euclídeo

a) Producto escalar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

donde $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

b) Coordenadas del punto M que divide al segmento $\overline{PQ}$ de extremos $P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ en la proporción $m : n$,

$$M(\frac{np_1 + mq_1}{m + n}, \frac{np_2 + mq_2}{m + n}, \frac{np_3 + mq_3}{m + n}).$$

c) Condición para que tres puntos $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $R(r_1, r_2, r_3)$ distintos estén alineados ($p_i \neq q_i$ para $i = 1, 2$),

$$\frac{r_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \frac{r_2 - p_2}{q_2 - p_2} = \frac{r_3 - p_3}{q_3 - p_3}.$$

d) Coordenadas del baricentro G de un triángulo $\triangle ABC$, $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$,

$$G(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}, \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3}).$$

e) Un plano π está definido por un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y dos vectores de dirección no proporcionales $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

- Ecuación general o implícita de un plano:

$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0,$$

donde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $P(x, y, z)$ representa las coordenadas de un punto aritrario y $\vec{v} = (a, b, c)$ es un vector perpendicular al plano llamado vector característico del plano.

- La ecuación de π usando el punto P y los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ se obtiene de igualar a cero el determinante:

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

- Planos coordenados: $z = 0$ ecuación del plano xy, $y = 0$ ecuación de xz y $x = 0$ ecuación de yz.
- Planos paralelos tienen vectores directores proporcionales. Así:

$$\pi \| \pi' \Longleftrightarrow (a, b, c) = k(a', b', c').$$

- Planos perpendiculares tienen vectores característicos ortogonales. Por tanto:

$$\pi \perp \pi' \Longleftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0.$$

f) Una recta l está definida por un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y la dirección de un vector no nulo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Hay distintas formas de expresarla:

- Ecuación general o implícita de una recta: como intersección de dos planos distintos y no paralelos.
- La ecuación de l usando el punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y el vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$:

$$\frac{x - p_1}{a_1} = \frac{x - p_2}{a_2} = \frac{x - p_3}{a_3}.$$

g) Distancias, ángulos, producto escalar y producto mixto:

- Modulo o norma de un vector: $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.
- Distancia entre dos puntos:

$$d(P(p_1, p_2, p_3), Q(q_1, q_2, q_3)) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}.$$

- Distancia del punto $P(p_1, p_2, p_3)$ al plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ l,

$$d(P, \pi) = \frac{\mid ap_1 + bp_2 + cp_3 + d \mid}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

- Distancia del punto $P(p_1, p_2, p_3)$ a la recta l (deducible geométricamente de forma simple).
- Ángulo entre dos planos de vectores característicos (a, b, c) y (a', b', c'),

$$d(\pi, \pi') = \frac{\mid aa' + bb' + cc' \mid}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

- Ángulo entre plano de vector característico (a, b, c) y recta de vector de dirección (a_1, a_2, a_3),

$$d(\pi, l) = \frac{\mid aa_1 + ba_2 + ca_3 \mid}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

- Ángulo entre dos rectas de vectores de dirección (a_1, a_2, a_3) y (a_1', a_2', a_3'),

$$d(l, l') = \frac{\mid a_1a_1' + a_2a_2' + a_3a_3' \mid}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2}}.$$

- Las coordenadas del vector producto vectorial de $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ se obtienen desde el determinante:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{u_1} + (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{u_2} + (a_1b_2 - a_2b1)\vec{u_2}$$

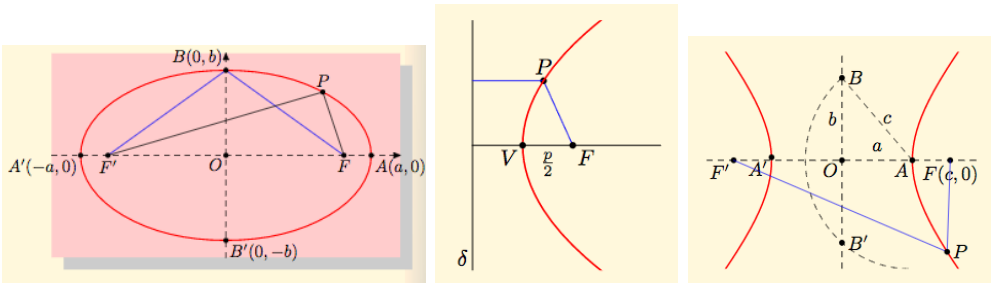
- El producto mixto de tres vectores en el espacio euclídeo se puede expresar mediante el determinante (coordenadas de $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, lo mismo para $\vec{b}$ y $\vec{c}$):

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

2.4. Cónicas en el plano. La ecuación general de una curva cuadrática en el plano es

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0.$$

Esta curva (excepto casos degenerados, recta , punto, plano completo y conjunto vacío) se dice cónica y se puede obtener haciendo diferentes secciones de un cono circular recto. Hay tres tipos de cónicas no degeneradas: parábola, elipse e hipérbola.



(A) (B) (C)

- (A) La elipse es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos es constante:

$$\mid PF \mid + \mid PF' \mid = 2a.$$

La imagen nos proporciona una elipse de centro $O(0,0)$ en el origen de coordenadas, semiejes mayor y menor a y b, focos $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$. En este caso su ecuación (llamada reducida o canónica) es (observamos además que $a^2 = b^2 + c^2$):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- (B) La parábola es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ del plano a igual distancia de un punto fijo F llamado foco y de una recta fija l llamada directriz:

$$| PF | = d(P,l).$$

La imagen nos proporciona una parábola de vérice $V(0,0)$ en el origen de coordenadas, foco $F(\frac{p}{2},0)$ y directriz $l \equiv x = -\frac{p}{2}$. La recta VF se dice eje de la parábola. En este caso su ecuación (llamada reducida o canónica) es:

$$y^2 = 2px.$$

- (C) La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos, es constante.

$$| PF | + | PF' | = 2a.$$

La imagen nos proporciona una hipérbola de centro $O(0,0)$ en el origen de coordenadas, semiejes mayor y menor a y b, focos $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$. En este caso su ecuación (llamada reducida o canónica) es (observamos además que $c^2 = a^2 + b^2$):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Las ecuaciones canónicas de estas secciones cónicas aparecen en el siguiente cuadro, en forma implícita y en forma paramétrica.

NOMBRE	ECUACIÓN IMPLÍCITA	ECUACIONES PARAMÉTRICAS
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\left.\begin{matrix} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\, t \end{matrix}\right\}, 0 \le t < 2\pi$
Hipérbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\left.\begin{matrix} x = a\,ch\,t \\ y = b\,sh\,t \end{matrix}\right\}, -\infty < t < \infty$
Parábola	$y^2 = 2px$	$\left.\begin{matrix} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{matrix}\right\}, -\infty < t < \infty$

2.4. Algunos problemas modelo. De nuevo atenderemos a una cuantas técnicas básicas en la resolución de problemas con coordenadas (aplicables también en otras situaciones).

1: Elegir el sistema coordenado que resulte más adecuado a la figura (configuración) con la que vamos a trabajar. La coordenadas de los puntos relevantes de la configuración deben ser lo más sencillas posibles.

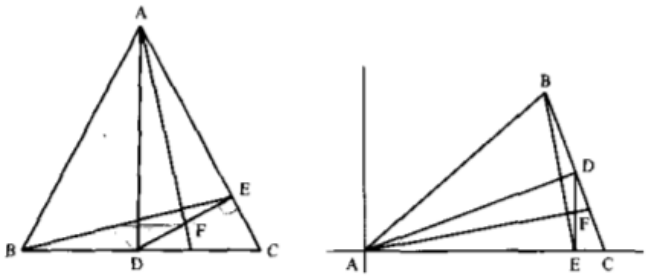
2: Elegir una notación clara (esto incluye las coordenadas y que la figura también lo sea).

3: Al inicio o durante el transcurso de la solución puede ser necesario modificar el problema. En ocasiones resulta más simple probar una generalización y obtener el resultado como un caso particular.

4: Probar un resultado procediendo desde el final al principio puede ser muy ´til (empiezo dando por cierto lo que se me pide probar).

Ejemplo 2.1. Elegir sistema coordenado.
En un triángulo isósceles ABC con $AB = AC$, tomamos el punto medio D del lado BC. El punto E que es el pie de la perpendicular desde el punto D hasta el lado AC. Si F es el punto medio de DE, probar que AF y BE son perpendiculares.

Solución. Comenzamos dibujando la figura y sabiendo que lo que debemos probar es que el producto de las pendientes de las rectas AF y BE, las llamamos m_1 y m_2, debe ser -1. Antes de calcular las coordenadas de puntos y ecuaciones de rectas, observamos bien el dibujo para decidir dónde vamos a situar los ejes coordenados. La figura de la



(A) (B)

izquierda nos induce a pensar que podríamos tomar las recta BC como eje x y la AD como eje y. En este sistema cartesiano, el origen de coordenadas sería el punto $D(0,0)$ y las coordenadas de los vértices del triángulo $B(-b,0)$, $C(b,0)$ y $A(0,a)$. Apartir de aquí podemos encontrar las coordenadas de F y las coordenadas de E, determinar los vectores directores $\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{BE}$ de las rectas AF y BE, obtener las pendientes m_1 y m_2 y comprobar que su producto es -1.

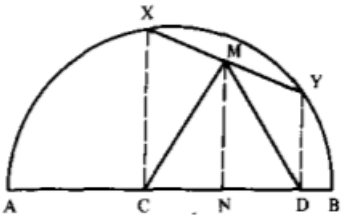
Si construímos la configuración desde la figura de la derecha, ponemos $A(0,0)$ como origen de coordenadas, $B(a,b)$ y $C(c,0)$, las coordenadas de D, E y F, los vectores que necesitamos y las pendientes son fáciles de calcular:

a) $D = (\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2})$, por ser el punto medio del segmento BC.
b) $E = (\frac{a+c}{2}, 0)$, por estar en el eje x y sobre la perpendicular por D.
c) $C = (\frac{a+c}{2}, \frac{b}{4})$, por ser el punto medio del segmento DE.
d) $\overrightarrow{AF} = (\frac{a+c}{2}, \frac{b}{4})$, luego $m_1 = \frac{b}{2(a+c)}$.
e) $\overrightarrow{BE} = (\frac{a+c}{2} - a, -b) = (\frac{c-a}{2}, -b)$, luego $m_2 = \frac{-2b}{2(c-a)}$.

Teniendo en cuenta que $c^2 = a^2 + b^2$, es facil comprobar que $m_1\, m_2 = -1$.

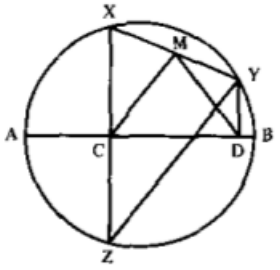
Ejemplo 2.2. Elegir sistema coordenado vs completar figura.

Una cuerda de longitud constante se desliza sobre una semicircunferencia. Si T es el triángulo cuyos vérices son el punto medio de la cuerda y las proyecciones de sus extremos sobre la base de la semicircunferencia, probar que T es isósciles y que los triángulos así obtenidos son todos semejantes.



Solución. (...) En este problema parece natural tomar el centro de la circunferencia O (hay que añadirlo en la figura) como origen de coordenadas y como eje x la recta AB, ya que nos permite localizar de forma simple las coordenadas de los extremos X, Y de la cuerda usando el radio r de la circunferencia y los ángulos θ y α que las rectas OY y OX forman con el eje de abscisas. Mediante cálculos analíticos podemos obtener M, N y D y comprobar que los segmentos MC y MD tienen igual longitud y que el ángulo $\angle MCN$ es fijo, esto es, no depende de la posición de la cuerda.

Si añadimos a la figura la circunferencia completa y prolongamos el segmento XC hasta su intersección con la circunferencia en el punto Z, argumentando con arcos capaces y usando que M y C son puntos medios de XY y de XZ, podemos probar que $\angle MCD = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle MOY}{2}$, luego es fijo pues $\angle MOY$ tan solo depende de la longitud de la cuerda. El resto de detalles quedan como ejercicio.



Ejemplo 2.3 Hallar el lugar geométrico del punto medio P de un segmento de longitud d que se apoya continuamente en los ejes coordenados.

Solución. (...) Se obtiene una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio $\frac{d}{2}$. Para llegar a la solución de una forma clara, se recomienda describir el punto P utilizando el ángulo (variable) que el segmento forma con el eje x.