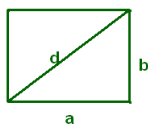


Seminario de problemas-ESO. Curso 2011-12. Hoja 9

46. 1. El área de un rectángulo es 3 y su perímetro 7. ¿Cuál es la longitud de la diagonal?
2. Si O es el origen de coordenadas, A es el punto $(3, 4)$ y B está en la recta OA en el primer cuadrante, ¿cuáles son las coordenadas de B sabiendo que la distancia de A a B es 6?

Solución de 1.



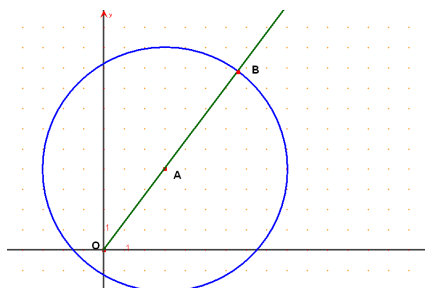
$$\left. \begin{aligned} a + b &= \frac{7}{2} \\ ab &= 3 \end{aligned} \right\}$$

con lo que a y b son las soluciones de la ecuación

$$z^2 - \frac{7}{2}z + 3 = 0; \quad z = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - 3} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Por tanto, $d = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$.

Solución de 2.



$$\overrightarrow{OA} = (3, 4), \quad |\overrightarrow{OA}| = 5, \quad \frac{\overrightarrow{OA}}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$\overrightarrow{AB} = 6 \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = \left(\frac{18}{5}, \frac{24}{5} \right)$$

$$\overrightarrow{OB} = (3, 4) + \left(\frac{18}{5}, \frac{24}{5} \right) = \left(\frac{33}{5}, \frac{44}{5} \right)$$

47. Si a, b y c son tres ceros de $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$, encontrar $a + b + c$ y $a^2 + b^2 + c^2$.

Solución.

$$\left. \begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ ab + ac + bc &= 1 \\ abc &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 + 2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -1$$

48. Encontrar los pares de enteros positivos (x, y) tales que

$$x^2 - 11 \cdot y! = 2003$$

Solución. Si $y = 1$, 2014 no es un cuadrado perfecto.

Si $y = 2$, $x^2 = 2025$, $x = 45$ el par es $(45, 2)$.

Si $y = 3$, 2069 no es un cuadrado perfecto.

Si $y > 3$ es $11 \cdot y! = 4$.

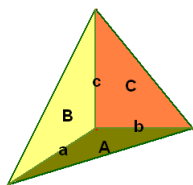
En $\frac{\mathbb{Z}}{\text{mod } 4}$ tenemos

x	x^2
0	0
1	1
2	0
3	1

Como $2003 \equiv 3 \pmod{4}$ es imposible que $x^2 \equiv 3 \pmod{4}$.

49. Encontrar el volumen V de un tetraedro que tiene un vértice trirectángulo O , si son conocidas las áreas A, B y C de las tres caras concurrentes en O .

Solución.



$$V = \frac{1}{6}abc$$

$$V^2 = \frac{1}{36}abacbc$$

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{2ABC}.$$

50. Resolver

$$x^2 - |x| - 1 = 0.$$

Solución. Si $x > 0$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0, \text{ no vale.} \end{cases}$$

Si $x < 0$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0, \text{ no vale.} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

51. Probar que si $x \geq 2, y \geq 2, z \geq 2$, entonces

$$(y^3 + x)(z^3 + y)(x^3 + z) \geq 125xyz.$$

Solución 1.

$$\begin{aligned} & (y^3 + x)(z^3 + y)(x^3 + z) - 125xyz \\ &= x^4y + x^4z^3 + x^3y^4 + x^3y^3z^3 - 124xyz + xz^4 + y^4z + y^3z^4 \\ &\geq x^4y + x^4z^3 + x^3y^4 + 2^2x2^2y2^2z - 124xyz + xz^4 + y^4z + y^3z^4 \\ &= x^4y + x^4z^3 + x^3y^4 + 64xyz - 124xyz + xz^4 + y^4z + y^3z^4 \\ &= x^4y + x^4z^3 + x^3y^4 - 60xyz + xz^4 + y^4z + y^3z^4. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica tenemos

$$xyz = \sqrt[3]{x^3y^3z^3} \leq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3},$$

por tanto

$$\begin{aligned} & x^4y + x^4z^3 + x^3y^4 - 60xyz + xz^4 + y^4z + y^3z^4 \\ &\geq x^4y + x^4z^3 + x^3y^4 - 20(x^3 + y^3 + z^3) + xz^4 + y^4z + y^3z^4 \\ &\geq 2x^3 \cdot 2 + 2^4z^3 + x^3 \cdot 2^4 - 20(x^3 + y^3 + z^3) + 2z^3 \cdot 2 + 2y^3 \cdot 2 + y^3 \cdot 2^4 \\ &= 4x^3 + 16z^3 + 16x^3 + 4z^3 + 4y^3 + 16y^3 - 20(x^3 + y^3 + z^3) = 0. \end{aligned}$$

Solución 2. Notemos que el segundo miembro de la desigualdad puede escribirse como

$$(5x)(5y)(5z).$$

Probaremos que los factores del lado izquierdo de la desigualdad verifican

$$x^3 + z \geq 5x, \quad y^3 + x \geq 5y, \quad z^3 + y \geq 5z,$$

cuando $x \geq 2, y \geq 2, z \geq 2$. En realidad, con probar una de las desigualdades es suficiente, debido a la simetría.

Probar que $x^3 + z \geq 5x$ es equivalente a probar que

$$x^3 - 5x + z \geq 0.$$

Como $z \geq 2$, entonces

$$x^3 - 5x + z \geq x^3 - 5x + 2.$$

Ahora bien,

$$x^3 - 5x + 2 = (x - 2)(x^2 + 2x - 1) = (x - 2)((x + 1)^2 - 2) \geq 0 \quad \text{si } x \geq 2.$$

Por tanto $x^3 + z \geq 5x$, si $x \geq 2, y \geq 2, z \geq 2$ y análogamente $y^3 + x \geq 5y, z^3 + y \geq 5z$, con lo que queda probada la desigualdad ya que

$$(y^3 + x)(z^3 + y)(x^3 + z) \geq (5y)(5z)(5x) = 125xyz.$$