

Seminario de problemas-ESO. Curso 2011-12. Hoja 14

76. Determina el valor de m tal que la ecuación en x

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

tenga cuatro raíces en progresión aritmética.

Solución.

Como la suma de las cuatro raíces es igual a cero (Cardano), y la suma de cuatro números en p. a. es el doble de la suma de los dos extremos, podemos tomar que las raíces sean $-3a$, $-a$, a y $3a$, de modo que

$$(x^2 - a^2)(x^2 - 9a^2) = x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2.$$

Identificando los coeficientes del mismo grado se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 10a^2 = 3m + 2 \\ 9a^4 = m^2. \end{cases}$$

Eliminando a^2 resulta la ecuación $19m^2 - 108m - 36 = 0$. Por lo tanto, $m = 6$ o $m = -6/19$.

77. Prueba que ningún número de la sucesión

$$11, 111, 1111, 11111, \dots$$

es un cuadrado perfecto.

Solución.

Cualquier número s de la sucesión es de la forma

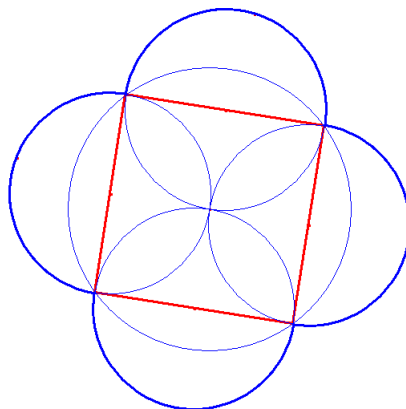
$$s = 11 + 100m = 4(25m + 2) + 3$$

donde m es un entero no negativo. De modo que $s \equiv 3 \pmod{4}$. Pero los cuadrados perfectos son $\equiv 0$ o bien $\equiv 1 \pmod{4}$, así que ningún s es un cuadrado perfecto.

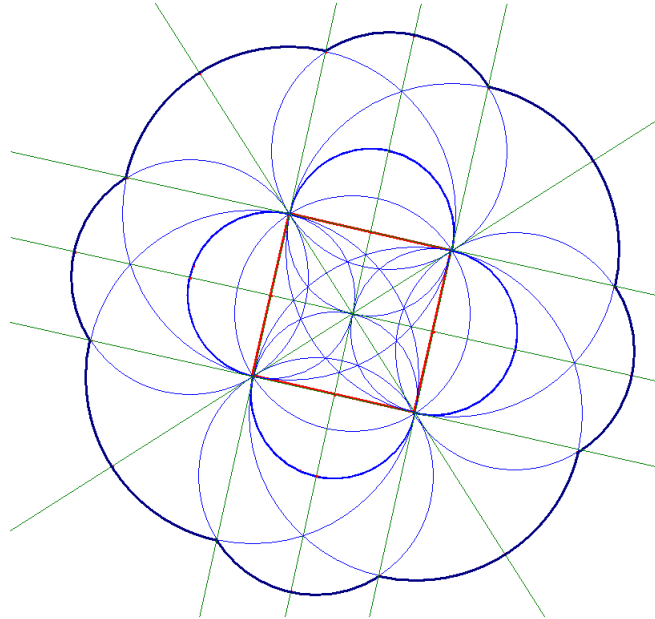
78. Dado un cuadrado, encuentra el lugar geométrico de los puntos de su plano desde los cuales el cuadrado se ve bajo un ángulo de (a) 90° , (b) 45° . (Dado un punto P en el plano del cuadrado y exterior a él, el ángulo bajo el que el cuadrado se ve desde P es el mínimo ángulo con vértice P que contiene el cuadrado.)

Solución.

(a)



(b)



- 79.** Las fracciones de numerador 1 se conocen como *fracciones egipcias*. Prueba que la fracción $\frac{67}{120}$ no se puede expresar como una suma de dos fracciones egipcias. Encuentra una expresión de esta fracción como suma de tres fracciones egipcias y trata de hacer lo más pequeño posible el mayor de los denominadores.

Solución. a) Queremos descomponer $\frac{67}{120}$ en suma de dos fracciones $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ con $a \leq b$. La fracción $\frac{1}{a}$ debe ser

$$\frac{1}{a} \geq \frac{67}{240} > \frac{1}{4}$$

Las únicas posibilidades son $a = 2$

$$\frac{67}{120} - \frac{1}{2} = \frac{7}{120}$$

y $a = 3$

$$\frac{67}{120} - \frac{1}{3} = \frac{9}{40}$$

$$\frac{67}{120} - \frac{1}{4} = \frac{37}{120} > \frac{1}{4}$$

b) Queremos descomponer $\frac{67}{120}$ en suma de tres fracciones $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ con $a \leq b \leq c$. La fracción $\frac{1}{a}$ debe ser

$$\frac{1}{a} \geq \frac{67}{360} > \frac{1}{6}$$

Sabemos que si la fracción $\frac{x}{y}$ es irreducible y común $(y, z) = 1$ entonces $\frac{x}{y} - \frac{1}{z} = \frac{xz-y}{yz}$ es irreducible. Por tanto para conseguir el menor valor de c interesa tomar valores de b divisores de 120.

$$\begin{aligned} \frac{7}{120} - \frac{1}{18} &= \frac{1}{360} \\ \frac{7}{120} - \frac{1}{20} &= \frac{1}{120} \end{aligned}$$

$$\frac{7}{120} - \frac{1}{24} = \frac{1}{60}$$

$$\frac{7}{120} - \frac{1}{30} = \frac{1}{40}$$

$$\frac{9}{40} - \frac{1}{5} = \frac{1}{40}$$

$$\frac{9}{40} - \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{67}{120} - \frac{1}{4} = \frac{37}{120}$$

$$\frac{37}{120} - \frac{1}{6} = \frac{17}{120}$$

$$\frac{37}{120} - \frac{1}{5} = \frac{13}{120}$$

$$\frac{37}{120} - \frac{1}{4} = \frac{7}{120}$$

$$\frac{67}{120} - \frac{1}{5} = \frac{43}{120}$$

$$\frac{43}{120} - \frac{1}{3} = \frac{1}{40}$$

$$\frac{43}{120} - \frac{1}{4} = \frac{13}{120}$$

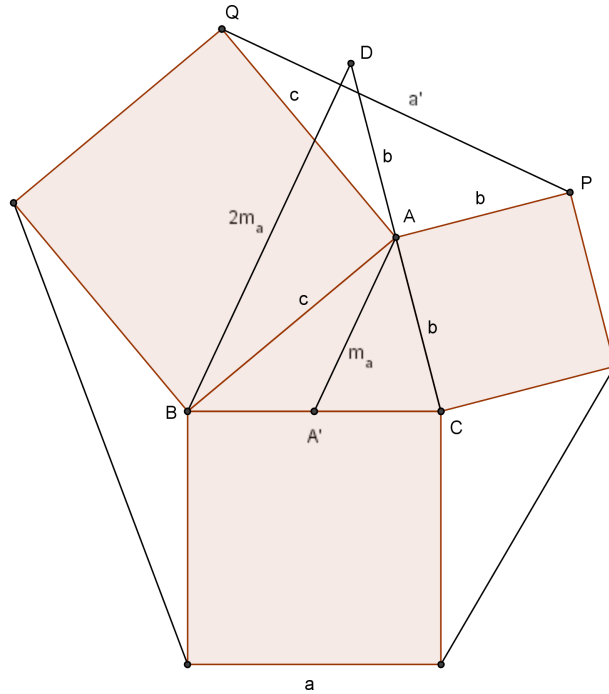
$$\frac{43}{120} - \frac{1}{5} = \frac{19}{120}$$

La solución pedida es

$$\frac{67}{120} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$$

- 80.** Sobre cada uno de los lados de un triángulo se construye un cuadrado (hacia el exterior del triángulo). Los seis vértices de estos tres cuadrados que no coinciden con alguno de los vértices del triángulo forman un hexágono. Tres de los lados de este hexágono son iguales a los correspondientes lados del triángulo. Demuestra que cada uno de los tres lados restantes es igual al doble de una de las medianas del triángulo.

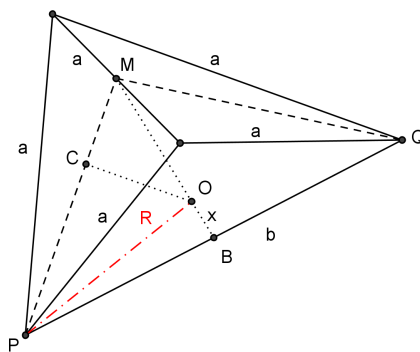
Solución.



Sea A' el punto medio del lado BC del triángulo ABC . Trazar por B una paralela a la mediana AA' , que corta en D a la prolongación del lado CA . Los triángulos ABD y AQP son iguales por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido. Luego los otros lados son iguales, $a' = PQ = 2m_a$.

- 81.** Cinco de las aristas de un tetraedro son de la misma longitud a , y la sexta arista es de longitud b . (a) Expresa en función de a y b el radio de la esfera circunscrita al tetraedro. (b) ¿Cómo se podría usar el resultado del apartado (a) para calcular el radio de una superficie esférica (por ejemplo, el radio de una lente)?

Solución.



(a) (Observar primero que, para que el tetraedro considerado en este problema tenga volumen positivo, se debe cumplir $b < a\sqrt{3}$.) La intersección del plano que contiene a la arista PQ de longitud b y pasa por el punto medio M de la arista opuesta es un triángulo

isósceles PQM en el que los lados iguales miden $a\sqrt{3}/2$. La altura de este triángulo es

$$MB = \frac{\sqrt{3a^2 - b^2}}{2}.$$

El centro O de la esfera circunscrita al tetraedro está en el segmento MB , y la recta que une O con el centro C de una de las caras equiláteras del tetraedro es perpendicular al plano de esa cara. Entonces los triángulos rectángulos OCM y PBM son semejantes. Llamando $x = OB$, se tiene

$$\frac{\frac{\sqrt{3a^2 - b^2}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3a^2 - b^2}}{2}},$$

de donde

$$x = \frac{2a^2 - b^2}{2\sqrt{3a^2 - b^2}}.$$

Llamando R al radio de la esfera circunscrita, se tiene

$$R^2 = x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{(2a^2 - b^2)^2}{4(3a^2 - b^2)} + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2(4a^2 - b^2)}{4(3a^2 - b^2)},$$

y finalmente

$$R = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{3a^2 - b^2}}.$$

(b) Se podría determinar el radio de una superficie esférica mediante un cierto dispositivo en el que cuatro puntos están dispuestos de modo que forman los vértices de dos triángulos equiláteros que comparten un lado común y que pueden girarse en torno a ese lado. Sea a la longitud del lado de estos triángulos. Colocando los cuatro puntos en contacto con la superficie esférica y midiendo la distancia b entre los dos puntos que no son extremos del lado común, se puede calcular mediante la fórmula del apartado (a) el radio de la esfera que pasa por los cuatro puntos en contacto con ella.