LIV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 19 de enero de 2018

1. Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \qquad x^4 - 1$$

Solución

Empezamos viendo que, si $x > 1$, todos los lados son positivos, ya que

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > 0, \quad 2x^3 + x^2 + 2x + 1 > 0, \quad x^4 - 1 > 0.$$

Por otro lado, para que formen un triángulo, debe cumplirse que cada lado debe ser menor que la suma de los otros dos, por lo que se tienen que verificar las siguientes desigualdades:

(i) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 < (2x^3 + x^2 + 2x + 1) + (x^4 - 1)$.

(ii) $2x^3 + x^2 + 2x + 1 < (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) + (x^4 - 1)$.

(iii) $x^4 - 1 < (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1) + (2x^3 + x^2 + 2x + 1)$.

Agrupando todo en la parte derecha de las desigualdades queda

(i) $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1) > 0$.

(ii) $2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) > 0$.

(iii) $3x^3 + 3x^2 + 3x + 3 = 3(x + 1)(x^2 + 1) > 0$.

Por tanto, para todo $x > 1$ tendremos un triángulo.

Se puede dar una prueba alternativa notando que todos los lados son múltiplos de $x^2 + 1$. En efecto:

$$\begin{aligned}
&x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1),\\
&2x^3 + x^2 + 2x + 1 = (x^2 + 1)(2x + 1),\\
&x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1).
\end{aligned}$$

Así, el triángulo resultante será semejante a otro de lados $x^2 + x + 1$, $2x + 1$, $x^2 - 1$. Es fácil ver que el lado mayor es siempre $x^2 + x + 1$, por lo que solo tendremos que probar la desigualdad

$$x^2 + x + 1 < (2x + 1) + (x^2 - 1) = x^2 + 2x,$$

que se da siempre que $x > 1$. Es decir, siempre tendremos un triángulo. Además, si llamamos α al ángulo que se opone al lado mayor, por el teorema del coseno,

$$(x^2 + x + 1)^2 = (2x + 1)^2 + (x^2 - 1)^2 - 2(2x + 1)(x^2 - 1)\cos\alpha.$$

Despejando $\cos\alpha$, resulta

$$\cos\alpha = \frac{1}{2},$$

que es independiente de x, por lo que el ángulo α es siempre $120°$.

2. Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4.

   Solución
   Tomamos congruencias módulo 100 de las sucesivas potencias de 7 (es decir miramos los restos al dividir por cien, lo que es lo mismo que tomar las dos últimas cifras). Así, tenemos

$$\begin{aligned} 7^0 &\equiv 01 \mod 100, \\ 7^1 &\equiv 07 \mod 100, \\ 7^2 &\equiv 49 \mod 100, \\ 7^3 &\equiv 43 \mod 100, \\ 7^4 &\equiv 01 \mod 100. \end{aligned}$$

   Es fácil ver que a partir de la tercera potencia de 7 se repite el ciclo y, por tanto, siempre que la última cifra sea 3 la penúltima es 4. En efecto, sea $n = 4q + r$, con $q \geq 0$ y $0 \leq r \leq 3$, con q y r números enteros. Entonces

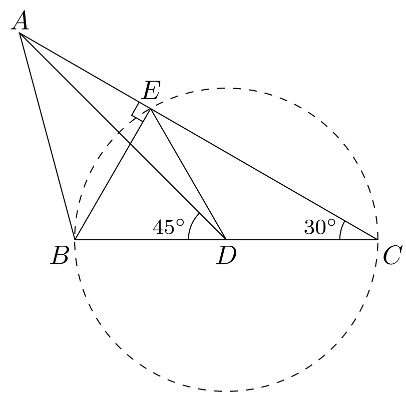
$$7^{4q+r} = \left(7^4\right)^q 7^r \equiv 7^r \mod 100,$$

   ya que $7^4 \equiv 1 \mod 100$.

3. Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45°$ y $\angle ACB = 30°$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

   Solución
   Hagamos un dibujo con el triángulo ABC, donde, además de la mediana AD, hemos trazado la perpendicular al lado AC desde B, por lo que el triángulo EBC es rectángulo en E. El punto D es, por hipótesis, el punto medio de su hipotenusa BC y, por tanto, el circuncentro de dicho triángulo en cuya circunferencia circunscrita el ángulo BDE es el central correspondiente al inscrito $\angle BCE$. Por consiguiente,

$$\angle BDE = 2 \cdot \angle BCE = 2 \cdot \angle BCA = 2 \times 30° = 60°.$$



Puesto que DB y DE son dos radios de la misma circunferencia, se sigue que el triángulo EBD es isósceles y tiene un ángulo de $60°$, luego es equilátero. En particular el ángulo $\angle BDE = 60°$. Puesto que $\angle ADB = 45°$ se sigue que

$$\angle ADE = 15°.$$

Por otra parte,

$$\angle AED = \angle AEB + \angle BED = 90° + 60° = 150°.$$

Teniendo ene cuenta esto, resulta $\angle EAD = 15°$ y el triángulo AED es isósceles. En consecuencia, el lado ED es igual al lado AE, que a su vez es igual a EB. De aquí concluimos que el triángulo AEB es isósceles y además rectángulo, por lo que

$$\angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = 45° - 15° = 30°.$$

LIV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 20 de enero de 2018

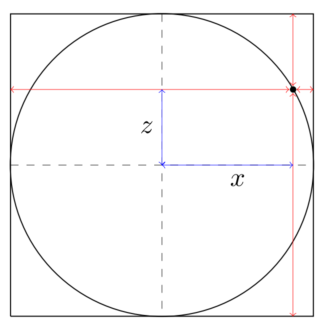
4. Probar que:

   a. La suma de las distancias desde un punto de la superficie de la esfera inscrita en un cubo de $\mathbb{R}^3$ a todas las caras del mismo no depende del punto elegido.

   b. Misma cuestión anterior para la suma de los cuadrados de las distancias.

   Solución

   Hagamos un esquema en dos dimensiones (en tres sería similar). Vemos que si la esfera tiene radio R, entonces el cubo tiene lado $2R$.



La distancia de un punto de coordenadas (x, y, z) a la cara superior es igual a $R - z$ y la distancia a la cara inferior $R + z$. Análogamente la distancia a las caras laterales será $R - x$ y $R + x$, mientras que la distancia a la cara anterior y posterior $R - y$ y $R + y$. Sumando todas las distancias, obtenemos

$$(R-x)+(R+x)+(R-y)+(R+y)+(R-z)+(R+z) = 6R,$$

que no depende del punto elegido.

Para la suma de los cuadrados de las distancias tenemos

$$(R-x)^2+(R+x)^2+(R-y)^2+(R+y)^2+(R-z)^2+(R+z)^2 =$$
$$= 6R^2 + 2(x^2+y^2+z^2) = 8R^2,$$

ya que $x^2 + y^2 + z^2$ es la distancia del punto al centro de la esfera. Por tanto, tampoco depende del punto elegido.

5. Sean a, b, c números naturales primos, distintos dos a dos. Demostrar que el número

$$(ab)^{c-1} + (bc)^{a-1} + (ca)^{b-1} - 1$$

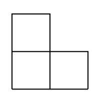
es un múltiplo del producto abc.

Solución
El resultado es inmediato a partir del teorema pequeño de Fermat.

Teorema pequeño de Fermat. Sea p un primo y a un entero que no es divisible por p. Entonces, $ap - 1 \equiv 1 \mod p$.

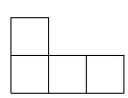
Para ver el resultado, basta ver que la expresión dada es múltiplo de a, b y c. Por tanto, al ser a, b y c primos diferentes, la expresión es múltiplo del producto abc. Ahora bien, que es múltiplo de a es evidente ya que $(ab)^{c-1}$ y $(ca)^{b-1}$ son mḿultiples de a y, aplicando el teorema pequeño de Fermat, $(bc)^{a-1} - 1$ también lo es. De manera análoga se prueba que la expresión dada es múltiplo de b y c, de donde se sigue el resultado.

6. Se han coloreado 46 cuadrados unitarios de una cuadrícula 9×9. ¿Hay, en la cuadrícula, alguna figura del tipo

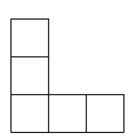


(no necesariamente con la orientación que muestra el dibujo) con las tres casillas coloreadas?

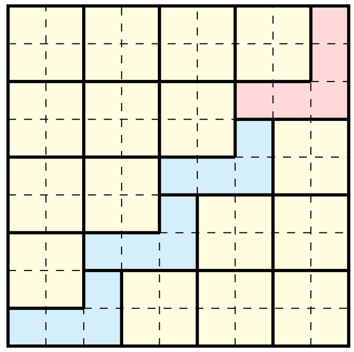
Solución La respuesta es afirmativa. En efecto, probaremos que si coloreamos como indica el enunciado, se puede encontrar siempre una figura del tipo dado con las tres casillas coloreadas. A tal fin, dividamos la cuadrícula 9×9 en dieciséis cuadrados 2×2, tres figuras como la siguiente:



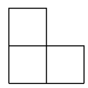
y una más como la que sigue:



tal como se muestra en el esquema siguiente:



Si no hubiera ninguna figura del tipo



con las tres casillas coloreadas, entonces cada uno de los dieciséis cuadrados tendría, a lo más, 2 casillas coloreadas; cada una de las tres figuras (1) tendría, a lo más, 3 casillas coloreadas y la figura (2), 4 casillas coloreadas, como máximo. Así, pues, se habrían coloreado, como máximo, $2\times 16+3\times 3+4 = 45$ casillas de la cuadrícula, lo que es contrario a la hipótesis.