

P1.- Plutón, el planeta enano.

Plutón fue descubierto en 1930, y su nombre alude al dios romano del inframundo. Hasta 2006, fue considerado el planeta más pequeño y lejano de nuestro sistema solar.

En agosto de 2006 la Asamblea General de la Unión Astronómica Internacional (UAI) acordó rebajar la categoría de Plutón, de planeta a *planeta enano*. Desde entonces forma parte de los cuerpos celestes en órbita alrededor del Sol a una distancia mayor que la de Neptuno, con masa suficiente para que su propia gravedad le confiera una forma casi esférica, pero insuficiente para vaciar su órbita de cuerpos vecinos. La UAI denominó *Plutoides*¹ a estos astros.



Sin embargo, el interés científico de Plutón ha sido creciente, hasta el punto de que en enero de 2006 la Nasa lanzó la sonda espacial New Horizons, con objeto de acercarse a Plutón para fotografiarlo e investigarlo. En Marzo de 2015 comenzaron las observaciones y el 14 de julio de 2015 la New Horizons alcanzó su máxima aproximación a Plutón: 12700 km. La sonda no llegó a orbitar en torno a Plutón, por no disponer de suficiente combustible para frenar su marcha. Se limitó a pasar cerca y continuará investigando sus satélites y el cinturón de Kuiper, que rebasará previsiblemente en 2018.

La órbita de la Tierra en torno al Sol es casi circular, pero la de Plutón es elíptica con gran excentricidad. Por esta razón, en su perihelio, la distancia de Plutón al Sol es incluso algo menor que la de Neptuno.

En la Tabla I encontrarás datos suficientes para resolver las cuestiones que se plantean en este ejercicio.

- a) Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler, calcula el periodo de la órbita de Plutón en torno al Sol.

El pequeño Plutón tiene nada menos que cinco satélites: Caronte, Nix, Hidra, Cerbero y Estigia. El primero de ellos es el más próximo a Plutón, y también el de mayor tamaño. Tanto es así que puede considerarse que el sistema Plutón-Caronte constituye un “planeta doble”. En la figura 1 se muestra una foto del sistema Plutón-Caronte, obtenida por la New Horizons. En la misma foto se indica la posición del “centro de masas” del sistema (CM), en torno al cual orbitan ambos cuerpos con velocidad angular ω , sometidos a la interacción gravitatoria mutua, como se esquematiza en la figura 2.



Figura 1

¹ El perro Pluto, famoso personaje de Walt Disney, “nació” pocos días después del descubrimiento de Plutón, por lo que lleva su nombre. Seguro que no le gustará mucho que le llamen plutoide o plútido.

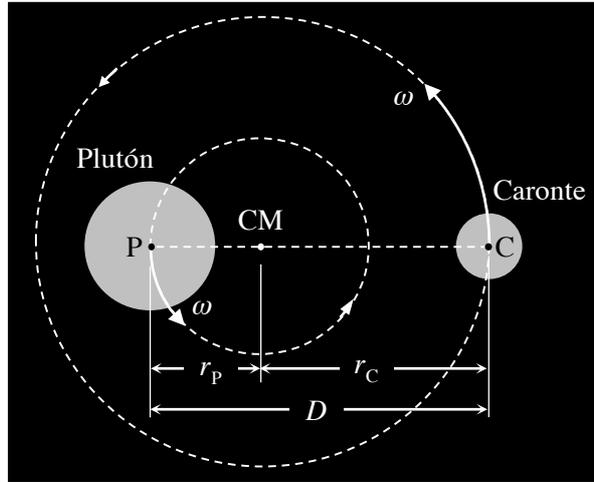


Figura 2

- b) Suponiendo que las órbitas de Plutón y de Caronte en torno al CM son circulares, determina analíticamente y calcula los radios de estas órbitas, r_P y r_C .

Ayuda: seguramente no has estudiado todavía qué es el “centro de masas” de un sistema de partículas, y no sabes calcular su posición. Para resolver la pregunta anterior, es suficiente saber que se cumple

$$M_P r_P = M_C r_C \quad (1)$$

- c) Determina y calcula el periodo de rotación de Plutón y Caronte en torno a su CM, T_{P-C} . Expresa tu resultado en días terrestres.

Cuando la New Horizons estaba en las proximidades de Plutón, las señales de radio que enviaba tardaban unas cuatro horas y media en llegar a la Tierra.

- d) Haz una estimación de la distancia a la Tierra, en unidades astronómicas, a la que se encontraba la sonda.

Para terminar, añadamos un poco de fantasía e imaginación. Un jugador de la NBA es capaz de saltar en vertical hasta una altura de 1,2 m.

- e) ¿Hasta qué altura saltaría en la superficie de Plutón?

Tabla I	
Máxima y mínima aproximación de Plutón al Sol (Distancias del afelio y del perihelio de Plutón al Sol)	$r_{\max} = 49,30$ ua $r_{\min} = 29,66$ ua
Unidad astronómica: distancia media entre la Tierra y el Sol	$1 \text{ ua} = 1,49 \times 10^{11}$ m
Masa de Plutón	$M_P = 1,31 \times 10^{22}$ Kg
Masa de Caronte	$M_C = 1,52 \times 10^{21}$ Kg
Distancia entre los centros de Plutón y Caronte	$D = 1,96 \times 10^7$ m
Radio de Plutón	$R_P = 1,19 \times 10^6$ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	$g_T = 9,81 \text{ m/s}^2$
Constante de Gravitación Universal	$G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$

P1.- Solución

- a) La 3ª ley de Kepler establece que los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas en torno al Sol son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas. En concreto, las órbitas de la Tierra (T) y Plutón (P) cumplen

$$\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{T_P^2}{a_P^3}$$

Donde T es el periodo de revolución y a el semieje mayor de la órbita.

Por tanto, el periodo de la órbita de Plutón puede obtenerse como

$$T_P = T_T \left(\frac{a_P}{a_T} \right)^{3/2} \quad (2)$$

La órbita de la Tierra es casi circular, y por tanto su semieje mayor coincide aproximadamente con la distancia media entre la Tierra y el Sol, es decir $a_T = 1 \text{ ua}$. Por otra parte, su periodo de revolución en torno al Sol es $T_T = 1 \text{ año}$. Para determinar el valor de a_P basta tener en cuenta que, en una elipse, la longitud del semieje mayor es igual a la semisuma de las distancias máxima y mínima a uno de sus focos, F, como se observa en la figura 4. Por tanto, el semieje mayor de la órbita de Plutón es

$$a_P = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = 39,48 \text{ ua}$$

Sustituyendo estos datos en (2) se obtiene

$$T_P = 248 \text{ años}$$

- b) Teniendo en cuenta la expresión (1) del enunciado, y que

$$D = r_P + r_C$$

es inmediato obtener

$$\boxed{r_P = D \frac{M_C}{M_P + M_C}} \quad \boxed{r_C = D \frac{M_P}{M_P + M_C}} \quad (3)$$

$$\boxed{r_P = 2,04 \times 10^6 \text{ m}} \quad \boxed{r_C = 1,76 \times 10^7 \text{ m}}$$

- c) Tal y como se indica en el enunciado, Caronte describe una órbita circular de radio r_C con velocidad angular ω , sometido a la atracción gravitatoria de Plutón. Por consiguiente,

$$G \frac{M_P M_C}{D^2} = M_C \omega^2 r_C$$

Teniendo en cuenta (3)

$$G \frac{M_P}{D^2} = \omega^2 D \frac{M_P}{M_P + M_C} \Rightarrow \omega = \sqrt{G \frac{M_P + M_C}{D^3}}$$

El periodo de revolución de del sistema Plutón-Caronte, T_{P-C} es

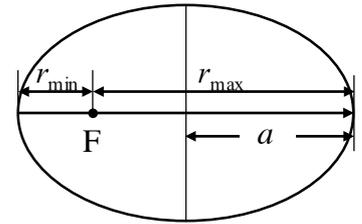


Fig. 4



O.E.F. 2017 PRUEBAS DEL DISTRITO UNIVERSITARIO DE LA RIOJA
REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA



$$T_{P-C} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T_{P-C} = 2\pi \sqrt{\frac{D^3}{G(M_P + M_C)}}, \quad T_{P-C} = 6,39 \text{ días}$$

Nota: el periodo T_{P-C} coincide con los de rotación de Plutón y Caronte en torno a sus ejes respectivos, debido al fenómeno de las mareas. Lo mismo ocurre con nuestra Luna, y por eso nos presenta siempre la misma cara.

- d) Las ondas de radio son ondas electromagnéticas, igual que la luz visible, y en el vacío se propagan a la velocidad “de la luz” $c \approx 300000 \text{ km/s}$. Por tanto, la distancia d a la que se encontraba la sonda es

$$d = ct \approx 5 \times 10^{12} \text{ m} \Rightarrow d \approx 33 \text{ ua}$$

- e) Para saltar en vertical una altura $h_T = 1,2 \text{ m}$ en la Tierra, se necesita una velocidad inicial, v , que puede obtenerse planteando la conservación de la energía mecánica

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg_T h_T \quad (4)$$

Esta energía es aportada por el trabajo muscular del atleta cuando se impulsa hacia arriba.

En Plutón, este trabajo y la velocidad inicial serían iguales que en la Tierra, pero allí la aceleración de la gravedad es bastante menor, por lo que alcanzaría una altura notablemente mayor.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg_P h_P \quad (5)$$

Igualando (4) y (5) y despejando h_P ,

$$h_P = \frac{g_T}{g_P} h_T$$

La aceleración de la gravedad en la superficie de Plutón es

$$g_P = G \frac{M_P}{R_P^2} = 0,62 \text{ m/s}^2$$

Con lo que se obtiene una altura

$$h_P = 19 \text{ m}$$

¡Menudo salto! En la Tierra, las canastas de baloncesto se sitúan a poco más de tres metros del suelo. En Plutón habría que ponerlas “un poco” más altas.

P2.- Ascensor gravitatorio a las antípodas

Los dirigentes de un lejano planeta están estudiando la posibilidad de construir un nuevo medio de transporte que conecte en línea recta dos puntos de la superficie diametralmente opuestos, es decir un punto como el A de la figura 1 con el B, situado en sus antípodas.

Para ello será necesario perforar un túnel que atraviese diametralmente el planeta. La gran ventaja de este medio de transporte es que, en ausencia de fricción, no va a consumir ningún tipo de energía: cualquier cuerpo abandonado en A, con velocidad inicial nula, será acelerado por la atracción gravitatoria del planeta hacia su centro durante la primera mitad del recorrido, y durante la segunda mitad la fuerza gravitatoria irá frenando el movimiento hasta que el cuerpo llegue a B con velocidad nula.

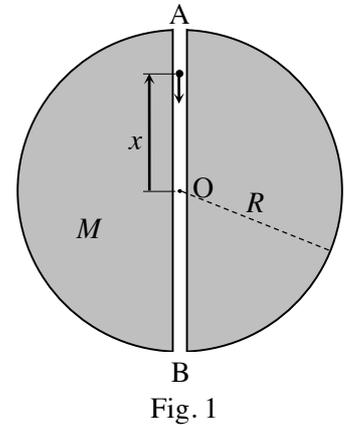


Fig. 1

Determina:

- La velocidad con que pasa el objeto por el centro del planeta.
- El tiempo de viaje desde A hasta B.

Datos:

Constante de gravitación universal: G

Radio del planeta: R

Masa del planeta: M

Simplificaciones y aproximaciones:

El planeta es perfectamente esférico y de densidad uniforme.

La masa retirada al perforar el túnel es despreciable frente a M .

No existe fricción en el movimiento dentro del túnel.

Ayuda:

Puede demostrarse que el campo gravitatorio $g(x)$ que actúa sobre el objeto cuando pasa por un punto de coordenada x respecto al centro O del planeta (véase la figura 1) es:

$$g(x) = -G \frac{M}{R^3} x$$



P2.- Solución

- a) Un cuerpo de masa m situado en x estará sometido a una fuerza $m\vec{g}$, proporcional a x y dirigida hacia el centro O. Esta es una fuerza “tipo muelle”, con constante elástica

$$k = G \frac{mM}{R^3}$$

por lo que m realizará un movimiento oscilatorio armónico en torno a O, con frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{G \frac{M}{R^3}}$$

El cuerpo se libera en el punto A de la superficie del

planeta, a una distancia R de O, y con velocidad inicial nula. Por tanto oscilará armónicamente en torno a O con amplitud $A=R$, alcanzando la máxima velocidad al pasar por O. En una oscilación armónica, esta velocidad máxima es

$$v_{\max} = \omega A \quad \rightarrow \quad \boxed{v_O = \sqrt{G \frac{M}{R}}}$$

Al resultado anterior también puede llegarse planteando la conservación de la energía mecánica entre A y O, teniendo en cuenta que, en nuestro caso, la energía potencial gravitatoria depende de x en la forma

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

- c) El tiempo que tarda el objeto en viajar desde A hasta B es medio periodo de la oscilación

$$t_{AB} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \quad \rightarrow \quad \boxed{t_{AB} = \pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}}$$

Nótese que ninguno de los resultados pedidos depende de la masa m del objeto que viaja por el túnel.

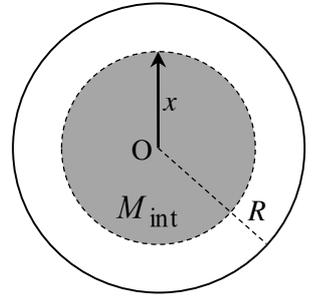


Fig. 3

P3.- Electrómetro absoluto de Kelvin

Los avances científicos y tecnológicos del siglo XIX exigieron la definición de *patrones* para las magnitudes eléctricas, basados en las unidades de longitud, masa y tiempo establecidas después de la Revolución Francesa. Entre 1861 y 1912 se desarrollaron numerosos trabajos experimentales con este objetivo. Uno de ellos es el que, de una forma muy simplificada, se presenta en este problema.

En la figura 1 se esquematiza un electrómetro de Kelvin, utilizado para la medida absoluta de diferencias de potencial eléctrico. Consiste básicamente en una balanza de brazos iguales, de cuyo brazo izquierdo cuelga, mediante un hilo conductor, una placa conductora horizontal de área A . La balanza se equilibra con la tara adecuada colocada en el platillo del brazo derecho.

Debajo de la placa anterior se encuentra otra placa idéntica, fija y paralela, a una corta distancia d . Este sistema de dos placas conductoras constituye un *condensador* de láminas planoparalelas. Las placas pueden conectarse mediante un interruptor S a unos bornes entre los que existe la diferencia de potencial ΔV que se quiere determinar.

Cuando se cierra el interruptor S , el condensador se carga, es decir las dos placas adquieren cargas $+Q$ y $-Q$, y la diferencia de potencial entre ellas es ΔV . Como consecuencia, las dos placas se atraen y, para mantener la balanza en equilibrio con la misma distancia d entre las placas, hay que añadir una cierta masa m en el platillo de la derecha, como se muestra en la figura 2.

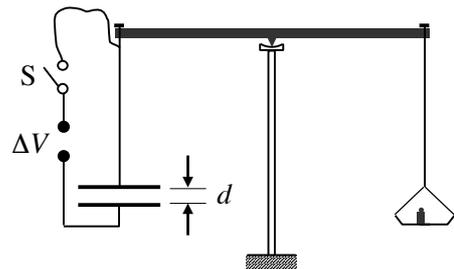


Fig. 1

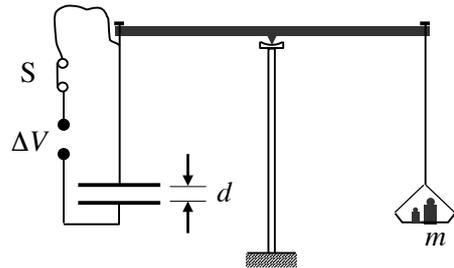


Fig. 2

Suponiendo que la permitividad del aire es prácticamente igual a la del vacío, ϵ_0 , que la carga se distribuye uniformemente en las placas y que el campo eléctrico entre ellas es aproximadamente uniforme, determina:

Determina:

- La carga eléctrica absoluta en cada una de las placas, Q , en función de ϵ_0 , A , d y ΔV .
- La fuerza de atracción entre las placas, en función de ϵ_0 , A , d y ΔV .
- La expresión que permite determinar ΔV en función de ϵ_0 , A , d , m y g .

Ayuda: en las proximidades de una distribución de carga plana y uniforme, con carga por unidad de superficie σ , el campo eléctrico es perpendicular a dicha distribución y de módulo $E = |\sigma|/2\epsilon_0$.

P3.- Solución

- a) Como la carga $\pm Q$ se considera uniformemente repartida en las placas, la densidad superficial de carga es $\sigma = \pm Q/A$. El campo eléctrico creado por cada placa en sus proximidades tiene módulo constante $E = |\sigma|/2\epsilon_0$ y es perpendicular a la superficie². Las líneas del campo eléctrico creado por la placa positiva se alejan de ella (figura 2a), y las creadas por la placa negativa se dirigen hacia ella (figura 2b).

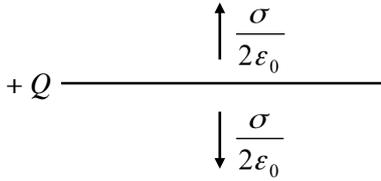


Fig. 2a

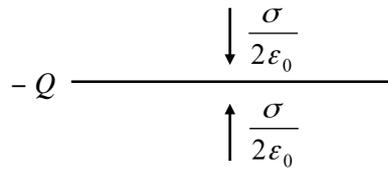


Fig. 2b

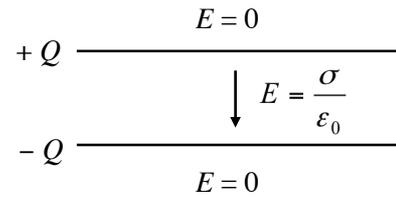


Fig. 2c

El campo total es la suma vectorial de los campos creados por las dos placas. En el espacio entre ellas (figura 2c) los dos campos tienen el mismo sentido, por lo que el módulo del campo resultante es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (1)$$

Este campo se dirige de la placa positiva hacia la negativa. En la figura 2 se ha supuesto que la placa superior es la positiva, pero este dato es irrelevante para responder a las preguntas del problema.

En cualquier otro punto del espacio los campos tienen sentidos opuestos, y el campo resultante es nulo.

El campo entre las placas es uniforme, luego la diferencia de potencial entre ellas es $\Delta V = E d$.

De lo anterior se deduce que
$$Q = \epsilon_0 \frac{A}{d} \Delta V$$

- b) Las placas tienen cargas de signo opuesto, luego se atraen entre sí. La fuerza que actúa sobre la placa superior es igual al producto de su carga por el campo creado por la inferior. Esta fuerza está dirigida hacia abajo (independientemente de la polaridad de ΔV) y su módulo es

$$F = Q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{A}{d^2} \Delta V^2$$

- c) Al atraerse las dos placas, la balanza se desequilibra, y es preciso añadir una masa m en el platillo derecho de la balanza para restablecer el equilibrio mecánico, manteniendo la distancia d . Como los brazos de la balanza tienen la misma longitud, el equilibrio se consigue cuando $F = mg$, por lo que

$$\Delta V = \left(\frac{2mgd^2}{\epsilon_0 A} \right)^{1/2}$$

² Para que se cumpla esta aproximación, las dimensiones de las placas deben ser mucho mayores que la separación entre ellas, de forma que pueden despreciarse los *efectos de borde*. En un montaje real es preciso emplear *anillos de guarda*.

P4.- Prueba experimental. Medida de la relación carga/masa del electrón

En 1897, J. J. Thompson utilizó un dispositivo experimental parecido al de la figura 1 para determinar por primera vez la relación entre la carga absoluta y la masa del electrón, e/m .

Los electrones emitidos por un filamento incandescente son acelerados hasta una cierta velocidad v mediante un *cañón de electrones*, formado por dos electrodos, entre los que se establece una diferencia de potencial V .

Suponiendo que la velocidad inicial de los electrones es prácticamente nula, su velocidad final puede obtenerse planteando la conservación de la energía mecánica

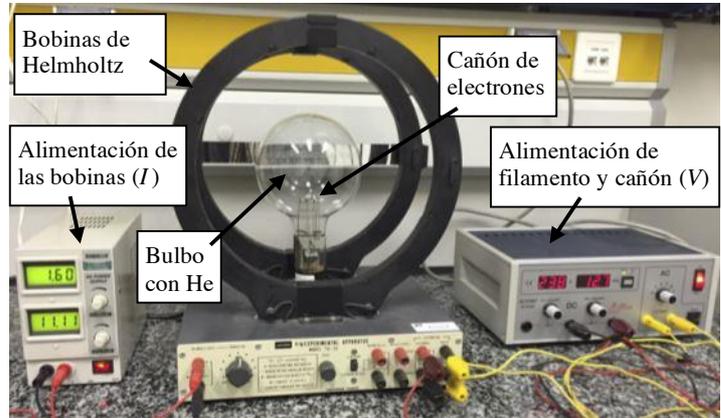


Figura 1

$$eV = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad (1)$$

Estos electrones se mueven en presencia de un campo magnético \vec{B} uniforme y perpendicular a \vec{v} , de forma que la fuerza de Lorentz ($\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$) que actúa sobre ellos es puramente centrípeta y los electrones describen una trayectoria circular de radio R

$$F = evB = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{eB} \quad (2)$$

En el montaje de la figura 1, el campo magnético es producido por dos bobinas circulares, situadas en planos paralelos separados una distancia igual a su radio, por las que circula una corriente eléctrica de intensidad I . Con esta geometría (*bobinas de Helmholtz*), se consigue un campo magnético aproximadamente uniforme en un amplio volumen en torno al centro del sistema. La intensidad de este campo viene dada por

$$B = kI, \quad \text{con} \quad k = \frac{8\mu_0 N}{5\sqrt{5}r} \quad (3)$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío, N el número de espiras de cada bobina, r el radio de las espiras e I la corriente que circula por ellas.

Combinando las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtiene

$$V = \frac{k^2}{2} \frac{e}{m} R^2 I^2 \quad (4)$$

El cañón de electrones se sitúa en el interior de un bulbo esférico que contiene Helio a baja presión, para no perturbar apreciablemente la trayectoria de los electrones. Cuando un electrón colisiona con un átomo de Helio, éste se excita a un nivel de energía superior al fundamental. Posteriormente, este átomo se desexcita emitiendo un fotón de luz visible, de forma que, desde el exterior, se observa luminosa la trayectoria circular de los electrones, y puede medirse el radio con una simple regla (figura 2).

Los valores de la tensión aceleradora, V , y de la corriente que circula por las bobinas, I , pueden controlarse y medirse externamente. En el experimento que vamos a considerar, el valor de V se modifica a intervalos regulares y el valor de I se reajusta en cada caso hasta conseguir una trayectoria de radio fijo $R=5,0\text{cm}$.

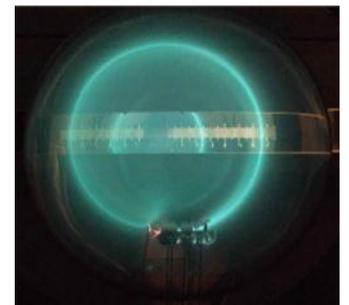


Figura 2



O.E.F. 2017 PRUEBAS DEL DISTRITO UNIVERSITARIO DE LA RIOJA
REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA



En la siguiente tabla se recoge una serie de valores de V e I con los que se consigue esta trayectoria.

V (V)	125	150	175	200	225	250	275	300
I (A)	0,94	1,00	1,10	1,21	1,29	1,33	1,39	1,49

Otros datos:

Permeabilidad del vacío, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$

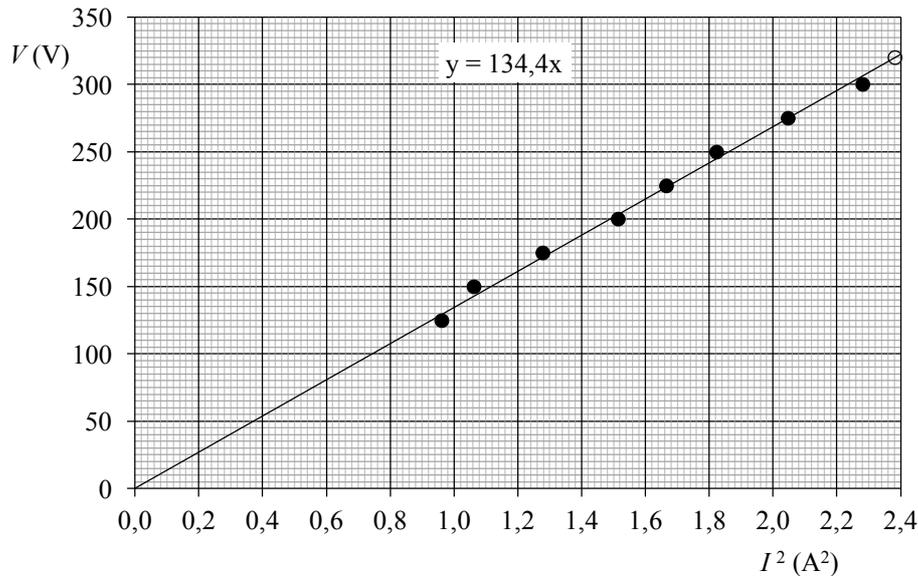
Número de espiras de las bobinas, $N = 130$.

Radio de las espiras, $r = 15,0 \text{ cm}$.

- Representa gráficamente en el papel milimetrado los puntos experimentales $(x, y) = (I^2, V)$.
- Ajusta una línea recta a los puntos de la gráfica anterior.
- A partir de este ajuste, determina el valor de la relación carga/masa del electrón, e/m .
- Haz una estimación de la incertidumbre del valor obtenido para e/m .

Prueba experimental. Solución

- a) Según indica la ecuación (4), se espera una dependencia $V(I^2)$ lineal, con pendiente proporcional a e/m y ordenada en el origen nula. En la siguiente gráfica se comprueba que los puntos $(x, y) = (I^2, V)$ presentan la tendencia esperada



A

- b) Aceptando que la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales también pasa por el origen, como prevé el modelo teórico³, se ha trazado la recta que, en promedio, pasa lo más cerca posible de dichos puntos. Su pendiente, p , puede determinarse a partir de las coordenadas de un punto de la recta, como el A de la gráfica anterior. Este punto se ha escogido en una intersección de la cuadrícula y alejado del origen, para optimizar la precisión relativa de sus coordenadas.

$$p = \frac{y_A}{x_A} = \frac{320,0 \text{ V}}{2,380 \text{ A}^2} \Rightarrow \boxed{p = 134,5 \text{ V/A}^2}$$

Aplicando el método de ajuste lineal por *mínimos cuadrados*, se obtiene el resultado indicado en la gráfica, con prácticamente la misma pendiente.

- c) Según la ecuación (4) la pendiente de esta recta es

$$p = \frac{k^2}{2} \frac{e}{m} R^2$$

Por tanto, la relación e/m buscada es

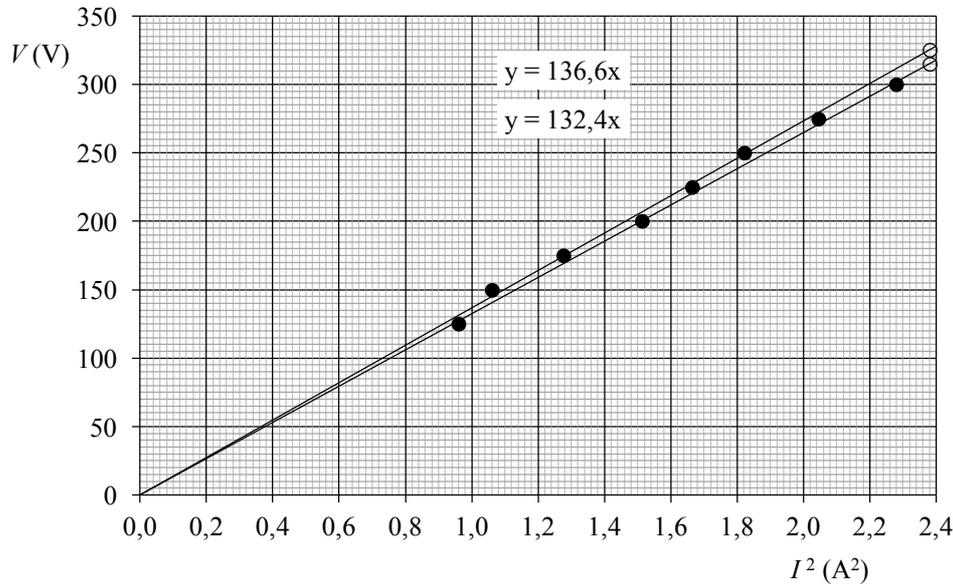
$$\frac{e}{m} = \frac{2p}{k^2 R^2}$$

Con los datos del enunciado se obtiene

$$\boxed{\frac{e}{m} = 1,771 \times 10^{11} \text{ C/kg}}$$

³ Si la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales no pasase aproximadamente por el origen, habría que estudiar la exactitud del modelo teórico, o considerar la posibilidad de algún error sistemático en el experimento.

- d) Para hacer una estimación de la incertidumbre de e/m , se trazan las dos rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales, teniendo en cuenta su dispersión respecto a la mejor recta.



Un proceso de ajuste análogo al realizado en el apartado anterior conduce a que las pendientes de estas dos rectas, y los correspondientes valores de e/m , son

$$p_{\max} = 136,6 \text{ V/A}^2 \quad \Rightarrow \quad (e/m)_{\max} = 1,799 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

$$p_{\min} = 132,4 \text{ V/A}^2 \quad \Rightarrow \quad (e/m)_{\min} = 1,744 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

Por tanto, una estimación razonable de la incertidumbre del valor de e/m es

$$\Delta(e/m) = \frac{1}{2} [(e/m)_{\max} - (e/m)_{\min}]$$

$$\boxed{\Delta(e/m) = 2,7 \times 10^9 \text{ C/kg}}$$

El resultado final del experimento, expresado con el número adecuado de cifras significativas, sería

$$\boxed{\frac{e}{m} = (1,77 \pm 0,03) \times 10^{11} \text{ C/kg}}$$

Nota: El valor real de la relación carga/masa del electrón es

$$\frac{e}{m} = 1,759 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

que queda dentro del margen de incertidumbre del resultado de nuestro experimento.