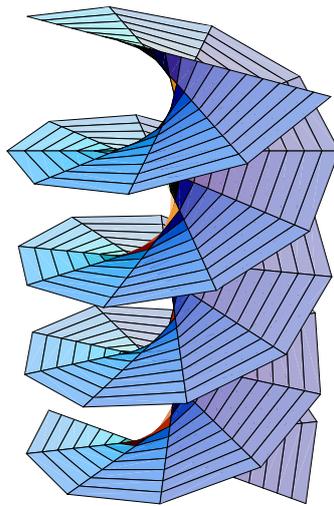
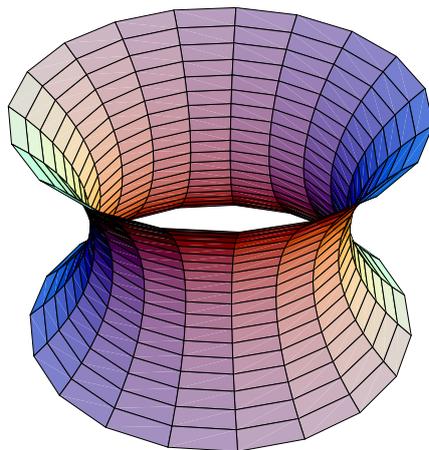


# APUNTES DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Disponen de un paquete de Mathematica para calcular métricas,  
símbolos de Christoffel, geodésicas y curvatura seccional



Luis Javier HERNÁNDEZ PARICIO





## Índice general

INTRODUCCIÓN	1
1. Breves comentarios históricos	1
2. Objetivos	5
3. Requisitos	6
Capítulo 0. PRELIMINARES	9
1. Nociones y notaciones asociadas a funciones	9
2. Topología	10
2.1. Espacios topológicos y funciones continuas	10
2.2. Base de una topología	11
2.3. Propiedades topológicas	12
2.4. Construcciones	12
2.5. Algunos espacios	13
3. Álgebra lineal	14
4. Análisis matemático	17
Capítulo 1. VARIEDADES DIFERENCIABLES	21
1. La noción de variedad diferenciable	21
2. La topología de una variedad diferenciable	24
3. Ejemplos de variedades diferenciables	27
4. El conjunto de ceros de una función con valores reales	30
5. Propiedades básicas de la topología de una variedad	32
Capítulo 2. ESPACIO TANGENTE	35
1. Notaciones previas	35
2. Derivadas parciales. Propiedades	36
3. Vectores tangentes	37
4. Aplicación tangente	39
Capítulo 3. SUBVARIEDADES Y VARIEDADES COCIENTE	43
1. Inmersiones	43
2. Submersiones	45
3. Las fibras de una submersión	47
Capítulo 4. CAMPOS Y FORMAS	49
1. Fibrado tangente y cotangente	49
2. Definición y propiedades de campos y formas	50
3. Variedades paralelizables	56
4. Variedades orientables	57

5. Curvas integrales	60
Capítulo 5. VARIEDADES Y CONEXIONES RIEMANNIANAS	65
1. Conexiones y derivada covariante	65
2. Variedades riemannianas	70
3. Longitudes de curvas y volúmenes	72
4. Conexiones riemannianas	73
5. Curvatura	76
Capítulo 6. EL PAQUETE RIEMANNIAN GEOMETRY	83
1. El paquete RiemannianGeometry	83
1.1. Introducción	83
1.2. Algunas pseudométricas más frecuentes	84
1.3. Pseudo-métrica inducida por una inmersión	84
1.4. Símbolos de Christoffel y ecuaciones de las geodésicas	85
1.5. Tensor de curvatura y Curvatura Seccional	86
1.6. Coeficientes geométricos inducidos por una inmersión	87
1.7. Ejemplos	89
2. Integración numérica de las geodésicas	92
3. Algunas aplicaciones informáticas para la geometría	94
4. Otros enlaces interesantes	95
Bibliografía	97

# INTRODUCCIÓN

Éstos son unos apuntes sobre técnicas básicas de Geometría y Topología. Incluyen las nociones que hemos considerado más importantes acompañadas de algunos ejemplos y problemas que creemos que además de facilitar la comprensión de los conceptos resaltan aquellos aspectos más interesantes. Se abordan pausadamente algunos resultados elementales, aunque no por ello se deja de hacer referencia a otros teoremas más importantes incluyendo bibliografía adecuada para su estudio. Intentamos que el lector asimile bien las primeras nociones y sus propiedades y además hemos seleccionado unos contenidos que puedan presentarse y estudiarse en un periodo breve de tiempo.

La Geometría Diferencial es una técnica que, mediante métodos diferenciales, da respuesta a numerosos problemas matemáticos y además se puede completar con las herramientas necesarias para introducir la Geometría Riemanniana que es una teoría que unifica la geometría euclidiana, la llamada geometría analítica, la geometría proyectiva y la geometría hiperbólica. También deja el camino abierto para introducir la Geometría Pseudo-Riemanniana que da un marco adecuado para el estudio de la Teoría de la Relatividad.

En esta introducción hacemos unos breves comentarios históricos, señalamos los objetivos que deseamos que el alumno alcance con la ayuda de estos apuntes y comentamos los requisitos que a nuestro juicio debe reunir éste para leer sin dificultad estas notas sobre Geometría Diferencial.

## 1. Breves comentarios históricos

La geometría de las culturas griega y egipcia quedó recogida de modo magistral en los Elementos de Euclides. Esta excepcional obra se fecha aproximadamente hacia el 300 a.C. y en ella se establecen fundamentos de geometría y álgebra griega que van a tener una influencia decisiva a lo largo de los dos milenios siguientes.

Los Elementos se construyen a partir de unos postulados básicos que describen las propiedades elementales de los puntos y las rectas del plano. Señalaremos que con este tratado se plantea uno de los problemas que más polémica ha causado y para cuya resolución completa se han necesitado más de dos milenios. Se trata simplemente de averiguar si los postulados son independientes y si uno de ellos, frecuentemente

denominado quinto postulado y también postulado de las paralelas, depende de los demás. En geometría euclidiana se verifica que por punto exterior a una recta pasa una única recta paralela y va a ser esta propiedad la que hace que la resolución del problema anterior se conozca también como la ciencia de las paralelas.

Por brevedad y para centrarnos rápidamente en los aspectos diferenciales de la geometría vamos a dar un gran salto en el tiempo para situarnos en el siglo XVII. Con ello no queremos que se desprenda que en el periodo intermedio no se dieran importantes avances geométricos. Empezamos esta nueva etapa mencionando a René Descartes (1586-1650), eminente científico francés, que en su obra “Geometría”, asociaba a cada punto del plano dos coordenadas  $x, y$  que le permitieron formular analíticamente numerosos problemas geométricos. También el matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665) utilizaba en esta época coordenadas rectangulares en dimensión dos en su obra “Introducción a la teoría de lugares planos y espaciales”.

Las técnicas de la perspectiva eran conocidas desde épocas remotas y especialmente fueron desarrolladas por artistas y arquitectos en la época del Renacimiento. Gerard Desargues (1593-1662) utilizaba en 1636 coordenadas para la construcción de perspectivas. A él se debe su célebre teorema de los triángulos coaxiales y copolares que juega un papel importante en la descripciones axiomáticas y algebraicas de las geometrías. Mencionaremos también a Blaise Pascal (1623-1662) y su teorema del hexágono místico. El uso de perspectivas necesitaba de puntos infinitamente alejados que poco a poco dieron lugar a la geometría proyectiva y sus transformaciones, denominadas frecuentemente como proyectividades. Destacaremos que dos siglos más tarde la geometría proyectiva ya se había desarrollado como se pone de manifiesto en la obra de Jean-Victor Poncelet (1788-1867) “Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras” que fue publicada en Paris en 1822, si bien fue planificada siendo éste prisionero en Moscú a causa de las guerras napoleónicas.

En el siglo XVII se produce un hito matemático importante: el nacimiento del cálculo diferencial, impulsado principalmente por Isaac Newton (1642-1727) en Inglaterra, e independientemente, por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en Alemania. Poco a poco el uso de técnicas diferenciales para la resolución de problemas geométricos iba determinando la disciplina matemática que hoy denominamos como Geometría Diferencial.

A comienzos del siglo XVII, Isaac Newton en su obra de 1704 “Enumeración de las curvas de tercer orden” clasifica curvas según el grado de su ecuación y encuentra su interpretación geométrica como el máximo número posible de puntos de intersección de la curva con una recta.

El uso sistemático de coordenadas en dimensión tres puede verse ya en 1731 en el libro de Alexis Claude Clairaut (1713-1765) “Investigaciones sobre curvas de doble curvatura”. Clairaut interpretaba correctamente una superficie como las soluciones de una ecuación única y la curvas en el espacio las consideraba como intersección de dos superficies; es decir, mediante dos ecuaciones. Son muy conocidos sus resultados sobre las propiedades que tienen las geodésicas de una superficie de revolución (véanse los problemas del capítulo 5 de estos apuntes). A finales del siglo XVII Sylvestre François Lacroix (1765-1843) acuñó la denominación de Geometría Analítica.

Leonard Euler (1707-1783) continuó con la investigación de geodésicas sobre superficies, en particular dio la ecuación diferencial de una geodésica en una superficie (véase sección 1 del capítulo 5 de estos apuntes). Analizó también la curvatura de las secciones planas de una superficie dando expresiones para el cálculo de las curvaturas principales. En 1771, en un artículo sobre cuerpos cuyas superficies se pueden superponer en un plano, Euler introdujo el concepto de superficie desarrollable.

Gaspard Monge (1746-1818) en los años 80 publicó dos obras, en las que estudio propiedades de curvas en el espacio y de las superficies. Introdujo nociones y terminología todavía utilizadas en la actualidad, como las de superficie desarrollable y rectificable, arista de retroceso, lugar geométrico de los centros de curvatura, etc. La traducción de hechos geométricos en términos de ecuaciones en derivadas parciales y ecuaciones diferenciales ordinarias condujo a la geometría diferencial a una nueva fase en la que se interrelacionaban algunos aspectos geométricos con otros de la teoría de ecuaciones diferenciales.

Una nueva etapa de la Geometría Diferencial se puso de manifiesto con las investigaciones de Karl Friedrich Gauss (Brunswick, 1777–Gotinga, 1855) sobre la geometría intrínseca de las superficies, es decir, aquellas propiedades que son invariantes por transformaciones que preservan las longitudes y los ángulos que forman las curvas contenidas en las superficie. Citaremos el llamado Teorema Egregio de Gauss que asegura que la curvatura de una superficie es intrínseca.

A finales de siglo XVIII y principios del XIX aparecen los tres principales artífices en la historia de la geometría no euclidiana: Gauss, que ya hemos mencionado, Nikolai Ivanovich Lobachevski (Bajo Novgorod, actual Gorki, 1792-1856), János Bolyai (Kolozsvár, actual Cluj-Napoca, Rumania, 1802-1860). Aunque las cartas de Gauss prueban los grandes avances realizados por éste en la ciencias de las paralelas, el mérito de su descubrimiento se atribuye de modo independiente a Lobachevki y a Bolyai. En sus publicaciones ellos desarrollan una nueva geometría suponiendo que, al contrario de lo que sucede en la geometría euclidiana, por un punto exterior a una recta pasa más de una

paralela. Esta nueva geometría se denomina geometría no euclidiana o hiperbólica.

A mediados del siglo XIX aparece un nuevo principio general sobre qué es lo que se puede entender por una geometría. Esta idea fue expuesta por Bernhard Riemann (1826-1886, alumno de Gauss) en el año 1854 en una conferencia titulada “Sobre las hipótesis que yacen en los fundamentos de la Geometría”; posteriormente, esta conferencia, que se publica en 1887, ha sido frecuentemente citada. Según Riemann, para la construcción de una Geometría es necesario dar: una variedad de elementos, las coordenadas de estos elementos y la ley que mide la distancia entre elementos de la variedad infinitamente próximos. Para ello se supone que las partes infinitesimales de la variedad se miden euclidianamente. Esto significa que hay que expresar en su forma más general el elemento de arco en función de las coordenadas. Para ello se da el elemento genérico de arco para cada punto a través de una forma cuadrática definida positiva de la forma  $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$ . Eliminado la condición de ser definida positiva, este modelo también se utiliza para formular la teoría de la relatividad, tanto en su versión restringida como en la generalizada mediante el uso de variedades de dimensión cuatro, tres coordenadas espaciales y una temporal. En estos modelos se toman como transformaciones aquellas aplicaciones que dejan invariante el elemento de arco.

Esta forma de concebir el espacio ha evolucionado con el tratamiento dado a comienzos del siglo XX en los trabajos de los matemáticos italianos M. M. G. Ricci (1853-1925) y T. Levi-Civita (1873-1941) hasta la noción que hoy denominamos como variedad riemanniana. La definición que actualmente utilizamos de variedad diferenciable (o diferencial) se atribuye a Hassler Whitney [42] que en 1936 presentaba una variedad como una serie de piezas euclidianas pegadas con funciones diferenciables.

Aquellos lectores que deseen conocer otros aspectos históricos del desarrollo de la geometría pueden consultar los libros [44], [45]. Para aquellos aspectos relacionados con geometrías euclidianas y no euclidianas consideramos interesante el libro de Bonola [46] y la página web 4.1 del capítulo 6.

En estos apuntes se presenta la noción de variedad diferenciable de manera parecida a como la introdujo Whitney y se estudian las herramientas más básicas para poder introducir de un modo riguroso la noción de variedad riemanniana. De un modo rápido diremos que en este texto se analiza la topología inducida por una estructura diferenciable para después abordar el estudio de una función diferenciable en un punto a través de espacios y aplicaciones tangentes. Ello permite introducir los conceptos de subvariedad, variedad cociente y mediante la técnica de fibrados (co)tangentes y sus secciones: los campos tangentes

y las formas diferenciables. Con todas estas nociones estamos en disposición de introducir la noción de variedad riemanniana. Exponemos a continuación unas ideas introductorias sobre algunas cuestiones básicas de geometría riemanniana.

En una variedad riemanniana se dispone de una forma bilineal en el espacio tangente de cada punto de la variedad que permite medir longitudes de vectores tangentes y el ángulo determinado por dos vectores. Utilizando las técnicas usuales de integración se pueden determinar las longitudes de las curvas de dicha variedad y se puede calcular el volumen de adecuadas “regiones medibles” de la misma. Por otra parte, dados dos puntos de una componente conexa se pueden considerar todas las curvas que existan en la variedad entre esos dos puntos. Si los dos puntos están “suficientemente próximos”, entonces existe una curva especial que es la que realiza el recorrido entre ellos con la menor longitud posible. Estas curvas se denominan geodésicas.

También se introduce la noción de curvatura riemanniana que asocia un escalar a cada plano tangente de la variedad y que para el caso de superficies coincide con la noción de curvatura de Gauss. En los casos en que la curvatura sea cero la variedad riemanniana se dice que es parabólica, si es constante y mayor que cero se dice que es elíptica y si es constante y negativa se dice que es una variedad hiperbólica. Este modelo matemático denominado variedad riemanniana contiene la mayor parte de los modelos geométricos estudiados hasta el siglo XX. Por una parte, los espacios euclídeos se pueden considerar como variedades riemannianas con curvatura de Riemann nula, las esferas y espacios proyectivos tienen estructura de variedades riemannianas elípticas y los espacios no euclidianos son casos particulares de variedades riemannianas hiperbólicas. Además, las superficies e hipersuperficies de los espacios euclidianos admiten también de modo natural estructura de variedad riemanniana.

Estas propiedades hacen que la geometría riemanniana sea un marco adecuado para realizar estudios geométricos. No obstante, existen otras formas de formalizar la geometría; por ejemplo, a través de grupos discontinuos de transformaciones tal y como la presentó Klein en su famoso programa de Erlangen. Mencionaremos también que existen modelos que generalizan los considerados en este texto y otros basados en grupos de transformaciones, aunque desde un punto de vista didáctico nos parece que un nivel de abstracción muy elevado puede ocultar la verdadera naturaleza de las nociones y problemas geométricos que queremos presentar y desarrollar en estas notas.

## 2. Objetivos

Con esta Introducción a la de Geometría Diferencial se pretenden alcanzar las metas siguientes:

1) Que se comprenda la noción de variedad diferenciable así como la importancia de sus aplicaciones en otras ciencias.

2) Que se adquieran las herramientas básicas de trabajo, aprendiendo nociones fundamentales tales como inmersión, submersión, campos, formas, etc.

3) Que se conozcan variedades importantes tales como esferas, espacios proyectivos, variedades de Grassmann, grupos de Lie, hipersuperficies de espacios euclídeos, etc.

4) Que se adquieran los procedimientos básicos para construir nuevas variedades: productos, espacios de órbitas de grupos de transformaciones discontinuos, cubiertas, fibrados, etc.

5) Que se comprenda que existen otras estructuras análogas o “próximas” a la noción de variedad diferenciable, y que muchas de las técnicas desarrolladas se pueden trasladar a otros contextos. Por ejemplo, variedades de clase  $C^r$ , variedades analíticas, variedades con singularidades, variedades con borde, etc.

6) Que se compruebe que la noción de variedad riemanniana proporciona un buen marco para el estudio de muchos aspectos geométricos.

7) Que se valore positivamente el efecto unificador de la geometría riemanniana al contener como casos particulares, por un lado, las geometrías elípticas, parabólicas e hiperbólicas y, por otro, la geometría de curvas y superficies.

8) Que se conozca la técnica de conexiones y conexiones riemannianas y su utilización en el estudio de geodésicas y curvaturas.

9) Que el alumno sepa los hitos históricos más importantes que han determinado muchas aportaciones mutuas y enriquecedoras entre la geometría y el cálculo diferencial dando lugar a una disciplina matemática consolidada, llamada Geometría Diferencial.

Con este programa, además de intentar dar una formación muy básica sobre algunos aspectos geométricos, se ha intentado seleccionar los temas más motivadores. Se ha preferido renunciar a enfoques muy generales, escogiendo aquellos métodos que ilustran mejor las propiedades geométricas de las variedades.

### 3. Requisitos

Se supone que el alumno ha estudiado cursos de análisis matemático en los que se han introducido la derivada lineal de funciones de varias variables, derivadas direccionales, derivadas parciales, teorema de la función inversa y teorema de la función implícita. Es también conveniente que conozca las técnicas de integración de funciones de una y varias variables tanto es sus aspectos teóricos como en los más prácticos.

También supondemos que el alumno está familiarizado con los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, especialmente de las de primer y segundo orden, y de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. En estas notas aplicaremos principalmente estas técnicas al estudio de geodésicas en una variedad riemanniana y al cálculo de curvas integrales de un campo.

Son fundamentales el conocimiento de las nociones y propiedades básicas topológicas así como los procedimientos más usuales de construcción de espacios topológicos. Respecto a las nociones topológicas, principalmente señalaremos, un buen conocimiento de las propiedades más frecuentes: primero y segundo numerable, conexión y conexión por caminos, las correspondientes conexiones locales, y también la propiedad de compacidad. En cuanto a métodos de construcción, es conveniente que el alumno maneje bien los subespacios, los productos y las topologías cocientes. Estas notas contienen alguna construcción en la que se utiliza la noción de espacio recubridor y sus propiedades, particularmente las del recubridor universal. Si bien no es necesario para la lectura de este texto, sí consideramos recomendable el estudio previo de las propiedades de los espacios recubridores y su relación con el grupo fundamental.

Finalmente, aunque tampoco es estrictamente necesario, es conveniente también adquirir una formación elemental sobre la noción de grupo; aquí utilizamos algunos grupos de transformaciones, unas veces se trata de grupos continuos de Lie y otras de grupos discontinuos de transformaciones que se utilizan para expresar una variedad como cociente de otra más conocida. Es también de interés el conocimiento de la noción de módulo sobre un anillo que la utilizamos para el estudio de todos los campos tangentes y formas globales de una variedad sobre el anillo de las funciones globales reales. Destacaremos que los espacios vectoriales reales y sus correspondientes aplicaciones lineales con las nociones asociadas de dimensión y rango son herramientas muy importantes para el análisis de funciones diferenciables y es por ello necesario que el alumno haya adquirido la destreza suficiente en su uso.



## PRELIMINARES

En este capítulo hacemos un breve recorrido a través de nociones topológicas, algebraicas y de análisis matemático. Se introduce la notación y algunas propiedades básicas que se van a utilizar en el resto del libro.

### 1. Nociones y notaciones asociadas a funciones

Presentamos a continuación algunas nociones relacionadas con el concepto de función.

**DEFINICIÓN 1.1.** Una *función*  $\varphi: X \rightarrow Y$  con *dominio*  $\text{Dom } \varphi \subset X$  es una correspondencia que asocia a cada  $p \in \text{Dom } \varphi$  un único elemento  $\varphi(p) \in Y$ . El conjunto  $\{\varphi(p) | p \in \text{Dom } \varphi\}$  lo llamaremos *conjunto imagen*,  $\text{Im } \varphi$ , también se denomina *rango de la función o codominio de la función*,  $\text{Codom } \varphi$ . Diremos que  $X$  es el *conjunto inicial* y que  $Y$  es el *conjunto final* de  $\varphi$ .

Dada una función  $\varphi: X \rightarrow Y$  si  $A$  es un subconjunto de  $X$  denotaremos por  $\varphi|_A: X \rightarrow Y$  la función cuyo dominio es el subconjunto  $\text{Dom } (\varphi|_A) = A \cap \text{Dom } \varphi$  y para cada  $p \in A \cap \text{Dom } \varphi$ ,  $\varphi|_A(p) = \varphi(p)$ . Notemos que  $\text{Codom } (\varphi|_A) = \{\varphi(p) | p \in A \cap \text{Dom } \varphi\}$ . Diremos que  $\varphi|_A: X \rightarrow Y$  es la *restricción* de  $\varphi$  a  $A$ .

Si  $\varphi: X \rightarrow Y$  es una función y  $A$  es un subconjunto de  $X$  llamaremos *imagen de A* al subconjunto  $\varphi(A) = \{\varphi(p) | p \in A \cap \text{Dom } \varphi\}$ . Cuando  $B$  es un subconjunto de  $Y$ , denotaremos por  $\varphi^{-1}B = \{p \in X | \varphi(p) \in B\}$  y lo llamaremos *imagen inversa de B*. En el caso particular que  $B = \{b\}$  la imagen inversa de  $\{b\}$  la llamaremos *fibra de b*, con frecuencia en vez de  $\varphi^{-1}\{b\}$  utilizaremos la notación  $\varphi^{-1}(b)$ . Dadas dos funciones  $\varphi: X \rightarrow Y$ ,  $\psi: Y \rightarrow Z$  se define la *función composición*  $\psi\varphi: X \rightarrow Z$  como aquella que tiene como dominio  $\text{Dom } (\psi\varphi) = \varphi^{-1}(\text{Dom } \psi)$  y está definida por  $\psi\varphi(p) = \psi(\varphi(p))$ . Nótese que  $\text{Codom } (\psi\varphi) = \psi(\text{Codom } \varphi)$  y  $\text{Dom } (\psi\varphi) = \varphi^{-1}(\text{Dom } \psi)$ .

Sea  $\varphi: X \rightarrow Y$  una función. Se dice que  $\varphi: X \rightarrow Y$  es *inyectiva* cuando se verifica que si  $\varphi(p) = \varphi(q)$ , entonces  $p = q$ . Dada una función inyectiva  $\varphi: X \rightarrow Y$ , entonces podemos considerar la función inversa  $\varphi^{-1}: Y \rightarrow X$ , que tiene por dominio  $\text{Dom } (\varphi^{-1}) = \text{Codom } \varphi$ , y que verifica que  $\varphi^{-1}(y) = x$  si  $\varphi(x) = y$ ,  $x \in \text{Dom } \varphi$ ,  $y \in \text{Codom } \varphi$ . Una función  $\varphi: X \rightarrow Y$  es *suprayectiva (exhaustiva o sobreyectiva)* si

$\text{Codom } \varphi = Y$ . En este caso también se dice que  $\varphi$  es una función de  $X$  sobre  $Y$ . Diremos que una función  $\varphi: X \rightarrow Y$  es *global* si  $\text{Dom } \varphi = X$ .

Recordemos que una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es una correspondencia que asocia a cada punto  $p$  del conjunto  $X$  un único punto  $f(p)$  del conjunto  $Y$ . Es importante observar que una función  $\varphi: X \rightarrow Y$  es aplicación si y sólo si  $\varphi$  es global.

## 2. Topología

En esta sección se introducen algunos conceptos básicos de Topología, no obstante, es conveniente que el lector conozca previamente las nociones básicas de Topología para poder seguir sin dificultades estas notas.

### 2.1. Espacios topológicos y funciones continuas.

DEFINICIÓN 2.1. Sea  $X$  un conjunto y sea  $\tau$  una familia no vacía de subconjuntos de  $X$ . Se dice que es una *topología* si  $\tau$  es cerrada por uniones de subfamilias arbitrarias (la unión de la subfamilia vacía es el subconjunto vacío) y por intersección de subfamilias finitas (la intersección de la subfamilia vacía es el conjunto total  $X$ ). Llamaremos *espacio topológico* a un par  $(X, \tau)$  donde  $\tau$  es una topología en el conjunto  $X$ . Normalmente acordaremos la notación de modo que  $X$  denotará tanto al par  $(X, \tau)$  como al conjunto subyacente. Los miembros de la topología  $\tau$  diremos que son los *abiertos* del espacio  $X$ .

Notemos que dado un espacio topológico el propio  $X$  y el subconjunto vacío  $\emptyset$  son abiertos.

EJEMPLO 2.1. Dado un conjunto  $X$  se puede considerar la topología trivial  $\tau_{\text{tri}} = \{X, \emptyset\}$  y la topología discreta  $\tau_{\text{dis}}$  formada por todos los subconjuntos de  $X$ .

DEFINICIÓN 2.2. Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Se dice que una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es *continua* si para todo abierto  $V$  de  $Y$  se tiene que  $f^{-1}V$  es abierto en  $X$ . Diremos que  $X, Y$  son *homeomorfos* si existen aplicaciones continuas  $\varphi: X \rightarrow Y$  y  $\psi: Y \rightarrow X$  tales que  $\psi\varphi = \text{id}_X$ ,  $\varphi\psi = \text{id}_Y$ , donde  $\text{id}_X, \text{id}_Y$  denotan las correspondientes aplicaciones identidad.

EJEMPLO 2.2. Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $A \subset X$  un subconjunto de  $X$ . La familia  $\tau/A = \{A \cap U \mid U \in \tau\}$  es una topología sobre el conjunto  $A$  que se llama la *topología relativa* de  $X$  en  $A$ . Es fácil comprobar que la inclusión  $\text{in}: A \rightarrow X$  es una aplicación continua.

DEFINICIÓN 2.3. Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Diremos que una función  $f: X \rightarrow Y$  es *continua* si la aplicación  $\tilde{f}: \text{Dom } f \rightarrow Y$ , dada por  $\tilde{f}(x) = f(x)$ ,  $x \in \text{Dom } f$ , es continua, donde en  $\text{Dom } f$  se considera la topología relativa de  $X$  en  $\text{Dom } f$ . Diremos que una función  $f: X \rightarrow$

$Y$  es un homeomorfismo si  $f$  es inyectiva y las funciones  $f$  y  $f^{-1}$  son continuas.

**PROPOSICIÓN 2.1.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función entre espacios topológicos. Supongamos que además tenemos que  $\text{Dom } f$  es un abierto de  $X$ . Entonces la función  $f$  es continua si y sólo si para todo abierto  $V$  de  $Y$  se tiene que  $f^{-1}(V)$  es un abierto de  $X$ .

**DEFINICIÓN 2.4.** Sea  $X$  un espacio topológico. Diremos que  $F$  es un *cerrado* si  $X \setminus F$  es un abierto de  $X$ . Sea  $N$  un subconjunto de  $X$  y  $p \in N$ . Se dice que  $N$  es un *entorno* de  $p$  si existe un abierto  $U$  tal que  $p \in U \subset N$ . Dado un subconjunto  $A$  de  $X$  llamaremos *interior* de  $A$  a la reunión de los abiertos contenidos en  $A$ . Llamaremos *clausura* de  $A$  que denotaremos por  $\text{cl}A$  a la intersección de los cerrados que contienen a  $A$ .

## 2.2. Base de una topología.

**DEFINICIÓN 2.5.** Sea  $\tau$  la topología de un espacio topológico  $X$ . Se dice que una subfamilia  $\mathcal{B} \subset \tau$  es una *base* de la topología  $\tau$  si para cada abierto  $U$  existe una subfamilia  $\mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}$  tal que  $U = \cup_{B \in \mathcal{B}_U} B$ .

**PROPOSICIÓN 2.2.** Sea  $X$  un conjunto y sea  $\mathcal{B}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Si la familia de subconjuntos  $\mathcal{B}$  verifica las siguientes propiedades

- (i)  $X = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$ ,
- (ii) Si  $p \in B \cap B'$ ,  $B, B' \in \mathcal{B}$ , entonces existe  $B'' \in \mathcal{B}$  tal que  $p \in B'' \subset B \cap B'$

Entonces existe una única topología  $\tau$  tal que  $\mathcal{B}$  es una base de  $\tau$ .

**DEFINICIÓN 2.6.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $p \in X$ . Una familia de entornos  $\mathcal{B}_p$  es una *base de entornos* de  $p$  si para cada entorno  $N$  de  $p$  existe  $B \in \mathcal{B}_p$  tal que  $p \in B \subset N$ .

Diremos que un conjunto es *contable* si su cardinalidad es finita o es la del conjunto de los números naturales.

**DEFINICIÓN 2.7.** Sea  $X$  un espacio topológico. Diremos que  $X$  es *primero contable* si para cada punto  $p \in X$  existe una base de entornos contable. Se dice que  $X$  es *segundo contable* la topología tiene una base contable.

**EJEMPLO 2.3.** Denotemos por  $\mathbb{R}$  el conjunto ordenado de los números reales y consideremos la familia de los intervalos abiertos acotados  $\mathcal{B} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R} \ a < b\}$ , donde  $(a, b) = \{r \in \mathbb{R} | a < r < b\}$ . Entonces  $\mathcal{B}$  satisface las propiedades (i) y(ii) de la proposición anterior y determina una única topología en  $\mathbb{R}$ , que diremos que es la topología habitual o usual. Consideraremos también con frecuencia el subespacio que llamaremos intervalo unidad  $I = \{r \in \mathbb{R} | 0 \leq r \leq 1\}$  con la topología relativa inducida por la topología usual de  $\mathbb{R}$ .

**EJEMPLO 2.4.** Denotemos por  $\mathbb{C}$  el conjunto de los números complejos. Dado un número complejo  $z$  su conjugado se denota por  $\bar{z}$  y su módulo por  $|z| = (z\bar{z})^{\frac{1}{2}}$ . Consideremos la familia de bolas  $\mathcal{B} = \{B(a, r) \mid a \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ , donde  $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ . Entonces  $\mathcal{B}$  satisface las propiedades (i) y (ii) de la proposición anterior y determina una única topología en  $\mathbb{C}$ .

**2.3. Propiedades topológicas.** Además de las propiedades de primero contable y segundo contable es muy frecuente el uso de las siguientes propiedades topológicas.

**DEFINICIÓN 2.8.** Se dice que un espacio topológico  $X$  es  $T_0$  si para cada pareja de puntos  $p, q \in X$ ,  $p \neq q$  existe  $U$  entorno de  $p$  tal que  $q \notin U$  o existe  $V$  entorno de  $q$  tal que  $p \notin V$ . Diremos que  $X$  es  $T_1$  si para cada pareja de puntos  $p, q \in X$ ,  $p \neq q$  existe  $U$  entorno de  $p$  tal que  $q \notin U$ . Se dice que un espacio topológico  $X$  es  $T_2$  o Hausdorff si para cada pareja de puntos  $p, q \in X$ ,  $p \neq q$  existe  $U$  entorno de  $p$  y existe  $V$  entorno de  $q$  tal que  $U \cap V = \emptyset$ .

Es fácil ver que si  $X$  es  $T_2$  entonces es  $T_1$  y que si  $X$  es  $T_1$  entonces es  $T_0$ .

**DEFINICIÓN 2.9.** Se dice que un espacio topológico  $X$  es *conexo* si siempre que  $X = U \cup V$  con  $U \cap V = \emptyset$ , entonces  $U = \emptyset$  o  $V = \emptyset$ . Diremos que un espacio topológico  $X$  es *localmente conexo* si cada punto del espacio tiene una base de entornos conexos.

**DEFINICIÓN 2.10.** Se dice que un espacio topológico  $X$  es *conexo por caminos* si siempre que  $x, y \in X$ , entonces existe una aplicación continua  $f: I \rightarrow X$  tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$ . Diremos que un espacio topológico  $X$  es *localmente conexo por caminos* si cada punto del espacio tiene una base de entornos conexos por caminos.

Es bien conocido que la conectividad por caminos implica conectividad.

**2.4. Construcciones.** Dada una familia de espacios  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$  consideraremos la *suma disjunta* (coproducto)  $\sum_{\alpha \in A} X_\alpha$  al conjunto  $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \times \{\alpha\}$  con la topología inducida por la base

$$\mathcal{B} = \{U \times \{\alpha\} \mid U \text{ es abierto en } X_\alpha, \alpha \in A\}$$

En el caso que la familia verifique que estos espacios son disjuntos dos a dos en vez de tomar la reunión anterior, para tener una mayor facilidad en la notación, se suele tomar directamente la reunión  $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$  y consecuentemente la base  $\mathcal{B} = \{U \mid U \text{ es abierto en } X_\alpha \text{ para algún } \alpha \in A\}$ . En el caso de familias finitas, por ejemplo dados dos espacios  $X_1, X_2$ , es frecuente usar las notaciones  $\bigsqcup_{i \in \{1,2\}} X_i$  o también  $X_1 \sqcup X_2$ .

Otra construcción frecuente asociada a una familia de espacios  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$  es el *producto*  $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  que tiene como soporte el producto

cartesiano y si  $\text{pr}_\alpha$  denota las proyecciones canónicas se considera la topología producto inducida por la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} \text{pr}_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \mid U_{\alpha_i} \text{ es abierto en } X_{\alpha_i}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A \right\}$$

En el caso de familias finitas, por ejemplo dados dos espacios  $X_1, X_2$ , es frecuente usar la notación  $X_1 \times X_2$ .

Finalizamos el proceso de construcción de nuevos espacios topológicos a partir de otros dados con la topología cociente. Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación exhaustiva de  $X$  en un conjunto  $Y$ . La topología *cociente* en el conjunto  $Y$  es la formada por aquellos subconjuntos  $V$  de  $Y$  tales que  $f^{-1}V$  es un abierto de  $X$ . Es interesante recordar que si en  $Y$  se considera la topología cociente y  $g: Y \rightarrow Z$  es una aplicación entre espacios topológicos, entonces  $g$  es continua si y sólo si  $gf$  es continua.

**2.5. Algunos espacios.** Los siguientes espacios serán utilizados con frecuencia en estas notas.

**EJEMPLO 2.5.** Denotemos por  $\mathbb{R}^n$  el conjunto de  $n$ -tuplas de números reales  $r = (r_1, \dots, r_n)$ . Se considera en  $\mathbb{R}^n$  la topología producto que tiene las siguientes propiedades: Es segundo contable, Hausdorff, conexa por caminos y localmente conexa por caminos.

**EJEMPLO 2.6.** Para  $n \geq 0$ , la  $n$ -esfera unidad  $S^n$  se define como el subespacio

$$S^n = \{r \in \mathbb{R}^{n+1} \mid r_1^2 + \dots + r_{n+1}^2 = 1\}$$

donde hemos considerado la topología relativa.

**EJEMPLO 2.7.** Para  $n \geq 0$ , el  $n$ -disco unidad  $D^n$  se define como el subespacio

$$D^n = \{r \in \mathbb{R}^n \mid r_1^2 + \dots + r_n^2 \leq 1\}$$

con la topología relativa. La bola unidad la denotaremos por

$$B^n = \{r \in \mathbb{R}^n \mid r_1^2 + \dots + r_n^2 < 1\}$$

**EJEMPLO 2.8.** Para  $n \geq 0$ , el  $n$ -espacio proyectivo real  $P^n(\mathbb{R})$  se define como el cociente obtenido de la  $n$ -esfera  $S^n$  identificando puntos antípodas y considerando la topología cociente.

**EJEMPLO 2.9.** Una *métrica* en un conjunto  $X$  es una aplicación  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que satisface las siguientes propiedades:

- (M1) Para  $x, y \in X$ ,  $d(x, y) \geq 0$ ; además,  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ .
- (M2) Si  $x, y \in X$ , se tiene que  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- (M3) Sean  $x, y, z \in X$ . Entonces  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

La bola de centro  $a \in X$  y radio  $\epsilon > 0$  se define como el subconjunto

$$B_d(a, \epsilon) = \{x \in X | d(a, x) < \epsilon\}$$

y el disco

$$D_d(a, \epsilon) = \{x \in X | d(a, x) \leq \epsilon\}$$

Si en el contexto de trabajo la métrica está bien determinada o se trata de la métrica usual eliminaremos el subíndice en las notaciones de discos y bolas.

Un *espacio métrico* consiste en un conjunto  $X$  junto con una métrica  $d$ . En un espacio métrico  $(X, d)$  se puede considerar la siguiente familia de subconjuntos:

$$\tau = \{U \subset X | \text{Si } x \in U, \text{ existe } \epsilon > 0 \text{ tal que } B(x, \epsilon) \subset U\}$$

Se prueba que  $\tau$  es una topología, que diremos que está inducida por la métrica  $d$ . Un espacio topológico  $X$  se dice *metrizable* si su topología  $\tau_X$  está inducida por una métrica.

**EJEMPLO 2.10.** En  $\mathbb{R}^n$  se pueden considerar la *métrica euclidiana*, de modo que si  $r, s \in \mathbb{R}^n$ ,  $r = (r_1, \dots, r_n)$ ,  $s = (s_1, \dots, s_n)$  la aplicación  $d$  viene dada por

$$d(r, s) = \left( \sum_{i=1}^n (r_i - s_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

La topología inducida por la métrica euclidiana, es precisamente la hemos considerado en el ejemplo 2.5. Por ser la métrica más usual en la notación de bolas y discos suprimiremos el subíndice

$$B(a, \epsilon) = \{r \in \mathbb{R}^n | \left( \sum_{i=1}^n (r_i - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon\}$$

y el disco

$$D(a, \epsilon) = \{r \in \mathbb{R}^n | \left( \sum_{i=1}^n (r_i - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon\}$$

También es frecuente la *métrica cartesiana*,  $\rho$ , dada por

$$\rho(r, s) = \text{máx}\{|r_i - s_i| | i \in \{1, \dots, n\}\}$$

La topología inducida es también la del ejemplo 2.5. Las bolas y discos se denotaran por  $B_\rho(a, \epsilon)$ ,  $D_\rho(a, \epsilon)$ .

### 3. Álgebra lineal

Introducimos a continuación la noción de grupo abeliano y la de espacio vectorial

**DEFINICIÓN 3.1.** Sea  $V$  un conjunto y una aplicación  $+: V \times V \rightarrow V$ , que denotamos por  $+(a, b) = a + b$ . Diremos que la pareja anterior es un grupo abeliano si se verifican las siguientes propiedades:

- (i) Asociatividad de la suma:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .

- (ii) Conmutatividad de la suma:  $a + b = b + a$  .
- (iii) Existencia de neutro aditivo: Existe  $0 \in V$  tal que  $a + 0 = a$  .
- iv) Existencia de opuesto aditivo: Para cada  $a \in V$  existe un  $a' \in V$  tal que  $a + a' = 0$  .

DEFINICIÓN 3.2. Un *espacio vectorial real* es un grupo abeliano  $V$  con su operación suma  $(a, b) \mapsto a + b$ , de  $V \times V$  en  $V$  y que está provisto de una acción  $(\lambda, a) \mapsto \lambda \cdot a$ , de  $\mathbb{R} \times V$  en  $V$ , con las siguientes propiedades:

- (i) Acción trivial de 1:  $1 \cdot a = a$  .
- (ii) Asociatividad de la acción:  $\lambda \cdot (\mu \cdot a) = (\lambda\mu) \cdot a$  .
- (iii) Distributividad de la acción respecto a la suma:

$$\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b .$$

- (iv) Distributividad de la suma respecto a la acción:

$$(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a .$$

EJEMPLO 3.1. El espacio vectorial más importante para el desarrollo de estos apuntes es  $\mathbb{R}^m$ , donde la suma y la acción que se definen para cada coordenada están inducidas por la suma y el producto del anillo de división de los números reales. Otro ejemplo básico lo constituyen el espacio de las matrices reales de  $n$  filas y  $m$  columnas (isomorfo a  $\mathbb{R}^{n \times m}$ ) con la suma y la acción definidas también coordenada a coordenada.

Una sucesión ordenada  $B = (v_1, \dots, v_n)$  de *vectores*; es decir, de elementos en un espacio vectorial  $V$ , es una *base* si cada vector  $v$  de  $V$  puede expresarse de una única manera como

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i .$$

Si este es el caso, decimos que los escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son las *coordenadas* de  $v$  en la base  $B$  . Se puede probar que dos bases tienen el mismo cardinal. Llamaremos dimensión,  $\dim(V)$ , de un espacio vectorial  $V$  al cardinal de una de sus bases.

DEFINICIÓN 3.3. Una *aplicación lineal* de un espacio vectorial  $V$  en otro  $W$  es una aplicación  $L: V \rightarrow W$  que verifica:

$$L(\lambda a + \mu b) = \lambda L(a) + \mu L(b) .$$

Teniendo en cuenta que hay una correspondencia biunívoca entre  $\mathbb{R}^n$  y las matrices reales de  $n$  filas y 1 columna. Podemos denotar un vector de  $\mathbb{R}^n$  mediante un vector columna  $r$ .

Si  $A$  es una matriz de  $n$  filas y  $m$  columnas (una matriz  $n \times m$ ), la aplicación

$$L_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad L_A(r) = Ar$$

es una aplicación lineal, donde  $r$  es el vector columna (matriz de una columna) que representa un vector de  $\mathbb{R}^n$ . Recíprocamente, si  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación lineal, podemos formar la matriz  $A_L$  cuya  $i$ -ésima columna es el vector columna  $L(e_i)$ ; es decir, la imagen por  $L$  del  $i$ -ésimo vector canónico de  $\mathbb{R}^m$  colocado en forma de columna.

En la definición de  $L_A$  estamos usando el producto de matrices en el caso particular de una matriz de  $n \times m$  por un vector columna que es una matriz  $m \times 1$ . En general si  $A$  es una matriz de  $n \times m$  y  $B$  otra de  $m \times l$ , se define el producto  $C = AB$  como la matriz de  $n \times l$  cuya coordenada en la fila  $i$  columna  $j$  es:

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^m a_{ih} b_{hj}.$$

Así que el producto  $A r$  es un vector columna cuya coordenda  $i$ -ésima es

$$\sum_{h=1}^m a_{ih} r_h,$$

es decir, coincide con el producto de la  $i$ -ésima fila de  $A$  con  $r$ .

**DEFINICIÓN 3.4.** Sea una aplicación lineal  $L$  de un espacio vectorial real  $V$  en otro  $W$ . Llamaremos *núcleo* de  $L$  al subespacio  $\text{Ker} = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$ . Como en el caso de funciones  $\text{Im}(L) = \{L(v) \mid v \in V\}$  denotará el conjunto imagen.

**PROPOSICIÓN 3.1.** Sea una aplicación lineal  $L$  de un espacio vectorial real  $V$  en otro  $W$

- (i) Existe un isomorfismo lineal canónico  $V/\text{Ker}(L) \cong \text{Im}(L)$
- (ii) Si  $V$  y  $W$  son de dimensión finita se tiene que

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(L)) + \dim(\text{Im}(L)).$$

- (iii) Si  $V$  y  $W$  son de dimensión finita se tiene que

$$\dim(\text{Im}(L)) \leq \max\{\dim(V), \dim(W)\}.$$

**DEFINICIÓN 3.5.** Sea una aplicación lineal  $L$  de un espacio vectorial real  $V$  en otro  $W$ . Llamaremos *rango* de  $L$  a  $\dim(\text{Im}(L))$ .

**DEFINICIÓN 3.6.** Sea una aplicación lineal  $L$  de un espacio vectorial real  $V$  en otro  $W$ . Diremos que  $L$  es un *monomorfismo* si  $L$  es inyectiva y  $L$  es un *epimorfismo* si  $L$  es suprayectiva.

**PROPOSICIÓN 3.2.** Sea una aplicación lineal  $L$  de un espacio vectorial real  $V$  en otro  $W$ , ambos de dimensión finita.

- (i) Si el rango de  $L$  es igual a  $\dim(V)$ , entonces  $L$  es un monomorfismo.
- (ii) Si el rango de  $L$  es igual a  $\dim(W)$ , entonces  $L$  es un epimorfismo.

#### 4. Análisis matemático

En esta sección recordamos algunas de las nociones básicas de análisis matemático que se van a utilizar en estos apuntes. En primer lugar analizamos aquellas funciones que se pueden aproximar en un punto de su dominio por una aplicación lineal.

En estas notas hemos utilizado la palabra diferenciable para denominar a las funciones de clase  $C^\infty$ , sin embargo es también muy frecuente el uso de la misma palabra “diferenciable” para designar a las funciones que se pueden aproximar en cada punto de su dominio por una aplicación lineal. Para evitar confusiones en este texto se utilizará el término derivable para designar el último concepto; es decir, para denominar a las funciones que se pueden aproximar en cada punto por una aplicación lineal.

**DEFINICIÓN 4.1.** Una función  $f$  de  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^n$  es *derivable en un punto*  $r^0$  si existe un entorno abierto  $U$  de  $r^0$  tal que  $U \subset \text{Dom } f$  y existe una transformación lineal  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{f(r^0 + s) - f(r^0) - L(s)}{\|s\|} \right) = 0$$

Además, cuando éste sea el caso, la transformación lineal  $L$  se llama la *derivada de la función en el punto*  $r^0$  y la denotaremos por  $Df_{r^0}$ . Si una función  $f$  es derivable en todos los puntos de su dominio diremos que es *derivable*.

Las siguientes propiedades de la derivación son bien conocidas, referimos al lector a textos tales como [1, 14].

**PROPOSICIÓN 4.1.** Supongamos que  $f$  es derivable en  $r^0$ , entonces  $f$  es continua en  $r^0$ .

**OBSERVACIÓN 4.1.** Toda transformación lineal  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es derivable en cada punto  $r^0 \in \mathbb{R}^m$  y además  $DL_{r^0} = L$ .

**TEOREMA 4.1.** (Regla de la cadena) Supongamos que la función  $f$  de  $\mathbb{R}^l$  en  $\mathbb{R}^m$  es derivable en un punto  $r^0 \in \mathbb{R}^l$  y que la función  $g$  de  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^n$  es derivable en  $s^0 = f(r^0) \in \mathbb{R}^m$ . Entonces  $h = g \circ f$  es derivable en  $r^0$  y además  $Dh_{r^0} = Dg_{s^0} \circ Df_{r^0}$ .

**DEFINICIÓN 4.2.** Dado el espacio  $\mathbb{R}^n$  las proyecciones canónicas se definen como las aplicaciones  $r_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,

$$r_i(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = a_i.$$

Dada una función  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  sus componentes son las funciones  $f_1 = r_1 f, \dots, f_n = r_n f$ .

Si  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función, entonces  $f$  es de la forma  $(f_1, \dots, f_n)$ , donde la función  $f_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es la  $i$ -ésima componente de  $f$ , es decir,  $f_i = r_i \circ f$ , donde  $r_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la  $i$ -ésima proyección canónica. Con estas notaciones podemos enunciar la siguiente

PROPOSICIÓN 4.2. Para que una función  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  sea derivable en un punto  $r_0 \in \mathbb{R}^m$  es necesario y suficiente que cada una de sus componentes  $f_i$  sea derivable en el mismo punto. Además, si este es el caso, se tiene que  $(Df)_{r_0} = ((Df_1)_{r_0}, \dots, (Df_n)_{r_0})$ .

Dadas las funciones  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $g: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la función *producto*  $f \times g$  se define del siguiente modo  $(f \times g)(r, s) = (f(r), g(s))$ .

PROPOSICIÓN 4.3. Si dos funciones  $f$  y  $g$  son derivables respectivamente en  $r^0$  y  $s^0$ , entonces su producto  $f \times g$  resulta derivable en  $(r^0, s^0)$  y además

$$D(f \times g)_{(r^0, s^0)} = Df_{r^0} \times Dg_{s^0} .$$

Es decir, la derivada del producto es el producto de las derivadas.

La derivada  $Df_{r^0}$  da una aproximación lineal de la función  $f$ , de modo que  $Df_{r^0}(r - r_0)$  aproxima el valor  $f(r) - f(r^0)$ . Esta aproximación lineal sólo depende de los valores de  $f$  en las proximidades de  $r^0$ . En el caso de dimensión superior a 1, puede aproximarse a un punto por caminos totalmente diferentes. Por ejemplo, en el caso de dos variables, podemos aproximarnos al punto  $(a, b)$  por las rectas paralelas a los ejes coordenados, es decir, por puntos de la forma  $(a + \xi, b)$  con  $\xi \rightarrow 0$  o de la forma  $(a, b + \xi)$  con  $\xi \rightarrow 0$ . Pero también puede acercarse siguiendo la dirección de otro vector  $(u, v)$  por puntos de la forma  $(a + \xi u, b + \xi v)$  donde  $\xi \rightarrow 0$ . Incluso estas formas de acercarse a  $(a, b)$  no agotan todas las posibilidades porque es posible seguir la trayectoria de una red, y en particular una curva, que termine en  $(a, b)$ . Estas observaciones nos van a conducir a la noción de derivadas parciales y derivadas direccionales y a estudiar sus relaciones con la derivada.

DEFINICIÓN 4.3. Supongamos que  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función definida en un entorno de  $r^0 \in \mathbb{R}^m$ . Dado un vector  $u$ , decimos que  $f$  es *derivable en  $r^0$  en la dirección de  $u$*  si existe el límite

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(r^0 + \xi u) - f(r^0)}{\xi}$$

En tal caso escribiremos  $(D_u f)_{r^0} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(r^0 + \xi u) - f(r^0)}{\xi}$  y diremos que es la *derivada direccional de  $f$  en la dirección  $u$  en el punto  $r^0$* .

PROPOSICIÓN 4.4. Si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en  $r^0$ , entonces es derivable en cualquier dirección  $u$  y además  $(D_u f)_{r^0} = Df_{r^0}(u)$

Sea  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  es  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^m$ , definimos la derivada parcial de una función en  $r^0$  del siguiente modo:

DEFINICIÓN 4.4. Si  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es una función definida en un entorno de un punto  $r^0 \in \mathbb{R}^m$ , decimos que  $f$  es *derivable en  $r^0$  con*

respecto a la  $i$ -ésima variable si es derivable en  $r^0$  en la dirección del  $i$ -ésimo vector canónico  $e_i$ . En ese caso escribimos

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r_i}\right)_{r^0} = (D_{e_i}f)_{r^0}$$

y la llamaremos la  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  en  $r^0$ . Diremos que existe la  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  si existe en cada punto de su dominio.

Notemos que la  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  en  $r^0$  se puede expresar también como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r_i}\right)_{r^0} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(r_1^0, \dots, r_i^0 + \xi, \dots, r_m^0) - f(r_1^0, \dots, r_i^0, \dots, r_m^0)}{\xi}$$

Observemos que cuando existe la  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  verifica que  $\text{Dom} \left(\frac{\partial f}{\partial r_i}\right) = \text{Dom} f$ .

En la proposición siguiente se analiza cómo están relacionadas las derivadas parciales con la derivada de una función.

**PROPOSICIÓN 4.5.** Sea  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es derivable en  $r^0$ , y consideremos  $(f_1, \dots, f_n)$  sus componentes  $f_i = r_i f$ . Si tomamos las derivadas parciales

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial r_j}\right)_{r^0} = (D_{e_j}f_i)_{r^0} = (Df_i)_{r^0}(e_j)$$

se tiene

$$r_i(Df)_{r^0}(u) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial f_i}{\partial r_j}\right)_{r^0} u_j$$

donde  $u = (u_1, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^m u_i e_i$ .

El siguiente resultado permite determinar la derivabilidad de una función a partir de la existencia y continuidad de las derivadas parciales.

**TEOREMA 4.2.** Supongamos que  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es una función definida en un conjunto abierto  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ . Una condición suficiente para que  $f$  sea derivable en cada punto de  $A$  es que todas las derivadas parciales  $\partial f / \partial r_i$  estén definidas en  $A$  y que al menos  $n-1$  de ellas sean continuas en  $A$ .

**DEFINICIÓN 4.5.** Se dice que una función  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^k$  en un punto  $r^0 \in \text{Dom} f$  si existe un entorno abierto  $V$  de  $r^0$  tal que  $V \subset \text{Dom} f$  y  $f$  tiene en  $V$  y en todos los ordenes menores o iguales que  $k$  todas las derivadas parciales

$$\frac{\partial^{i_1+\dots+i_m} f}{(\partial r_1)^{i_1} \dots (\partial r_m)^{i_m}} \quad (i_k \geq 0, \quad i_1 + \dots + i_m \leq k)$$

y éstas son continuas en  $V$ . Se dice que  $f$  es de *clase*  $C^k$  si  $f$  es de clase  $C^k$  en todos los puntos  $r^0$  de  $\text{Dom } f$ . Nótese que  $f$  es de clase  $C^0$  si y sólo si es continua y tiene dominio abierto.

DEFINICIÓN 4.6. Se dice que una función  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es de *clase*  $C^\infty$  en un punto  $r^0 \in \text{Dom } f$  si existe un entorno abierto  $V$  de  $r^0$  tal que  $V \subset \text{Dom } f$  y  $f$  tiene en  $V$  y en todos los ordenes posibles todas las derivadas parciales y éstas son continuas en  $V$ . Se dice que  $f$  es de *clase*  $C^\infty$  si  $f$  es de clase  $C^\infty$  en todos los puntos  $r^0$  de  $\text{Dom } f$ .

DEFINICIÓN 4.7. Una función  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^\infty$  se dice que es *analítica real* en un punto  $r^0 \in \text{Dom } f$  si existe un entorno abierto  $V$  de  $r^0$  tal que  $V \subset \text{Dom } f$  y  $f|_V$  coincide con su desarrollo de Taylor que converge en  $V$ . Se dice que  $f$  es *analítica real* si lo es en cada punto de su dominio.

DEFINICIÓN 4.8. Se dice que una función  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de *clase*  $C^\infty$  en un punto  $r^0 \in \text{Dom } f$  si lo son cada una de sus componentes  $f_1, \dots, f_m: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $f$  es de *clase*  $C^\infty$  si  $f$  es de clase  $C^\infty$  en todos los puntos  $r^0$  de  $\text{Dom } f$ . Similarmente se definen las funciones de  $\mathbb{R}^m$  en  $\mathbb{R}^n$  de clase  $C^k$  y las analíticas reales.

OBSERVACIÓN 4.2. Una función analítica real es de clase  $C^\infty$  y éstas últimas son de clase  $C^k$ . Las funciones de clase  $C^k$  son continuas.

Utilizaremos con frecuencia las siguientes propiedades de las funciones  $C^\infty$ .

- PROPOSICIÓN 4.6. (i) Si  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función  $C^\infty$  en un punto  $r^0 \in \text{Dom } f$ , entonces  $f$  es continua en  $r^0$ .
- (ii) Sea  $f: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función  $C^\infty$  en un punto  $r^0 \in \text{Dom } f$  y sea  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  otra función  $C^\infty$  en el punto  $f(r^0)$ . Entonces  $gf$  es  $C^\infty$  en el punto  $r^0$ .
- (iii) Sean  $f, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  funciones tales que  $\text{Dom } f \subset \text{Dom } g$  y  $g|_{\text{Dom } f} = f$ . Si  $r^0 \in \text{Dom } f$  y  $f$  es  $C^\infty$  en  $r^0$ , entonces  $g$  es  $C^\infty$  en  $r^0$ .
- (iv) Sea  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función  $C^\infty$  y supongamos que un abierto  $U \subset \text{Dom } f$ . Entonces  $f|_U$  es  $C^\infty$ .
- (v) Si  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función  $C^\infty$ , entonces  $\text{Dom } f$  es un abierto de  $\mathbb{R}^m$ .

## VARIETADES DIFERENCIABLES

En este capítulo, introducimos la noción de variedad diferenciable y función diferenciable, también vemos que una variedad determina una topología en el correspondiente conjunto subyacente y estudiamos las propiedades básicas de las estructuras diferenciable y topológica de una variedad.

### 1. La noción de variedad diferenciable

Según Riemann para dar una geometría necesitamos un conjunto de puntos y una correspondencia que asocie a cada punto unas coordenadas. Esta idea se puede modelar a través de la noción de carta:

DEFINICIÓN 1.1. Sea  $M$  un conjunto cualquiera, una función  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  inyectiva con rango abierto se llama *carta  $m$ -dimensional*. Si tomamos las proyecciones canónicas,  $r_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , a la composición  $x_i = r_i x: M \rightarrow \mathbb{R}$  se le llama la  *$i$ -ésima coordenada de la carta*.

Obsérvese que en el estudio de curvas y superficies en  $\mathbb{R}^3$  se utilizan funciones con valores vectoriales cuyos dominios son abiertos de  $\mathbb{R}$  para las curvas y abiertos de  $\mathbb{R}^2$  para las superficies. Estas funciones se suelen llamar parametrizaciones y corresponden a las funciones inversas de las cartas consideradas en la definición anterior.

DEFINICIÓN 1.2. Sea  $M$  un conjunto cualquiera. Una colección  $\mathcal{A} = \{x_\alpha | x_\alpha \text{ carta } m\text{-dimensional sobre el conjunto } M\}$  es denominada *atlas diferenciable  $m$ -dimensional* de  $M$  si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) La reunión de los dominios de las cartas es  $M$ .
- (ii) Para cada pareja de cartas  $x_\alpha, x_\beta$  de  $\mathcal{A}$  la función  $x_\beta x_\alpha^{-1}$  es de clase  $C^\infty$ .

DEFINICIÓN 1.3. Sea  $M$  un conjunto cualquiera. Dos atlas  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  diferenciables y  $m$ -dimensionales de  $M$  son *compatibles* si  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  es un atlas diferenciable  $m$ -dimensional de  $M$ .

PROPOSICIÓN 1.1. La relación de compatibilidad en la familia de los atlas diferenciables  $m$ -dimensionales de un conjunto  $M$  es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACIÓN. La propiedades reflexiva y simétrica se verifican fácilmente. Para comprobar la transitividad supongamos que  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$

son atlas diferenciables de  $M$  de modo que  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  son compatibles y  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  también lo son. Puesto que tanto  $\mathcal{A}$  como  $\mathcal{C}$  son atlas se verifica que la reunión de los dominios de  $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$  es  $M$ . Para ver que se verifica la propiedad (ii), sean  $x_\alpha$  carta de  $\mathcal{A}$  y  $x_\gamma$  carta de  $\mathcal{C}$ . Veamos que  $x_\gamma x_\alpha^{-1}$  es  $C^\infty$  en cada uno de los puntos de su dominio. Sea  $r_0 = x_\alpha(p_0)$  con  $p_0 \in \text{Dom } x_\gamma$  y tomemos una carta  $x_\beta$  en el punto  $p_0$ . Notemos que  $(x_\gamma x_\beta^{-1})(x_\beta x_\alpha^{-1})$  es  $C^\infty$  y su dominio  $U$  es un abierto tal que  $r_0 \in U \subset \text{Dom}(x_\gamma x_\alpha^{-1})$ . Entonces  $(x_\gamma x_\alpha^{-1})|_U = (x_\gamma x_\beta^{-1})(x_\beta x_\alpha^{-1})$  que es  $C^\infty$  por ser composición de funciones  $C^\infty$ ; véase (ii) de la proposición 4.6 del capítulo 0. Aplicando ahora (iii) de esta misma proposición 4.6 se tiene que  $x_\gamma x_\alpha^{-1}$  es  $C^\infty$  en  $r_0$ , esto sucede para cada  $r_0$  de su dominio, por lo tanto  $x_\gamma x_\alpha^{-1}$  es  $C^\infty$ . De modo análogo se ve que un cambio de la forma  $x_\alpha x_\gamma^{-1}$  es  $C^\infty$ . En consecuencia, se tiene que  $\mathcal{A}$  es compatible con  $\mathcal{C}$  y la relación es de equivalencia.  $\square$

DEFINICIÓN 1.4. Una *variedad diferenciable  $m$ -dimensional*<sup>1</sup> (en algunos textos también se denomina variedad diferencial) consiste en un conjunto  $M$  y en una clase de equivalencia  $[\mathcal{A}]$  del conjunto de atlas diferenciables  $m$ -dimensionales módulo la relación de compatibilidad. Llamaremos a  $M$  el *conjunto subyacente de la variedad* y la clase  $[\mathcal{A}]$  diremos que es la *estructura diferenciable* dada sobre el conjunto  $M$ .

Notemos que una variedad queda determinada por una pareja  $(M, \mathcal{A})$  donde  $\mathcal{A}$  es una atlas diferenciable  $m$ -dimensional de  $M$ . Dos parejas  $(M, \mathcal{A}), (M, \mathcal{B})$  determinan la misma variedad si  $\mathcal{A}$  es compatible con  $\mathcal{B}$ . Cuando el contexto no de lugar a confusión, diremos que  $\mathcal{A}$  es la estructura diferenciable de la variedad en vez de su clase de equivalencia. También será frecuente que denotemos directamente por  $M$  a una variedad diferenciable de modo que unas veces  $M$  denota el conjunto subyacente y otras la pareja formada por el conjunto subyacente y la estructura diferenciable.

En la familia de los atlas diferenciables  $m$ -dimensionales de un conjunto  $M$ , se puede considerar la relación de contenido. Los elementos maximales de este conjunto ordenado verifican la siguiente propiedad:

PROPOSICIÓN 1.2. Las estructuras diferenciables  $m$ -dimensionales sobre el conjunto  $M$  están en correspondencia biunívoca con los elementos maximales del conjunto ordenado de los atlas diferenciables  $m$ -dimensionales de  $M$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $c$  una clase de equivalencia, y consideremos  $\mathcal{M}_c = \cup_{\mathcal{C} \in c} \mathcal{C}$ . En primer lugar, comprobaremos que  $\mathcal{M}_c$  es un atlas. Supongamos que  $x_\alpha \in \mathcal{A} \in c$  y  $x_\beta \in \mathcal{B} \in c$ . Puesto que  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  es un atlas se tiene que  $x_\beta^{-1} x_\alpha$  es  $C^\infty$ . Además es obvio que la reunión de los miembros de  $\mathcal{M}_c$  es  $M$ . Por lo tanto  $\mathcal{M}_c$  es un atlas y también se

<sup>1</sup>La definición moderna de variedad diferenciable se atribuye a Hassler Whitney [42]

tiene que  $\mathcal{M}_c \in c$ . En segundo lugar veremos que  $\mathcal{M}_c$  es maximal. Si  $\mathcal{M}_c \subset \mathcal{D}$ , entonces  $\mathcal{M}_c \cup \mathcal{D} = \mathcal{D}$  es un atlas, luego  $\mathcal{D} \in c$ , y por lo tanto  $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}_c$ . Por lo que  $\mathcal{M}_c$  es maximal.

Ahora a cada atlas maximal  $\mathcal{M}$  le podemos asociar la clase  $c_{\mathcal{M}} = [\mathcal{M}]$ . Sea  $c = [\mathcal{A}]$ , entonces  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_c$  y en consecuencia  $[\mathcal{M}_c] = [\mathcal{A}] = c$ . Por otra parte, si  $\mathcal{C}$  es maximal, se tiene que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_{[c]}$ . Entonces  $\mathcal{C} = \mathcal{M}_{[c]}$ .  $\square$

**EJEMPLO 1.1.** Consideremos el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ , tomemos la carta identidad  $\text{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces el atlas  $\mathcal{A} = \{\text{id}\}$  determina una estructura diferenciable 1-dimensional en el conjunto  $\mathbb{R}$ . En algunos de los ejemplos posteriores la variable que representa a un número real se puede interpretar como la variable tiempo, es por ello que, en este caso, también denotaremos la carta identidad por  $t = \text{id}_{\mathbb{R}}$ .

**EJEMPLO 1.2.** Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , consideremos la inclusión  $x = \text{in}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  que es inyectiva y tiene codominio abierto. Entonces el atlas  $\mathcal{A} = \{x\}$  da una estructura diferenciable  $n$ -dimensional al abierto  $U$ . En particular la identidad de  $\mathbb{R}^n$  induce una estructura canónica de variedad en  $\mathbb{R}^n$ .

**PROPOSICIÓN 1.3.** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y sea  $f: M \rightarrow N$  una función. Sean  $x, \bar{x}$  cartas de  $M$  en  $p \in \text{Dom } f$ , y  $y, \bar{y}$  de  $N$  en  $f(p)$ . Entonces  $yfx^{-1}$  es de clase  $C^\infty$  en  $x(p)$  si y sólo si  $\bar{y}f\bar{x}^{-1}$  es de clase  $C^\infty$  en  $\bar{x}(p)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $yfx^{-1}$  es de clase  $C^\infty$  en  $x(p)$ . Como  $x\bar{x}^{-1}$  es  $C^\infty$  en  $\bar{x}(p)$  y  $\bar{y}y^{-1}$  es  $C^\infty$  en  $yf(p)$  si aplicamos (ii) de la proposición 4.6 del capítulo 0, se tiene que  $(\bar{y}y^{-1})(yfx^{-1})(x\bar{x}^{-1})$  es  $C^\infty$  en  $\bar{x}(p)$ . Además  $\text{Dom}(\bar{y}y^{-1}yfx^{-1}x\bar{x}^{-1}) \subset \text{Dom}(\bar{y}f\bar{x}^{-1})$ . Por lo tanto como consecuencia del apartado (iii) de la proposición 4.6 obtenemos que  $\bar{y}f\bar{x}^{-1}$  es de clase  $C^\infty$  en  $\bar{x}(p)$ .  $\square$

**DEFINICIÓN 1.5.** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y sea  $f: M \rightarrow N$  una función. Se dice que  $f$  es *diferenciable en un punto*  $p \in M$  si existen cartas  $x$  de  $M$  en  $p$  e  $y$  de  $N$  en  $f(p)$  tal que  $yfx^{-1}$  es de clase  $C^\infty$  en  $x(p)$ . Se dice que  $f$  es *diferenciable* si  $f$  es diferenciable en cada punto de su dominio. Diremos que la función  $f$  es un *difeomorfismo* si  $f$  es inyectiva y  $f, f^{-1}$  son diferenciables. Se dice que una variedad  $M$  es *difeomorfa* a una variedad  $N$  si existe un difeomorfismo global de  $M$  sobre  $N$ .

El conjunto de funciones diferenciables de  $M$  en  $N$  se denotará por  $C^\infty(M, N)$ . Si  $p$  y  $q$  son puntos de  $M$  y  $N$  respectivamente, utilizaremos las siguientes notaciones:

$$C^\infty((M, p), N) = \{f \in C^\infty(M, N) | p \in \text{Dom } f\},$$

$$C^\infty((M, p), (N, q)) = \{f \in C^\infty(M, N) | p \in \text{Dom } f, f(p) = q\}.$$

Para  $U$  abierto de  $M$  usaremos las notaciones:

$$C_U^\infty(M, N) = \{f \in C^\infty(M, N) \mid \text{Dom } f = U\} .$$

En el caso más frecuente que  $N = \mathbb{R}$  se reducen del modo siguiente:

$$\begin{aligned} C^\infty(M, \mathbb{R}) &= C^\infty(M) , \\ C^\infty((M, p), \mathbb{R}) &= C^\infty(M, p) , \\ C_U^\infty(M, \mathbb{R}) &= C_U^\infty(M) . \end{aligned}$$

**PROPOSICIÓN 1.4.** Una función  $F: (\mathbb{R}^m, [\{\text{id}_{\mathbb{R}^m}\}]) \rightarrow (\mathbb{R}^n, [\{\text{id}_{\mathbb{R}^n}\}])$  es diferenciable si y sólo si  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^\infty$  .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $x = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$  e  $y = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  , entonces  $yFx^{-1} = F$  . De la definición de función diferenciable se tiene que  $F$  es diferenciable si y sólo si  $F$  es  $C^\infty$  .  $\square$

Notemos que para dar la definición de variedad diferenciable y función diferenciable hemos utilizado los espacios  $\mathbb{R}^m$  y las funciones  $C^\infty$  entre ellos. Si en vez de usar estas funciones tomamos, por ejemplo, funciones de clase  $C^k$  , se obtiene la noción de variedad de clase  $C^k$   $m$ -dimensional. En particular, para  $k = 0$  tenemos la noción de variedad topológica. Otra familia interesante es la de las variedades analíticas reales; para definir esta noción se consideran funciones analíticas reales. Es también frecuente utilizar el semiespacio  $\mathbb{R}_+^m = \{(r_1, \dots, r_m) \mid r_m \geq 0\}$  para introducir la noción de variedad con borde. Para definir las variedades complejas se usa el espacio  $\mathbb{C}^m$  . Finalmente hacemos notar que se pueden utilizar espacios de Banach para introducir variedades de dimensión infinita.

## 2. La topología de una variedad diferenciable

En esta sección veremos que la estructura diferenciable de una variedad siempre induce una topología en el conjunto subyacente de ésta.

**PROPOSICIÓN 2.1.** Sea  $\mathcal{A}$  una atlas diferenciable  $m$ -dimensional sobre un conjunto  $M$  . Sea  $x$  una carta de  $\mathcal{A}$  y supongamos que  $W \subset \text{Dom } x$  verifica que  $x(W)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^m$  , entonces  $\mathcal{A} \cup \{x|_W\}$  es un atlas diferenciable  $m$ -dimensional compatible con  $\mathcal{A}$  .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $y$  una carta de  $\mathcal{A}$  . Entonces teniendo en cuenta que el dominio de una composición de funciones viene dado por  $\text{Dom}(\varphi\psi) = \psi^{-1}(\text{Dom}(\varphi))$  . En particular se tiene que  $\text{Dom } y(x|_W)^{-1} = x|_W(\text{Dom } y) = x(W \cap \text{Dom } x \cap \text{Dom } y) = x(W \cap \text{Dom } y) = x(W) \cap x(\text{Dom } y) = x(W) \cap \text{Dom}(yx^{-1})$  . De modo análogo  $\text{Dom}(x|_W y^{-1}) = y(\text{Dom } x|_W) = y((W \cap \text{Dom } x \cap \text{Dom } y)) = y(W \cap \text{Dom } y) = y(W) = (xy^{-1})^{-1}x(W)$  . Por lo tanto se verifica que

$$\begin{aligned} y(x|_W)^{-1} &= yx^{-1}|_{x(W) \cap \text{Dom}(yx^{-1})} \\ (x|_W)y^{-1} &= (xy^{-1})|_{(xy^{-1})^{-1}xW} . \end{aligned}$$

Aplicando la proposición 4.6 del capítulo 0 se obtiene que estas funciones son  $C^\infty$ . El primer cambio es la restricción de una función  $C^\infty$  a un abierto. El segundo cambio tiene como dominio  $y(W) = (xy^{-1})^{-1}xW$  que es la imagen inversa por una función continua de un abierto, y por lo tanto es abierto, así que también es la restricción de una función  $C^\infty$  a un abierto. Además la reunión de los dominios de  $\mathcal{A} \cup \{x|_W\}$  contiene a la reunión de los dominios de  $\mathcal{A}$  que es  $M$ .  $\square$

Una forma de topologizar un conjunto consiste en probar que una familia de subconjuntos verifica las propiedades de la proposición 2.2 del capítulo 0, como vemos a continuación:

**PROPOSICIÓN 2.2.** Los dominios de las cartas del atlas maximal de una variedad diferenciable  $M$  verifican las condiciones necesarias para ser la base de una topología en el conjunto  $M$ .

**DEMOSTRACIÓN.** En primer lugar, nótese que la reunión de los dominios de las cartas de un atlas maximal  $\mathcal{M}$  es el conjunto  $M$ . En segundo lugar, si  $x, y$  son cartas de  $\mathcal{M}$  entonces  $x(\text{Dom } x \cap \text{Dom } y) = \text{Dom}(yx^{-1})$  que es un abierto por ser dominio de una función  $C^\infty$ . Aplicando la proposición 2.1 se obtiene que  $x|_{\text{Dom } x \cap \text{Dom } y}$  es también una carta del atlas maximal. Consecuentemente  $\text{Dom } x \cap \text{Dom } y$  es también el dominio de una carta del atlas maximal.  $\square$

**DEFINICIÓN 2.1.** A la topología inducida por los dominios de las cartas del atlas maximal de una variedad diferenciable  $M$  la llamaremos *topología inducida por la estructura diferenciable* (a veces abreviamos diciendo topología inducida).

**DEFINICIÓN 2.2.** Si  $(M, \tau)$  un espacio topológico (véase la definición 2.1), diremos que  $[\mathcal{A}]$  es una estructura diferenciable sobre el espacio topológico  $(M, \tau)$  si la topología inducida por la estructura es  $\tau$ .

**OBSERVACIÓN 2.3.** Se pueden dar ejemplos de estructuras diferenciables  $C^\infty$  que no son difeomorfas y que tienen el mismo espacio topológico subyacente; véase el problema ?? del capítulo 2. El problema de encontrar estructuras diferenciables no difeomorfas es más difícil en el caso que el espacio topológico subyacente sea Hausdorff. Sin embargo J. W. Milnor [25] en 1956 probó que la esfera  $S^7$  tiene varias estructuras que no son difeomorfas. Es conocido que el número de estructuras no difeomorfas de una esfera es finito. Se sabe que la esfera  $S^7$  tiene 28 estructuras; la esfera  $S^{11}$ , 992; la esfera  $S^{15}$ , 16256 y la esfera  $S^{31}$  más de dos millones. Para más información ver el trabajo de Milnor [25].

**PROPOSICIÓN 2.3.** Sea una variedad diferenciable  $M$  con su topología inducida. Si  $x$  es una carta de  $M$ , entonces la función  $x$  es un homeomorfismo (para la definición de homeomorfismo para funciones, véase la definición 2.3).

DEMOSTRACIÓN. Puesto que  $\text{Dom } x$  es un abierto para ver que  $x$  es una función abierta es suficiente ver que las imágenes de los abiertos básicos son abiertos euclídeos. Sea  $W \subset \text{Dom } x$  un abierto básico que será el dominio de una carta  $y$ . Teniendo en cuenta que el dominio de  $yx^{-1}$  es abierto y que  $\text{Dom}(yx^{-1}) = x(W)$  se deduce que  $x(W)$  es abierto. Para ver que  $x$  es continua, sea  $U$  abierto de  $\mathbb{R}^m$ , si  $W = x^{-1}(U)$  se tiene que  $x(W) = \text{Codom } x \cap U$  es un abierto. Aplicando la proposición 2.1 obtenemos que  $x|_W$  es también una carta y su dominio  $W$  es un abierto básico y por lo tanto abierto. Luego la función  $x$  es continua y, en consecuencia, la función  $x$  es un homeomorfismo.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.4. Sea  $M$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional,  $x$  una carta en un punto  $p$  de  $M$  y sea  $B_\varepsilon(x(p))$  una bola de centro  $x(p)$  y radio  $\varepsilon$  contenida en  $\text{Codom } x$ . Entonces la familia  $\{x^{-1}B_\delta(x(p)) \mid \delta < \varepsilon\}$  es una base de entornos de  $p$  en la topología inducida por la variedad  $M$ .

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior sabemos que la carta  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un homeomorfismo. Sea  $G$  un entorno de  $p$  en  $M$ , entonces existe un abierto  $U$  tal que  $p \in U \subset G$ . Notemos que  $V = U \cap \text{Dom } x$  es también un entorno abierto de  $p$  en  $\text{Dom } x$ . Aplicando que  $x$  es un homeomorfismo se tiene que  $x(V)$  es un entorno abierto de  $x(p)$  en  $\text{Codom } x$ . Puesto que  $\{B_\delta(x(p)) \mid \delta < \varepsilon\}$  es una base de entornos de  $x(p)$  en  $\text{Codom } x$ , tenemos que existe  $\delta$  tal que  $x(p) \in B_\delta(x(p)) \subset x(V)$ . Entonces  $p \in x^{-1}B_\delta(x(p)) \subset V \subset U \subset G$ . Por lo tanto se deduce que  $\{x^{-1}B_\delta(x(p)) \mid \delta < \varepsilon\}$  es una base de entornos de  $p$  en la topología inducida por la variedad  $M$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 2.5. Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y sea  $f: M \rightarrow N$  una función. Si  $f$  es diferenciable en un punto  $p$  de  $M$ , entonces la función  $f$  es continua en  $p$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $x$  e  $y$  cartas de  $M$  y  $N$  en los puntos  $p$  y  $f(p)$ , respectivamente. Entonces  $yfx^{-1}$  es  $C^\infty$  en el punto  $x(p)$ . Por lo tanto existe un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^m$  tal que  $U \subset \text{Dom}(yfx^{-1})$  y  $F = yfx^{-1}|_U$  es  $C^\infty$ . Además se tiene que  $U \subset \text{Codom } x$ . Aplicando la proposición 4.6 del capítulo 0 tenemos que  $F$  es continua en  $U$ . Por ser la función  $x$  continua se tiene que  $x^{-1}U$  es un abierto. Teniendo en cuenta que  $y$  es un homeomorfismo se concluye que  $y^{-1}Fx$  es continua en el abierto  $x^{-1}U \subset \text{Dom } f$ . Por otra parte  $f|_{x^{-1}U} = y^{-1}Fx$ . Por lo tanto  $f$  es continua en  $x^{-1}U$  y en consecuencia en el punto  $p$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 2.6. Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables,  $f: M \rightarrow N$  una función y  $U$  un abierto de  $M$ . Si  $f$  es diferenciable, entonces la función  $f|_U$  es diferenciable. Si  $f$  es un difeomorfismo, entonces la función  $f|_U$  es un difeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $p \in \text{Dom}(f|_U) = \text{Dom } f \cap U$ . Sean  $x$  e  $y$  cartas de  $M$  y  $N$  en los puntos  $p$  y  $f(p)$ , respectivamente. Notemos

que  $y(f|_U)x^{-1} = yfx^{-1}|_{x(f^{-1}(\text{Dom } y) \cap U)}$ . Por ser  $f$  diferenciable, aplicando la proposición 2.5, obtenemos que  $f$  es continua y por lo tanto  $f^{-1}(\text{Dom } y)$  es un abierto de  $M$ . Por la proposición 2.3 se tiene que  $x$  es un homeomorfismo y en consecuencia  $x(f^{-1}(\text{Dom } y) \cap U)$  es un abierto. Por ser  $f$  diferenciable en el punto  $p$ , entonces  $yfx^{-1}$  es  $C^\infty$  en el punto  $x(p) \in x(f^{-1}(\text{Dom } y) \cap U) \subset x(f^{-1}(\text{Dom } y)) = \text{Dom}(yfx^{-1})$ . Aplicando la proposición 4.6 del capítulo 0 se obtiene que  $y(f|_U)x^{-1}$  es  $C^\infty$  en el punto  $x(p)$ . Luego  $f|_U$  es diferenciable en cada punto de su dominio, y por lo tanto  $f|_U$  es diferenciable.

Supongamos ahora que  $f$  es un difeomorfismo. Entonces  $f|_U$  es también inyectiva y diferenciable por el argumento anterior. Por ser  $f^{-1}$  continua se tiene que  $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$  es abierto. Notemos que  $(f|_U)^{-1} = f^{-1}|_{f(U)}$  también es diferenciable. Entonces tenemos que  $f|_U$  es un difeomorfismo.  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.7.** Sean  $P, Q, R$  variedades diferenciables,  $f: P \rightarrow Q, g: Q \rightarrow R$  funciones diferenciables. Si  $f, g$  son diferenciables, entonces  $gf$  es diferenciable.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $a \in \text{Dom}(gf)$  y tomemos cartas  $x, y, z$  en  $a, f(a)$  y  $gf(a)$ , respectivamente. Notemos que  $\text{Dom}((zgy^{-1})(yfx^{-1})) \subset \text{Dom}(zgfx^{-1})$ . Además  $zgfx^{-1}|_{\text{Dom}((zgy^{-1})(yfx^{-1}))} = (zgy^{-1})(yfx^{-1})$ . Sabemos que  $yfx^{-1}$  es  $C^\infty$  en  $x(a)$  y que  $zgy^{-1}$  es  $C^\infty$  en  $yf(a)$ . Aplicando la proposición 4.6 del capítulo 0 se obtiene que  $(zgy^{-1})(yfx^{-1})$  es  $C^\infty$  en  $x(a)$ . Por lo tanto  $zgfx^{-1}$  es  $C^\infty$  en  $x(a)$ . De aquí se obtiene que  $gf$  es diferenciable en cada  $a$  de su dominio. Luego  $gf$  es diferenciable.  $\square$

### 3. Ejemplos de variedades diferenciables

En primer lugar veamos que todo espacio vectorial real de dimensión  $n$  admite una estructura estándar de variedad diferenciable  $n$ -dimensional.

**EJEMPLO 3.1.** Espacios vectoriales reales de dimensión finita. Sea  $e_1, e_2, \dots, e_n$  una base de un espacio vectorial real  $E$ . Notemos que el isomorfismo  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$  que asocia a cada vector de  $E$  sus coordenadas en la base anterior, es una carta que define una estructura diferenciable en el conjunto  $E$ . Tenemos que probar que la estructura diferenciable es independiente de la base elegida. Sea  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  otra base de  $E$  y sea  $f': E \rightarrow \mathbb{R}^n$  es la correspondiente aplicación coordenada. Si el cambio de base viene dado por  $e_i = \sum a_{ij}e'_j, i, j \in \{1, \dots, n\}$ , entonces el cambio de cartas estará determinado por  $f'f^{-1}(r_1, \dots, r_n) = (\sum r_1 a_{11}, \dots, \sum r_n a_{nn})$ . Puesto que cada componente de  $f'f^{-1}$  es de clase  $C^\infty$ , se tiene que los atlas  $\{f\}$  y  $\{f'\}$  son compatibles. (Esta estructura se llama *estructura diferenciable estándar de un espacio vectorial real*.)

La siguiente notación facilitará la descripción de algunos ejemplos de esta sección, dada una  $n$ -tupla  $(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n)$  y un  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la  $(n-1)$ -tupla obtenida al suprimir la componente  $i$ -ésima,  $(r_1, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_n)$  la denotaremos a veces por  $(r_1, \dots, \hat{r}_i, \dots, r_n)$ .

**EJEMPLO 3.2.** Sea  $S^{n-1} = \{r \in \mathbb{R}^n | r_1^2 + \dots + r_n^2 - 1 = 0\}$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  sean  $x^{i+}$ ,  $x^{i-}$  funciones de  $S^{n-1}$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$  con dominios  $\text{Dom } x^{i+} = \{r \in S^{n-1} | r_i > 0\}$ ,  $\text{Dom } x^{i-} = \{r \in S^{n-1} | r_i < 0\}$  y definidas por

$$x^{i+}(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) = (r_1, \dots, \hat{r}_i, \dots, r_n),$$

$$x^{i-}(r_1, \dots, r_i, \dots, r_n) = (r_1, \dots, \hat{r}_i, \dots, r_n).$$

Entonces el atlas  $\{x^{1+}, x^{1-}, x^{2+}, x^{2-}, \dots, x^{n+}, x^{n-}\}$  dota a  $S^{n-1}$  de una estructura de variedad diferenciable  $(n-1)$ -dimensional.

**EJEMPLO 3.3.** Sea  $S^1 = \{(\cos r, \sin r) \in \mathbb{R}^2 | r \in \mathbb{R}\}$ . Consideremos  $U = \{(\cos s, \sin s) \in \mathbb{R}^2 | -\pi < s < \pi\}$  y  $V = \{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 | 0 < t < 2\pi\}$ . Sean  $x, y$  dos funciones de  $S^1$  en  $\mathbb{R}$  con dominios  $\text{Dom } x = U$ ,  $\text{Dom } y = V$  y definidas por  $x(\cos s, \sin s) = s$ ,  $y(\cos t, \sin t) = t$ . El cambio de cartas viene dado por

$$yx^{-1}(s) = \begin{cases} 2\pi + s & \text{si } -\pi < s < 0, \\ s & \text{si } 0 < s < \pi, \end{cases}$$

que es una función  $C^\infty$ . Entonces el atlas  $\{x, y\}$  dota a  $S^1$  de una estructura de variedad diferenciable 1-dimensional.

**EJEMPLO 3.4.** El atlas estereográfico de la esfera  $S^{n-1} = \{r \in \mathbb{R}^n | r_1^2 + \dots + r_n^2 - 1 = 0\}$ . Sean  $x, y$  funciones de  $S^{n-1}$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$  con dominios  $\text{Dom } x = S^{n-1} \setminus \{N\}$  (donde  $N = (0, \dots, 0, 1)$  es el "polo Norte") y  $\text{Dom } y = S^{n-1} \setminus \{-N\}$  definidas por  $x(r_1, \dots, r_n) = (\frac{r_1}{1-r_n}, \dots, \frac{r_{n-1}}{1-r_n})$ ,  $y(r_1, \dots, r_n) = (\frac{r_1}{1+r_n}, \dots, \frac{r_{n-1}}{1+r_n})$ . Notemos que tenemos

$$x_i = \frac{r_i}{1-r_n}, \quad y_i = \frac{r_i}{1+r_n}$$

La sumas de cuadrados verifican

$$y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 = \frac{r_1^2 + \dots + r_{n-1}^2}{(1+r_n)^2} = \frac{1-r_n^2}{(1+r_n)^2} = \frac{1-r_n}{1+r_n}$$

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = \frac{r_1^2 + \dots + r_{n-1}^2}{(1-r_n)^2} = \frac{1-r_n^2}{(1-r_n)^2} = \frac{1+r_n}{1-r_n}$$

De donde se sigue que el cambio de cartas viene dado por

$$x_i = \frac{r_i}{1-r_n} = \frac{r_i(1+r_n)}{(1+r_n)(1-r_n)} = \frac{y_i}{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2}$$

$$y_i = \frac{r_i}{1+r_n} = \frac{r_i(1-r_n)}{(1-r_n)(1+r_n)} = \frac{x_i}{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$$

que son funciones  $C^\infty$ .

Entonces el atlas  $\{x, y\}$ , que llamaremos estereográfico, dota a  $S^{n-1}$  de una estructura de variedad diferenciable  $(n-1)$ -dimensional.

**EJEMPLO 3.5.** En  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  definimos la siguiente relación de equivalencia  $(r_0, \dots, r_n) \sim (s_0, \dots, s_n)$  si existe  $t \neq 0$  tal que  $(r_0, \dots, r_n) = (ts_0, \dots, ts_n)$ . Denotemos la clase de equivalencia de  $(r_0, \dots, r_n)$  por  $[r_0, \dots, r_n]$  y al conjunto cociente por  $P^n(\mathbb{R})$  y lo llamaremos espacio proyectivo real de dimensión  $n$ . Para cada  $i \in \{0, \dots, n\}$  sea  $x^i$  la función de  $P^n(\mathbb{R})$  en  $\mathbb{R}^n$  con dominio  $\text{Dom } x^i = \{[r_0, \dots, r_n] \in P^n(\mathbb{R}) \mid r_i \neq 0\}$ , y definida por  $x^i[r_0, \dots, r_i, \dots, r_n] = (r_0/r_i, \dots, \hat{r}_i, \dots, r_n/r_i)$ . Entonces el atlas  $\{x^0, \dots, x^n\}$  dota a  $P^n(\mathbb{R})$  de una estructura de variedad diferenciable  $n$ -dimensional.

**EJEMPLO 3.6.** Sea  $U$  un abierto de una variedad diferenciable  $m$ -dimensional  $M$ . Entonces  $U$  admite una estructura de variedad diferenciable  $m$ -dimensional de tal modo que la inclusión  $\text{in}: U \rightarrow M$  es un difeomorfismo. En efecto supongamos que  $\mathcal{A}$  es un atlas para  $M$ , entonces consideremos la familia  $\mathcal{A}_U = \{x_U \mid x \in \mathcal{A}\}$ , donde la función  $x_U: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  tiene como dominio  $U \cap \text{Dom } x$  y se define por  $x_U(p) = x(p)$  para  $p \in U \cap \text{Dom } x$ . Veamos que  $\mathcal{A}_U$  es un atlas diferenciable  $m$ -dimensional que da estructura de  $m$ -variedad a  $U$ . Es claro que la reunión de los dominios es  $U$ . Los cambios de cartas vienen dados por  $(y_U)(x_U)^{-1} = yx^{-1}|_{x(U)}$  que son funciones  $C^\infty$ . Por otra parte la inclusión  $\text{in}: U \rightarrow M$  es inyectiva y tanto ella como su inversa son diferenciables. En efecto para cada carta  $x$  de  $M$  se tiene que  $x \text{ in}(x_U)^{-1} = \text{id}|_{x(U)} = (x_U) \text{ in}^{-1} x^{-1}$ .

**EJEMPLO 3.7.**  $M(n \times p, \mathbb{R})$  matrices reales de orden  $n \times p$ . Tiene estructura de variedad diferenciable  $np$ -dimensional ya que es un espacio vectorial real de dimensión  $np$ , véase el ejemplo 3.1. Denotemos por  $E_{ij}$  la matriz que es nula salvo en el lugar  $(i, j)$  que tiene un uno. Se puede tomar como atlas el formado por la función coordenada asociada a la base  $E_{11}, \dots, E_{1p}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{np}$  que en esencia asocia a una matriz la tupla obtenida al colocar cada fila a continuación de anterior. Un caso particular es la variedad de matrices cuadradas  $M(n, \mathbb{R}) = M(n \times n, \mathbb{R})$  que tiene dimensión  $n^2$ .

**EJEMPLO 3.8.**  $GL(n, \mathbb{R})$  matrices cuadradas reales y no singulares, también se llama el grupo lineal real  $n$ -dimensional. Tiene estructura de variedad diferenciable  $n^2$ -dimensional ya que es un abierto de  $M(n, \mathbb{R})$  que tiene dimensión  $n^2$ . Para ver que es un abierto se puede considerar la aplicación determinante  $\det: M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , que por ser una función polinómica es continua, véase el problema ?? de este capítulo.

**EJEMPLO 3.9.** Variedades de Grassmann <sup>2</sup>. Sea  $G(n, p, \mathbb{R})$  el espacio de todos los  $p$ -planos de  $\mathbb{R}^n$ . Una base de un  $p$ -plano se puede representar por una matriz  $A$  de dimensión  $n \times p$  que tenga rango  $p$ . Notemos que dos matrices  $A$  y  $B$  representan el mismo  $p$ -plano si y sólo si existe una matriz  $T$  no singular  $p \times p$  tal que  $B = AT$ . De este modo representaremos un  $p$ -plano como la clase de equivalencia  $[A]$  inducida por la relación de equivalencia anterior.

Supongamos que  $\alpha: \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  es una aplicación creciente e inyectiva. Para cada matriz  $A$  denotemos por  $A_\alpha$  la submatriz formada por las filas  $\alpha(1), \dots, \alpha(p)$  y por  $A^\alpha$  la submatriz formada por el resto de las filas de  $A$ . Notemos que si  $B = AT$  con  $T$  no singular, se tiene que las filas  $\alpha$  de  $B$  tienen rango máximo si y sólo si se verifica lo mismo para las de  $A$ . Definamos una carta  $x^\alpha: G(n, p, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{(n-p)p}$  de tal modo que  $\text{Dom } x^\alpha = \{[A] | A_\alpha \text{ es no singular}\}$  y que viene dada por la fórmula  $x^\alpha([A]) = (AA_\alpha^{-1})^\alpha$ . En primer lugar veamos que está bien definida. Si  $B = AT$  con  $T$  matriz regular, se tiene que  $(BB_\alpha^{-1})^\alpha = (AT(AT)_\alpha^{-1})^\alpha = (AT(A_\alpha T)^{-1})^\alpha = (ATT^{-1}A_\alpha^{-1})^\alpha = (AA_\alpha^{-1})^\alpha$ .

Las funciones  $x_\alpha$  son inyectivas. En efecto si  $x^\alpha([A]) = (AA_\alpha^{-1})^\alpha = (BB_\alpha^{-1})^\alpha = x^\alpha([B])$  Entonces  $AA_\alpha^{-1} = BB_\alpha^{-1}$ . Por lo tanto,  $B = AA_\alpha^{-1}B_\alpha$ . En consecuencia,  $[A] = [B]$ . Por otra parte dado  $Z \in \mathbb{R}^{(n-p)p}$ , podemos suponer que  $Z$  es una matriz  $(n-p) \times p$  para después contruir una única matriz  ${}_\alpha Z$  de dimensiones  $n \times p$  tal que al extraer las filas  $\alpha$ -ésimas se obtenga la matriz identidad,  $({}_\alpha Z)_\alpha = I$  y el resto de las filas sean precisamente sea la matriz  $Z$ ,  $({}_\alpha Z)^\alpha = Z$ . Entonces  $x^\alpha([{}_\alpha Z]) = Z$ . Es decir que las funciones  $x^\alpha$  son suprayectivas, o dicho de otro modo  $\text{Codom } x^\alpha = \mathbb{R}^{(n-p)p}$ .

Puesto que la reunión de los dominios es precisamente  $G(n, p, \mathbb{R})$  y los cambios de cartas son funciones racionales, que son  $C^\infty$ , entonces  $\mathcal{A} = \{x^\alpha | \alpha \text{ es inyectiva y creciente}\}$  es un atlas diferenciable  $(n-p)p$ -dimensional.

#### 4. El conjunto de ceros de una función con valores reales

Recordamos a continuación el siguiente resultado que se suele denominar como el teorema de la función implícita. Aquí utilizaremos una versión enunciada en términos de funciones  $C^\infty$ .

**TEOREMA 4.1.** (Función implícita) Sea  $(a, b)$  un punto del dominio de una función  $C^\infty f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$  tal que  $f(a, b) = 0$  y

---

<sup>2</sup>Las variedades de Grassmann juegan un papel importante en la categoría de las variedades diferenciables. Se utilizan para el estudio de transversalidad a variedades inmersas en variedades riemannianas. Además sus grupos de homotopía y de homotopía estable determinan las clases de cobordismo

$\det \left( \left( \frac{\partial f_i}{\partial r_j} \right)_{(a,b)} \right) \neq 0$ ,  $i, j = 1, \dots, p$ . Entonces existen entornos abiertos  $V$  de  $a$  en  $\mathbb{R}^p$  y  $W$  de  $b$  en  $\mathbb{R}^q$  tal que para todo  $w \in W$  existe un único  $\varphi(w) \in V$  tal que  $f(\varphi(w), w) = 0$ . Además la función  $\varphi: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$  es de clase  $C^\infty$ .

Este resultado facilita la demostración de que, bajo ciertas condiciones, el conjunto de ceros de una función de varias variables con valores reales tiene una estructura canónica de variedad.

**TEOREMA 4.2.** Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty$  y sea  $S = f^{-1}0$ . Supongamos que para cada  $z \in S$  existe un  $i \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\left( \frac{\partial f}{\partial r_i} \right)_z \neq 0$ . Entonces  $f$  induce una estructura de variedad diferenciable  $(n-1)$ -dimensional tal que la topología de la variedad  $S$  coincide con la topología de  $S$  como subespacio de  $\mathbb{R}^n$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $s \in S$  y sea  $i = i(s)$  un entero tal que  $\left( \frac{\partial f}{\partial r_i} \right)_s \neq 0$ . Como consecuencia del teorema de la función implícita, existen entornos abiertos  $W$  de  $(s_1, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_n)$  y  $V$  de  $s_i$  tal que para cada  $w = (z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) \in W$  existe un único  $\varphi_i(w) \in V$  tal que

$$f(z_1, \dots, z_{i-1}, \varphi_i(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n), z_{i+1}, \dots, z_n) = 0$$

Además la función  $\varphi_i: W \rightarrow V$  es  $C^\infty$ . Sea ahora

$$P_i(W, V) = \{(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n) | (z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) \in W, z_i \in V\}$$

que es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $\theta_i$  la función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$  que tiene como dominio  $P_i(W, V)$  y que aplica  $(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n)$  en  $(z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n)$ , es decir es la restricción de una proyección a un abierto. Consideremos la función  $x: S \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  definida por la composición  $x = \theta_i \circ \text{in}$ , siendo  $\text{in}: S \rightarrow \mathbb{R}^n$  la inclusión canónica. Nótese que  $\text{Codom } x = \theta_i(S \cap P_i(W, V)) \subset W$ . Por el teorema de la función implícita dado  $w = (z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) \in W$  existe un único  $\varphi_i(w) \in V$  tal que  $u = (z_1, \dots, z_{i-1}, \varphi_i(w), z_{i+1}, \dots, z_n) \in f^{-1}(0) = S$ . Luego  $u \in (S \cap P_i(W, V)) = \text{Dom } x$  es tal que  $x(u) = w$ . De donde se obtiene que  $\text{Codom } x = W$  es un abierto de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Sean ahora  $u = (z_1, \dots, z_i, \dots, z_n)$  y  $u' = (z'_1, \dots, z'_i, \dots, z'_n)$  puntos de  $\text{Dom } x$  tales que  $x(u) = x(u')$ . Entonces  $(z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n) = (z'_1, \dots, \hat{z}'_i, \dots, z'_n)$  aplicando la unicidad del teorema de la función implícita se obtiene que  $z_i = z'_i$ . Por lo tanto  $u = u'$  y se tiene que  $x$  es inyectiva. Luego  $x$  es una carta.

Sea ahora otra carta de la forma  $y = \theta_j \circ \text{in}$ . El dominio de  $yx^{-1}$  es  $\theta_i(S \cap \text{Dom } \theta_i \cap \text{Dom } \theta_j) = \theta_i(S \cap \text{Dom } \theta_i) \cap \theta_i(\text{Dom } \theta_j) = \text{Codom } x \cap \theta_i(\text{Dom } \theta_j)$  que es un abierto por ser  $x$  una carta y  $\theta_i$  una aplicación abierta. Además si  $j > i$ , se tiene que

$$yx^{-1}(z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n) = y(z_1, \dots, z_{i-1}, \varphi_i(z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n), \dots, z_n)$$

$= (z_1, \dots, z_{i-1}, \varphi_i(z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n), z_{i+1}, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_n)$  es una función  $C^\infty$ . Análogamente se procede para  $j < i$  y en el caso  $i = j$ ,  $yx^{-1}$  es la identidad de un abierto. Por lo tanto los cambios de cartas son  $C^\infty$ . Notemos que para cada  $s \in S$  hemos construido una carta en  $s$ , así que fácilmente se deduce que la reunión de los dominios de las cartas es el propio  $S$ .

Para ver que la topología de la variedad  $S$  es precisamente la topología traza, veamos por una parte que la inclusión  $\text{in}: S \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable. En efecto sea  $x$  una carta de  $S$ , entonces

$$\text{id}_{\mathbb{R}^n} \text{in} x^{-1}(z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n) = (z_1, \dots, \varphi_i(z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n), \dots, z_n)$$

que es una función  $C^\infty$ . Por otra parte si  $U$  es un entorno abierto de  $s$  contenido en el dominio de una carta  $x$  se tiene que  $U = S \cap P_i(x(U), V)$  y por lo tanto también es un entorno abierto de  $s$  en la topología relativa. □

## 5. Propiedades básicas de la topología de una variedad

En esta sección estudiamos algunas propiedades topológicas que tienen las topologías inducidas por las estructuras diferenciales. Concretamente vemos que son  $T_1$ , véase la definición 2.8; primero contable, definición 2.7; y localmente conexa, definición 2.9; donde todas las definiciones son del del capítulo 0.

**PROPOSICIÓN 5.1.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Entonces el espacio topológico subyacente verifica:

- (i)  $M$  es un espacio  $T_1$ ,
- (ii)  $M$  es primero contable,
- (iii)  $M$  es localmente conexa.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $p$  un punto de una variedad diferenciable  $M$ , consideremos una carta  $x$  de  $M$  en  $p$ . Si  $q$  es otro punto de  $M$  distinto de  $p$  pueden ocurrir dos casos, que  $q \notin \text{Dom } x$  o que  $q \in \text{Dom } x$ . En el primero,  $\text{Dom } x$  es un entorno abierto de  $p$  al cual no pertenece  $q$ . En el segundo, por ser  $\text{Dom } x$  homeomorfo a un abierto euclídeo, se tiene que  $\text{Dom } x$  es  $T_1$ , luego existe  $U$  abierto de  $\text{Dom } x$  tal que  $p \in U$  y  $q \notin U$ , además puesto que  $\text{Dom } x$  es abierto en  $M$  se tiene que  $U$  es abierto en  $M$  luego  $U$  es un entorno abierto de  $p$  en  $M$ .

Para probar (ii) y (iii), tomemos  $p \in M$  y una carta  $x$  en el punto  $p$ . Puesto que  $\text{Dom } x$  es homeomorfo a un abierto euclídeo se tiene que existe una base contable de entornos conexos de  $p$  en  $\text{Dom } x$ . Además por ser  $\text{Dom } x$  abierto en  $M$  se concluye que también es una base de entornos de  $p$  en  $M$ . Luego  $M$  es primero contable y localmente conexa. □

Un espacio topológico  $X$  se dice que es localmente compacto si para  $p \in X$  y cada entorno  $N$ , entonces existe un entorno  $V$  tal que  $p \in V \subset \bar{V} \subset N$  tal que  $\bar{V}$  es compacto.

**PROPOSICIÓN 5.2.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Si  $M$  es Hausdorff, entonces  $M$  es localmente compacta.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $N$  un entorno de un punto  $p$  de una variedad  $M$ . Tomemos una carta  $x$  de  $M$  en  $p$  tal que  $\text{Dom } x \subset N$ . Sea  $B$  un entorno de  $x(p)$  en  $\text{Codom } x$  tal que  $\text{cl}B$  sea compacto, donde  $\text{cl}$  denota el operador clausura, y  $\text{cl}B \subset \text{Codom } x$ . Por ser  $x^{-1}$  continua se tiene que  $x^{-1}B \subset x^{-1}(\text{cl}B) \subset \text{cl}_{\text{Dom } x}(x^{-1}B) \subset \text{cl}_M(x^{-1}B)$ . Por otra parte  $x^{-1}(\text{cl}B)$  es un compacto en el espacio Hausdorff  $M$  luego es cerrado en  $M$ . Entonces  $\text{cl}_M(x^{-1}B) \subset x^{-1}(\text{cl}B)$ . En consecuencia  $x^{-1}B$  es un entorno abierto de  $p$  en  $M$  cuya clausura  $x^{-1}(\text{cl}B)$  es un entorno compacto de  $p$  contenido en  $N$ .  $\square$

Para recordar la noción de segundo contable, véase la definición 2.7 del capítulo 0. En general las variedades diferenciables no son segundo contables como podemos ver en el ejemplo 5.1.

**PROPOSICIÓN 5.3.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Entonces  $M$  tiene un atlas contable si y sólo si  $M$  es segundo contable.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\mathcal{A}$  un atlas contable, para cada carta  $x \in \mathcal{A}$  se tiene que  $\text{Dom } x$  es homeomorfo a un abierto euclídeo que es segundo contable. Si  $\{B_i^x | i \in \mathbb{N}\}$  es una base contable de  $\text{Dom } x$ , entonces  $\{B_i^x | x \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}\}$  es una base contable de  $M$ . Recíprocamente, si  $M$  es segundo contable y  $\mathcal{B}$  es una base contable y  $\mathcal{A}$  un atlas, entonces la familia  $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} | \text{existe una carta } x_B \in \mathcal{A} \text{ tal que } B \subset \text{Dom } x_B\}$  es contable y  $\{x_B | B \in \mathcal{B}'\}$  es un atlas de  $M$ .  $\square$

**OBSERVACIÓN 5.1.** Si  $M$  es una variedad diferenciable, entonces por ser localmente conexa, cada componente conexa  $C$  de  $M$  es cerrada y abierta en variedad. Por ser abierta  $C$  hereda de modo natural una estructura diferenciable de la variedad  $M$ . Si  $C_i, i \in I$  es el conjunto de componentes de  $M$  se tiene que  $M = \bigsqcup_{i \in I} C_i$ . Además cada inclusión  $\text{in}_i: C_i \rightarrow M$  es una aplicación diferenciable. También es fácil de ver que  $f: M \rightarrow N$  es una función entonces  $f$  es diferenciable si y sólo si cada  $f \text{ in}_i$  es diferenciable.

Es también de interés la suma disjunta de variedades. Sea  $M_i, i \in I$  una familia de variedades  $m$ -dimensionales. Si consideramos la reunión disjunta  $M = \bigsqcup_{i \in I} M_i = \cup_{i \in I} M_i \times \{i\}$ , entonces  $M$  admite el siguiente atlas si  $x$  es una carta de  $M_i$  entonces  $x^i: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  tiene como dominio  $\text{Dom } x \times \{i\}$  y está definida por  $x^i(p, i) = x(p)$ . Se comprueba con facilidad que es un atlas diferenciable para  $M$  de manera que las "inclusiones"  $\text{in}_i: M_i \rightarrow M, \text{in}_i(p) = (p, i), p \in M_i$ , son diferenciables. Notemos que las funciones  $f_i: M_i \rightarrow N$  son diferenciables si y sólo si la única función  $f: M \rightarrow N$  tal que  $f \text{ in}_i = f_i$  es diferenciable.

EJEMPLO 5.1. Sea  $M$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional y sea  $I$  un conjunto de índices de cardinalidad no contable y tomemos  $M_i = M$ . Entonces  $\bigsqcup_{i \in I} M_i$  es una variedad que no es segundo contable.

## ESPACIO TANGENTE

### 1. Notaciones previas

Recordemos que (véase la sección 4 del capítulo 0) para una función  $C^\infty$ ,  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , podemos asociar a cada punto  $r \in \text{Dom } f$  la derivada (diferencial) de la función en  $r$ , que denotamos por  $Df_r: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La matriz de esta aplicación lineal calculada respecto las bases canónicas se denotará por  $J_f(r)$  y se denomina *matriz jacobiana* de  $f$  en el punto  $r$ . Si  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^\infty$ , denotamos sus derivadas parciales por  $\frac{\partial g}{\partial r_i}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  y su valor en un punto  $r \in \text{Dom } g$  por  $\left(\frac{\partial g}{\partial r_i}\right)_r$  y algunas veces por  $\frac{\partial g}{\partial r_i}(r)$ .

Supongamos que las componentes de  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , función  $C^\infty$ , son  $f_1, \dots, f_n: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces la matriz jacobiana en el punto  $r$  se puede expresar en función de las derivadas parciales de sus componentes:

$$J_f(r) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial r_1}\right)_r & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial r_m}\right)_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial r_1}\right)_r & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial r_m}\right)_r \end{pmatrix}$$

La estructura afín de  $\mathbb{R}^m$  permite interpretar un vector  $u \in \mathbb{R}^m$  como un “vector tangente” en cada punto  $r \in \text{Dom } f$ . Recordemos que la derivada direccional de  $f$  según  $u$  verifica que  $(D_u f)_r = Df_r(u)$ , para una función  $f$  que tenga derivada en el punto  $r$ . Ello permite asociar a cada “vector tangente”  $u$  una aplicación  $\tilde{u}$  que asocia a cada función real  $g$  de clase  $C^\infty$  en el punto  $r$ , el valor  $\tilde{u}(g) = Dg_r(u)$ .

Si  $g, g'$  funciones reales de clase  $C^\infty$  definidas en  $r$  y  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ , entonces la aplicación  $\tilde{u}$  verifica las siguientes propiedades:

Linealidad:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\alpha g + \alpha' g') &= D(\alpha g + \alpha' g')_r(u) = \alpha Dg_r(u) + \alpha' Dg'_r(u) \\ &= \alpha \tilde{u}(g) + \alpha' \tilde{u}(g') \end{aligned}$$

Regla de Leibniz:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(g \cdot g') &= D(g \cdot g')_r(u) = Dg_r(u) \cdot g'(r) + g(r) \cdot Dg'_r(u) \\ &= \tilde{u}(g) \cdot g'(r) + \tilde{u}(g') \cdot g(r) \end{aligned}$$

De este modo podemos interpretar cada vector tangente como una aplicación que asocia a cada función real de clase  $C^\infty$  definida en  $r$  un valor real y que además verifica las propiedades anteriores. Notemos

que hemos utilizado la suma, el producto de funciones y también el producto de un escalar por una función. Estas operaciones son un caso particular de la siguiente situación más general.

Sea  $X$  un conjunto, en la familia de funciones de  $X$  en  $\mathbb{R}$  podemos considerar la suma de funciones, el producto de funciones y el producto de una función por un escalar definidos del modo siguiente: Dadas  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  definimos  $f + g$  como la función cuyo dominio  $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$  y está definida por  $(f + g)p = fp + gp$ ,  $p \in \text{Dom}(f + g)$ . Similarmente,  $\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$  y  $(f \cdot g)p = (fp) \cdot (gp)$ . Para  $\alpha \in \mathbb{R}$  se define  $\alpha f$  como la función cuyo dominio es  $\text{Dom}(\alpha f) = \text{Dom } f$  y  $(\alpha f)p = \alpha(fp)$ ,  $p \in \text{Dom}(\alpha f)$ . El conjunto de todas las funciones de  $X$  en  $\mathbb{R}$  dispone para cada subconjunto  $S$  de  $X$  de un operador restricción de modo que si  $f$  es una función con valores reales, entonces  $f|_S$  es una función que tiene por dominio  $\text{Dom}(f|_S) = S \cap \text{Dom } f$  y viene dada por  $f|_S(s) = f(s)$ .

Es interesante observar que el subconjunto de funciones con dominio  $S$  tiene estructura natural de anillo conmutativo con unidad. Si  $S$  es el vacío (el uno coincide con el cero). También se verifica que si  $T \subset S$  la restricción a  $T$  induce un homomorfismo de anillos con unidad. Es decir, que el conjunto de las funciones reales puede ser expresado como la reunión disjunta de una familia de anillos conmutativos con unidad, este tipo de estructura se suele denominar “un haz de anillos”.

## 2. Derivadas parciales. Propiedades

Veamos como se traslada la noción de derivada parcial para las funciones diferenciables de una variedad diferenciable. En este caso cada carta determina un sistema de derivadas parciales asociado a sus coordenadas.

**DEFINICIÓN 2.1.** Sea  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  una carta y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^\infty$ . Entonces la *derivada parcial de  $f$  con respecto a la  $i$ -ésima coordenada  $x_i$*  se define como la composición  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial(fx^{-1})}{\partial r_i}x$ . Notemos que su dominio es  $\text{Dom}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } x$ . El valor de la derivada parcial en un punto  $p \in \text{Dom}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$  se denotará por  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p$  y también por  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p)$ .

**PROPOSICIÓN 2.1.** Supongamos que  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones  $C^\infty$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}, \\ \text{(ii)} \quad & \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

**DEMOSTRACIÓN.** Para probar (i), consideremos las igualdades:

$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial x_i} = \frac{\partial((\alpha f + \beta g)x^{-1})}{\partial r_i}x = \alpha \frac{\partial(fx^{-1})}{\partial r_i}x + \beta \frac{\partial(gx^{-1})}{\partial r_i}x = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i} + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Para (ii), tenemos las siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} &= \frac{\partial((f \cdot g)x^{-1})}{\partial r_i} x = \frac{\partial(fx^{-1})}{\partial r_i} x \cdot (gx^{-1})x + (fx^{-1})x \cdot \frac{\partial(gx^{-1})}{\partial r_i} x \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}\end{aligned}$$

□

### 3. Vectores tangentes

Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $p \in M$ . Recordemos que estamos utilizando la notación  $C^\infty(M, p) = \{f: M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable y } p \in \text{Dom } f\}$ . Notemos que si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $f, g \in C^\infty(M, p)$ , entonces  $\alpha f \in C^\infty(M, p)$ ,  $f + g \in C^\infty(M, p)$  y  $f \cdot g \in C^\infty(M, p)$ .

**DEFINICIÓN 3.1.** Una aplicación  $\Lambda: C^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es *lineal* si verifica que  $\Lambda(\alpha f + \beta g) = \alpha \Lambda f + \beta \Lambda g$  para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $f, g \in C^\infty(M, p)$ .

**PROPOSICIÓN 3.1.** Sea  $\Lambda: C^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación lineal. Si  $f, g \in C^\infty(M, p)$  coinciden en un entorno de  $p$ , entonces  $\Lambda f = \Lambda g$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que existe un entorno abierto  $U$  de  $p$  en  $M$  tal que  $U \subset \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$  y  $f|_U = g|_U$ . Nótese que  $\text{Dom}(f - f|_U) = U$  y que  $f - f|_U = 0|_U = 0(0|_U)$ . Entonces  $\Lambda(f - f|_U) = \Lambda(0|_U) = \Lambda(0(0|_U)) = 0\Lambda(0|_U) = 0$ . Por lo tanto  $\Lambda(f) = \Lambda(f|_U)$ . Análogamente se obtiene que  $\Lambda(g) = \Lambda(g|_U)$ . Entonces  $\Lambda(f) = \Lambda(g)$ . □

En  $C^\infty(M, p)$  podemos definir la siguiente relación. Dadas  $f, g \in C^\infty(M, p)$ , diremos que  $f$  tiene el mismo *germen* que  $g$  en  $p$  si existe un entorno abierto  $U$  de  $p$  en  $M$  tal que  $U \subset \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$  y  $f|_U = g|_U$ . El cociente con las operaciones inducidas tiene una estructura natural de  $\mathbb{R}$ -álgebra y será denotado por  $C_p^\infty(M)$ , donde llamamos  $\mathbb{R}$ -álgebra  $A$  a un homomorfismo de anillos conmutativos con unidad  $\mathbb{R} \rightarrow A$ . Nótese que un operador lineal  $\Lambda: C^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}$  factoriza de modo natural del modo siguiente:  $\Lambda: C^\infty(M, p) \rightarrow C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**DEFINICIÓN 3.2.** Sea  $M$  una variedad. Una *derivación o vector tangente en un punto*  $p \in M$  es una aplicación lineal  $\Lambda: C^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}$  que además verifica la regla de Leibniz; es decir, que si  $f, g \in C^\infty(M, p)$ , entonces  $\Lambda(fg) = f(p)\Lambda(g) + \Lambda(f)g(p)$ .

**EJEMPLO 3.1.** Sea  $x$  una carta de una variedad  $M$  y  $p \in \text{Dom } x$  un punto. Entonces podemos definir  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p: C^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la fórmula  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p$ . Es inmediato comprobar que  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$  es un vector tangente en el punto  $p$  de  $M$ .

**PROPOSICIÓN 3.2.** Sea  $\Lambda: C^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}$  un vector tangente a  $M$  en el punto  $p$ . Si  $f \in C^\infty(M, p)$  es constante en un entorno de  $p$ , entonces  $\Lambda f = 0$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que existe un entorno abierto  $U$  de  $p$  en  $M$  tal que  $U \subset \text{Dom } f$  y  $f|_U = c|_U$ , donde  $c$  denota la función constante con valor  $c$ . Aplicando la proposición 3.1 se tiene que  $\Lambda(f) = \Lambda(c) = \Lambda(c \cdot 1) = c \cdot \Lambda(1)$ . Por ser  $\Lambda$  una derivación tenemos las igualdades  $\Lambda(1) = \Lambda(1 \cdot 1) = 1 \cdot \Lambda(1) + \Lambda(1) \cdot 1 = 2\Lambda(1)$ . Esto implica que  $\Lambda(1) = 0$ . Entonces  $\Lambda(f) = c \cdot \Lambda(1) = 0$ .  $\square$

Si  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  son vectores tangentes en un punto  $p$  de una variedad  $M$ , entonces la suma  $\Lambda + \Lambda'$  definida por la fórmula  $(\Lambda + \Lambda')(f) = \Lambda(f) + \Lambda'(f)$  es también un vector tangente en el punto  $p$ . También se tiene que si  $\alpha \in \mathbb{R}$  podemos definir  $\alpha\Lambda$  por  $(\alpha\Lambda)(f) = \alpha(\Lambda(f))$ . De modo rutinario se comprueba que  $\alpha\Lambda$  es de nuevo un vector tangente en el punto  $p$ . El conjunto de los vectores tangentes en un punto  $p$  de una variedad  $M$  con las operaciones anteriores tiene estructura de espacio vectorial real.

**DEFINICIÓN 3.3.** Denotaremos por  $T_p M$  al espacio vectorial real de los vectores tangentes en el punto  $p$  de una variedad  $M$ . Diremos que  $T_p M$  es el *espacio tangente de la variedad en el punto  $p$*  de  $M$ .

Para estudiar la dimensión de este espacio tangente utilizaremos el resultado siguiente:

**LEMA 3.1.** Sea  $x$  una carta de una variedad  $M$  diferenciable  $m$ -dimensional y  $p \in \text{Dom } x$  un punto tal que  $x(p) = a$ . Si  $f \in C^\infty(M, p)$  entonces existen  $h_1, \dots, h_m \in C^\infty(M, p)$  tal que  $f$  tiene el mismo germén que la función

$$f(p) + \sum_i^m (x_i - a_i)h_i$$

**DEMOSTRACIÓN.** Tomemos la nueva carta  $y = x - a$  que verifica que  $y(p) = 0$ . Sea  $B$  una bola contenida en  $\text{Dom}(fy^{-1})$  y de centro  $y(p) = 0$  y sea  $F = (fy^{-1})|_B$ . Para  $r = (r_1, \dots, r_m) \in B$  aplicando la regla de Barrow se tiene

$$\begin{aligned} F(r_1, \dots, r_m) - F(0, \dots, 0) &= \int_0^1 \frac{dF(sr_1, \dots, sr_m)}{ds} ds = \\ &= \int_0^1 \sum_i^m r_i \left( \frac{\partial F}{\partial r_i} \right)_{(sr_1, \dots, sr_m)} ds = \sum_i^m r_i H_i(r_1, \dots, r_m) \end{aligned}$$

donde  $H_i(r_1, \dots, r_m) = \int_0^1 \left( \frac{\partial F}{\partial r_i} \right)_{(sr_1, \dots, sr_m)} ds$  para  $(r_1, \dots, r_m) \in B$ . Tomemos  $h_i = H_i y$ . Para cada  $q \in y^{-1}B$  se tiene que

$$\begin{aligned} f(q) - f(p) &= fy^{-1}(r) - fy^{-1}(0) = F(r) - F(0) = \sum_i r_i H_i(r) \\ &= \sum_i^m y_i(q) H_i y(q) = (\sum_i^m y_i h_i)(q) = (\sum_i^m (x_i - a_i) h_i)(q). \end{aligned}$$

De donde se obtiene el resultado deseado.  $\square$

PROPOSICIÓN 3.3. Sea  $x$  una carta de una variedad  $M$  y  $p \in \text{Dom } x$ . Entonces los vectores  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$  para  $i = 1, \dots, m$  forman una base de  $T_p M$ . Un vector tangente  $v \in T_p M$  admite en dicha base la expresión

$$v = \sum_i v(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\Lambda$  una derivación en el punto  $p$  de  $M$ . Supongamos que  $f$  es una función real definida en el punto  $p$ . Por el lema 3.1 y las proposiciones 3.1, 3.2 se tiene que  $\Lambda(f) = \Lambda(f(p) + \sum_i (x_i - a_i)h_i) = \sum_i \Lambda(x_i)h_i(p)$ . En particular para el vector tangente  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$  la fórmula anterior determina que  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)_p h_j(p) = h_i(p)$ . Sustituyendo en la primera fórmula obtenemos que  $\Lambda(f) = \sum_i \Lambda(x_i) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p = \sum_i \Lambda(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f)$ . Por lo tanto  $\Lambda = \sum_i \Lambda(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ . Es decir, las derivadas parciales en el punto  $p$  constituyen un sistema generador. Para ver que son independientes supongamos que  $0 = \sum \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ . Entonces  $0 = 0(x_j) = \sum \lambda_i \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)_p = \lambda_j$  para cada  $j$ . Luego el sistema de vectores es independiente.  $\square$

Notemos que si  $x$  e  $y$  son dos cartas en el punto  $p$ , entonces el cambio de bases viene dado por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_j \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p.$$

Puesto que

$$\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_p = \left(\frac{\partial r_j y x^{-1}}{\partial r_i}\right)_{x(p)}$$

la matriz del cambio de base es precisamente la matriz jacobiana  $J_{yx^{-1}}(x(p))$ .

#### 4. Aplicación tangente

Sea  $p$  un punto de una variedad diferenciable  $M$  que está en el dominio de una función diferenciable  $\phi: M \rightarrow N$ . Entonces  $\phi$  induce una aplicación lineal  $T_p \phi: T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$  del modo siguiente: Si  $v$  es un vector tangente en  $p$  a  $M$  y  $f: N \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida en  $p$ , entonces  $T_p \phi(v)(f) = v(f\phi)$ .

DEFINICIÓN 4.1. Sea  $p$  un punto de una variedad diferenciable  $M$  que está en el dominio de una función diferenciable  $\phi: M \rightarrow N$ . Llamaremos a  $T_p \phi: T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$  la *aplicación tangente a  $\phi$  en el punto  $p$*  y a veces diremos que es la derivada lineal de  $\phi$  en el punto  $p$ . Además de la notación anterior también se utilizará  $T_p \phi = \phi_{*p}$ .

Nótese que si  $x$  es una carta en  $p$  e  $y$  es un carta en  $\phi(p)$ , entonces  $T_p\phi(v) = \sum_j T_p\phi(v)(y_j)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{\phi(p)} = \sum_j v(y_j\phi)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{\phi(p)}$ . En particular para  $v = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$  se obtiene

$$T_p\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_j \left(\frac{\partial(y_j\phi)}{\partial x_i}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{\phi(p)}$$

Teniendo en cuenta que  $\left(\frac{\partial(y_j\phi)}{\partial x_i}\right)_p = \left(\frac{\partial(y_j\phi x^{-1})}{\partial r_i}\right)_{x(p)}$  se tiene que la matriz lineal de  $T_p\phi$  respecto a las bases asociadas a las cartas  $x$  e  $y$ , que llamaremos *matriz jacobiana de  $\phi$  en el punto  $p$*  y denotaremos por  $J_\phi^{y,x}(p)$ , es la siguiente

$$J_\phi^{y,x}(p) = \left(\left(\frac{\partial(y_j\phi)}{\partial x_i}\right)_p\right) = \left(\left(\frac{\partial(y_j\phi x^{-1})}{\partial r_i}\right)_{x(p)}\right) = J_{y\phi x^{-1}}(x(p))$$

que coincide con la matriz jacobiana de  $y\phi x^{-1}$  en el punto  $x(p)$ .

Recordemos que si  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable y  $r$  está en su dominio, entonces la matriz jacobiana de  $F$  en el punto  $r$  respecto las coordenadas canónicas es precisamente la matriz de la aplicación lineal  $DF_r$ .

**PROPOSICIÓN 4.1.** La aplicación tangente verifica las siguientes propiedades:

- (i) Si  $\phi: M \rightarrow N$  y  $\psi: N \rightarrow Q$  son funciones diferenciables y  $p$  está en el dominio de  $\psi\phi$ , entonces  $T_p(\psi\phi) = T_{\phi(p)}\psi T_p\phi$ .
- (ii) Sea  $U$  un abierto de una variedad  $M$  y sea  $p \in U$ . Entonces  $T_p(\text{id}|_U) = \text{id}_{T_pM}$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $v$  una derivación en el punto  $p$  y  $f$  una función diferenciable real definida en el punto  $p$ . Entonces  $T_p(\psi\phi)(v)(f) = v(f\psi\phi) = T_p\phi(v)(f\psi) = (T_{\phi(p)}\psi T_p\phi)(v)(f)$ . De aquí se concluye que  $T_p(\psi\phi) = T_{\phi(p)}\psi T_p\phi$ . Para la segunda parte se tiene que  $T_p(\text{id}|_U)(v)(f) = v(f \text{id}|_U) = v(f|_U) = v(f) = \text{id}_{T_pM}(v)(f)$ .  $\square$

**EJEMPLO 4.1.** Sea  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow M$  una función diferenciable. Si  $s \in \text{Dom } \sigma$ , se llama vector velocidad de la curva en el punto  $s$  al vector tangente en  $\sigma(s)$  a  $M$  dado por  $T_s\sigma\left(\frac{d}{dt}\right)_s$ .

Si  $A$  es un espacio vectorial y  $a \in A$ , se puede definir un isomorfismo canónico  $\theta_a: A \rightarrow T_aA$  del modo siguiente para cada  $v \in A$  consideremos la curva  $\sigma^v(t) = a + tv$ , entonces se toma  $\theta_a(v) = (T_0\sigma^v)\left(\frac{d}{dt}\right)_0$ .

Recordemos que si  $T_p\phi: T_pM \rightarrow T_{\phi p}N$  es una aplicación lineal, llamamos *rango* de  $T_p\phi$  a la dimensión de la imagen de la aplicación lineal (Véase definición 3.5 del capítulo 0).

**DEFINICIÓN 4.2.** Sea  $\phi: M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable y  $p$  un punto de su dominio. Llamaremos *rango de  $\phi$  en  $p$*  precisamente al rango de  $T_p\phi$ .

Es conveniente tener en cuenta que para la aplicación lineal  $T_p\phi: T_pM \rightarrow T_{\phi p}N$  la suma de su rango y la dimensión de su núcleo es igual a la dimensión del espacio vectorial  $T_pM$  (Véase proposición 3.1 del capítulo 0).

Utilizaremos el siguiente teorema de la función inversa para probar una versión similar para variedades.

**TEOREMA 4.1.** Sea  $r$  un punto del dominio de una función  $C^\infty$ ,  $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Entonces la diferencial  $Dh_r$  de  $h$  en  $r$  es un isomorfismo si y sólo si existe un entorno abierto  $V$  de  $r$  tal que  $h|_V$  es un difeomorfismo.

Para variedades diferenciables se tiene la siguiente versión:

**TEOREMA 4.2.** (Función inversa) Sea  $p$  un punto del dominio de una función diferenciable  $\phi: M \rightarrow N$ . La aplicación tangente  $T_p\phi$  es un isomorfismo si y sólo si existe un entorno abierto  $U$  de  $p$  tal que  $\phi|_U$  es un difeomorfismo.

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $\phi|_U$  es un difeomorfismo. Entonces  $T_p(\phi|_U)$  es un isomorfismo. Ahora bien es fácil comprobar que  $T_p(\phi|_U) = T_p\phi$ , por lo que  $T_p\phi$  es un isomorfismo.

Recíprocamente si  $T_p\phi$  es un isomorfismo, entonces  $m = \dim M = \dim N = n$ . Sean  $x$  e  $y$  cartas en  $p$  y en  $\phi(p)$ , respectivamente. La matriz jacobiana de  $\phi$  en el punto  $p$ , que es la matriz jacobiana de  $y\phi x^{-1}$  en  $x(p)$ , es inversible. Entonces existe un entorno abierto  $V$  de  $x(p)$  contenido en el dominio de  $y\phi x^{-1}$  tal que  $(y\phi x^{-1})|_V$  es un difeomorfismo. Sea  $U = x^{-1}V$  y consideremos  $\phi|_U$ . Nótese que  $\phi|_U = y^{-1}((y\phi x^{-1})|_V)x$ , por lo que  $\phi|_U$  es un difeomorfismo.  $\square$

**DEFINICIÓN 4.3.** Sea  $\phi: M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable y  $p$  un punto de su dominio. Se dice que  $\phi$  es un *difeomorfismo local en el punto  $p$*  si existe un entorno abierto  $U$  de  $p$  tal que  $\phi|_U$  es un difeomorfismo. Si  $\phi$  es un difeomorfismo local en todos los puntos de su dominio diremos que  $\phi$  es un *difeomorfismo local*.

Dadas dos variedades  $M$  y  $N$  de dimensiones  $m$  y  $n$ , en el producto cartesiano  $M \times N$  se puede dar una estructura de variedad  $(m+n)$ -dimensional tomando como atlas la familia de cartas  $\{x \times y \mid \text{donde } x \text{ es carta de } M \text{ e } y \text{ es carta de } N\}$ . Nótese que el cambio de cartas viene dado por  $(x' \times y')(x \times y)^{-1} = x'x^{-1} \times y'y^{-1}$ , que claramente es una función  $C^\infty$ .

**PROPOSICIÓN 4.2.** Sean  $M$  y  $N$  variedades,  $\phi: M \times N \rightarrow M$  y  $\psi: M \times N \rightarrow N$  las proyecciones canónicas. Sea  $(p, q)$  un punto de  $M \times N$  y denotemos por  $\phi_* = T_{(p,q)}\phi$  y  $\psi_* = T_{(p,q)}\psi$ . Entonces la aplicación lineal  $(\phi_*, \psi_*): T_{(p,q)}(M \times N) \rightarrow T_pM \oplus T_qN$  es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $i_q: M \rightarrow M \times N$ ,  $i_p: N \rightarrow M \times N$  las inclusiones definidas por  $i_q(p') = (p', q)$ ,  $i_p(q') = (p, q')$ . Sea la aplicación  $\xi: T_p M \oplus T_q N \rightarrow T_{(p,q)}(M \times N)$  dada por  $\xi(u, v) = (i_q)_* u + (i_p)_* v$ , donde  $(i_q)_* = T_p i_q$ ,  $(i_p)_* = T_q i_p$ . Nótese que  $(\phi_*, \psi_*)\xi(u, v) = (\phi_*, \psi_*)((i_q)_* u + (i_p)_* v) = (\phi_*((i_q)_* u + (i_p)_* v), \psi_*((i_q)_* u + (i_p)_* v)) = (\phi_*(i_q)_* u + \phi_*(i_p)_* v, \psi_*(i_q)_* u + \psi_*(i_p)_* v) = ((\phi i_q)_* u + (\phi i_p)_* v, (\psi i_q)_* u + (\psi i_p)_* v) = (u, v)$ , donde hemos utilizado la proposición 4.1 y el hecho de que la aplicación tangente en un punto de una aplicación constante es nula. Consecuentemente, la aplicación lineal  $(\phi_*, \psi_*)$  entre espacios vectoriales de la misma dimensión es suprayectiva, lo que implica que es un isomorfismo.  $\square$

PROPOSICIÓN 4.3. Sea  $(p, q)$  un punto del producto  $M \times N$  y sean  $\phi: M \times N \rightarrow M$  y  $\psi: M \times N \rightarrow N$  las proyecciones canónicas e  $i_q: M \rightarrow M \times N$ ,  $i_p: N \rightarrow M \times N$  las inclusiones definidas por  $i_q(p') = (p', q)$ ,  $i_p(q') = (p, q')$ . Si  $(p, q)$  está en el dominio de una función diferenciable  $f: M \times N \rightarrow L$ , entonces para  $w \in T_{(p,q)}(M \times N)$  se tiene que

$$T_{(p,q)}f(w) = T_p(fi_q)T_{(p,q)}\phi(w) + T_q(fi_p)T_{(p,q)}\psi(w)$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la proposición anterior se tiene que  $w = (i_q)_*\phi_*(w) + (i_p)_*\psi_*(w)$ . Entonces  $f_{*(p,q)}(w) = (fi_q)_*\phi_*(w) + (fi_p)_*\psi_*(w)$ .  $\square$

## SUBVARIETADES Y VARIETADES COCIENTE

El rango de una función diferenciable tiene especial interés si coincide con la dimensión de la variedad inicial o de la variedad final. En el caso que el rango coincida con ambas se trata de un difeomorfismo local.

### 1. Inmersiones

**DEFINICIÓN 1.1.** Una función  $f: M \rightarrow N$  se dice que es una *inmersión en un punto  $p$*  de su dominio, si el rango de  $f$  en  $p$  coincide con la dimensión de  $M$ . Si  $f$  es inmersión en todos los puntos de su dominio diremos que  $f$  es una *inmersión*. Cuando el dominio de  $f$  es  $M$  se dice que  $f$  es una *inmersión global*. Si  $f$  es una inmersión global inyectiva se dice que  $f$  es un *encaje*. Si  $f: M \rightarrow f(M)$  es también un homeomorfismo, diremos que  $f$  es un *encaje regular*. En este último caso si además  $f$  es una inclusión se dice que  $M$  es *subvariedad* y respectivamente *subvariedad regular* de  $N$ .

**EJEMPLO 1.1.** Para cada  $n \geq m$  tenemos la descomposición canónica  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  y la inclusión inducida  $\text{in}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  definida por  $\text{in}(r) = (r, 0)$ . La matriz jacobiana de la inclusión es de la forma

$$J_{\text{id}}(r) = \begin{pmatrix} \text{id} \\ 0 \end{pmatrix}$$

que tiene rango  $m$ . Por lo que  $\text{in}$  es una inmersión.

**LEMA 1.1.** Sea  $a \in \text{Dom } g$  donde  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable. Si  $g$  tiene rango  $m$  en  $a$ , entonces existe un difeomorfismo  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de modo que la función  $hg$  coincide con  $r \rightarrow (r, 0)$  en un entorno abierto de  $a$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $g$  tiene rango  $m$  en  $a$ , entonces existen  $1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_m \leq n$  tal que  $\det\left(\left(\frac{\partial g_{\sigma_i}}{\partial r_j}\right)_a\right) \neq 0$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Podemos extender  $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  a una permutación  $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  y definir  $\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mediante la fórmula  $\theta(r_1, \dots, r_n) = (r_{\sigma_1}, \dots, r_{\sigma_n})$ . Notemos que  $\det\left(\left(\frac{\partial(\theta g)_i}{\partial r_j}\right)_a\right) = \det\left(\left(\frac{\partial g_{\sigma_i}}{\partial r_j}\right)_a\right) \neq 0$ .

Consideremos la función  $\varphi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\varphi(r, s) = \theta g(r) + (0, s)$ . Entonces se tiene que  $\det\left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r_j}\right)_{(a,0)}\right) \neq 0$ . Aplicando el teorema de la función inversa podemos asegurar que existe una  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  tal que  $\text{Codom } f = U \times V$  con  $U$  entorno abierto de  $a$  contenido en  $\text{Dom}(\theta g)$  y  $V$  entorno abierto de  $0$  y además  $\varphi|_{U \times V} = f^{-1}$ . Tomemos  $h = f\theta$ . Para  $r \in U$  tenemos  $hg(r) = f\theta g(r) = f(\theta g(r) + (0, 0)) = f\varphi(r, 0) = (r, 0)$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 1.1.** Si  $f: M \rightarrow N$  es una inmersión en un punto  $p$ , entonces existen cartas  $x, y$  de  $M$  y  $N$  en  $p$  y  $f(p)$ , respectivamente, tal que  $yfx^{-1}(r) = (r, 0)$  para  $r \in \text{Dom}(yfx^{-1})$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\bar{x}$  una carta de  $M$  en  $p$  y sea  $\bar{y}$  una carta de  $N$  en  $f(p)$ , entonces  $\bar{y}f\bar{x}^{-1}$  es una inmersión en el punto  $\bar{x}(p)$ . El lema 1.1 asegura la existencia de un difeomorfismo  $h$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que para cada  $r \in \text{Dom}(h\bar{y}f\bar{x}^{-1})$  se tiene que  $h\bar{y}f\bar{x}^{-1}(r) = (r, 0)$ . Tomemos  $y = h\bar{y}$  y  $x = \bar{x}$ . Entonces si  $r \in \text{Dom}(yfx^{-1})$  se obtiene que  $yfx^{-1}(r) = (r, 0)$ .  $\square$

**COROLARIO 1.1.** Supongamos que  $p$  está en el dominio de una función diferenciable  $f: M \rightarrow N$ . Entonces  $f$  es una inmersión en  $p$  si y sólo si existe un entorno abierto  $U$  de  $p$  y una función diferenciable  $\pi: N \rightarrow M$  tal que  $\pi(f|_U) = \text{id}|_U$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $f$  es una inmersión en  $p$ . Entonces por la proposición anterior, existen cartas  $x$  en  $p$  e  $y$  en  $f(p)$  tal que  $yfx^{-1}(r) = (r, 0)$ . Consideremos la descomposición  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  y sea  $\text{pr}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  la proyección natural. Sea  $U = \text{Dom } x \cap f^{-1}(\text{Dom } y)$  y  $\pi = x^{-1} \text{pr } y$ . Entonces  $\pi(f|_U) = x^{-1} \text{pr } y(f|_U) = x^{-1} \text{pr } y(f|_U)x^{-1}x = x^{-1} \text{id}|_{x(f^{-1}(\text{Dom } y))}x = \text{id}|_U$ .

Recíprocamente, si  $\pi(f|_U) = \text{id}|_U$ , entonces  $(T_{f(p)}\pi)T_p(f|_U) = \text{id}_{T_p M}$ . Luego  $T_p(f|_U) = T_p(f)$  es un monomorfismo. Por lo tanto  $f$  es una inmersión en  $p$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 1.2.** Sea  $f: M \rightarrow N$  una inmersión global y sea  $g: L \rightarrow M$  una función continua. Entonces si  $fg$  es diferenciable se tiene que  $g$  es diferenciable.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $p \in \text{Dom } g$ . Por ser  $f$  una inmersión en  $g(p)$ , aplicando corolario 1.1, existe  $V$  entorno abierto de  $g(p)$  y existe  $\pi: M \rightarrow N$  tal que  $\pi(f|_V) = \text{id}|_V$ . Por ser  $g$  continua  $U = g^{-1}V$  es un entorno abierto de  $p$ . Entonces  $g|_U = (\text{id}|_V)(g|_U) = \pi(f|_V)(g|_U) = \pi(fg|_U)$ . Por ser  $(fg|_U)$  diferenciable se obtiene que  $g|_U$  es diferenciable. Luego  $g$  es diferenciable en cada punto de su dominio. Por lo tanto  $g$  es diferenciable.  $\square$

**PROPOSICIÓN 1.3.** Sea  $f: M \rightarrow N$  un encaje regular y sea  $g: L \rightarrow M$  una función. Entonces si  $fg$  es diferenciable se tiene que  $g$  es diferenciable.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que  $g = f^{-1}(fg)$ . Entonces  $fg$  es continua por ser diferenciable y puesto que  $f$  es un encaje se tiene que  $f^{-1}$  es continua considerandola como una aplicación de  $f(M)$ , con la topología traza, en  $M$  con la topología inducida por su estructura de variedad. Puesto que la composición de aplicaciones continuas es continua, se tiene que  $g$  es continua. Aplicando la proposición anterior se concluye que  $g$  es diferenciable.  $\square$

Obsérvese que un encaje de una variedad compacta en una Hausdorff es un encaje regular.

OBSERVACIÓN 1.1. Existe un notable teorema que asegura que dada una variedad compacta Hausdorff de dimensión  $m$  se puede encajar regularmente en  $\mathbb{R}^{2m}$ . Una versión del teorema anterior puede verse en la sección 6 del capítulo 5 del [5]. Whitney[42] probó una versión más general para variedades Hausdorff y segundo contables probando que existía un encaje regular en  $\mathbb{R}^{2m+1}$ . Después en [43] demostró que se podía cambiar  $\mathbb{R}^{2m+1}$  por  $\mathbb{R}^{2m}$ .

## 2. Submersiones

DEFINICIÓN 2.1. Una función  $f: M \rightarrow N$  se dice que es una *submersión en un punto*  $p$  de su dominio, si el rango de  $f$  en  $p$  coincide con la dimensión de  $N$ . Si  $f$  es una submersión en todos los puntos de su dominio diremos que  $f$  es una *submersión*. Cuando el dominio de  $f$  es  $M$  diremos que  $f$  es una *submersión global*. Si  $f$  es una submersión global suprayectiva diremos que  $N$  es un  *$f$ -cociente* de  $M$ . Diremos que  $N$  es un *cociente* de  $M$  si existe una submersión global suprayectiva de  $M$  en  $N$ .

EJEMPLO 2.1. Para cada  $m \geq n$  tenemos la descomposición canónica  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$  y la proyección canónica inducida  $\text{pr}_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $\text{pr}_1(r_1, r_2) = r_1$ . La matriz jacobiana de la proyección es de la forma

$$J_{\text{pr}_1}(r_1, r_2) = (\text{id} \ 0)$$

que tiene rango  $n$ . Por lo que  $\text{pr}_1$  es una submersión.

LEMA 2.1. Sea  $a \in \text{Dom } g$  donde  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable. Si  $g$  tiene rango  $n$  en  $a$ , entonces existe un difeomorfismo  $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  de modo que la función  $gh$  coincide con la proyección  $(r_1, r_2) \rightarrow r_1$  en un entorno abierto de  $h^{-1}(a)$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $g$  tiene rango  $n$  en  $a$ , entonces existen  $1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n \leq m$  tal que  $\det\left(\left(\frac{\partial g_i}{\partial r_{\sigma_j}}\right)_a\right) \neq 0$ . Podemos extender  $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  a una permutación  $\sigma: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  y definir  $\theta: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  mediante la fórmula  $\theta(r_1, \dots, r_m) = (r_{\sigma_1}, \dots, r_{\sigma_m})$ .

Nótese que  $\det\left(\left(\frac{\partial(g\theta)_i}{\partial r_j}\right)_{\theta^{-1}a}\right) = \det\left(\left(\frac{\partial g_i}{\partial r_{\sigma_j}}\right)_a\right) \neq 0, i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

Consideremos la función  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$  dada por  $\varphi(r) = (g\theta(r), \text{pr}_2(r))$ . Entonces se tiene que  $\det\left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r_j}\right)_{\theta^{-1}a}\right) \neq 0, i, j \in \{1, \dots, m\}$ . Aplicando el teorema de la función inversa podemos asegurar que existe una  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $\text{Codom } f$  es un entorno abierto de  $\theta^{-1}a$  contenido en  $\text{Dom}(g\theta)$  y además  $\varphi|_{\text{Codom } f} = f^{-1}$ . Tomemos  $h = \theta f$ . Para  $(r_1, r_2) \in \text{Dom } f$  tenemos  $gh(r_1, r_2) = g\theta f(r_1, r_2) = \text{pr}_1 \varphi f(r_1, r_2) = r_1$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.1.** Si  $f: M \rightarrow N$  es una submersión en un punto  $p$ , entonces existen cartas  $x, y$  de  $M$  y  $N$  en  $p$  y  $f(p)$ , respectivamente, tal que  $yfx^{-1}(r_1, r_2) = r_1$  para  $(r_1, r_2) \in \text{Dom}(yfx^{-1}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\bar{x}$  una carta de  $M$  en  $p$  y sea  $\bar{y}$  una carta de  $N$  en  $f(p)$ . Entonces  $\bar{y}f\bar{x}^{-1}$  es una submersión en el punto  $\bar{x}(p)$ . El lema 2.1 asegura la existencia de un difeomorfismo  $h$  de  $\mathbb{R}^m$  tal que para cada  $(r_1, r_2) \in \text{Dom}(\bar{y}f\bar{x}^{-1}h)$  se tiene que  $\bar{y}f\bar{x}^{-1}h(r_1, r_2) = r_1$ . Tomemos  $y = \bar{y}$  y  $x = h^{-1}\bar{x}$ . Entonces si  $(r_1, r_2) \in \text{Dom}(yfx^{-1})$  se obtiene que  $yfx^{-1}(r_1, r_2) = \bar{y}f\bar{x}^{-1}h(r_1, r_2) = r_1$ .  $\square$

**COROLARIO 2.1.** Supongamos que  $p$  está en el dominio de una función diferenciable  $f: M \rightarrow N$ . Entonces  $f$  es una submersión en  $p$  si y sólo si existe una función diferenciable  $s: N \rightarrow M$  definida en  $f(p)$  tal que  $fs = \text{id}|_{\text{Dom } s}$  y  $sf(p) = p$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $f$  es una submersión en  $p$ , entonces existen cartas  $x, y$  de  $M$  y  $N$  en  $p$  y  $f(p)$ , respectivamente, tal que  $yfx^{-1}(r_1, r_2) = r_1$  para  $(r_1, r_2) \in \text{Dom}(yfx^{-1}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ . Supongamos que  $x(p) = (a, b)$  y sea  $\text{pr}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  la proyección canónica, denotemos por  $i_b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  la aplicación  $i_b(r_1) = (r_1, b)$ . Sea el entorno abierto de  $yf(p) = a$  dado por  $W = i_b^{-1}(x(\text{Dom } f)) \cap \text{Codom } y$ , sea  $S = i_b|_W$  y tomemos como  $s = x^{-1}Sy$ , ahora es fácil ver que  $sf(p) = p$ . Nótese también que  $\text{Codom}(fx^{-1}Sy) \subset \text{Dom } y$ . Entonces  $fs = fx^{-1}Sy = y^{-1}yfx^{-1}Sy = y^{-1}\text{pr}(i_b|_W)y = y^{-1}\text{id}|_Wy = \text{id}|_{y^{-1}W} = \text{id}|_{\text{Dom } s}$ .

Recíprocamente, supongamos que existe dicha sección local  $s$ . Entonces  $T_p f T_{f(p)} s = T_{f(p)}(\text{id}|_{\text{Dom } s}) = T_{f(p)} \text{id} = \text{id}_{T_{f(p)} N}$ . De la fórmula anterior se deduce que  $T_p f$  es un epimorfismo. Luego  $f$  es una submersión en  $p$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.2.** Si  $f: M \rightarrow N$  es una submersión, entonces  $f$  es una función abierta.

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $U$  un abierto de  $M$ , se tiene que  $f|_U$  es también una submersión. Además  $\text{Im}(f|_U) = f(U)$ . Entonces será suficiente que veamos que la imagen de una submersión es un abierto. Supongamos que  $f(p) \in \text{Im } f$ . Por ser  $f$  una submersión en el punto

$p$ , sabemos por el corolario 2.1 que existe una función diferenciable  $s: N \rightarrow M$  tal que  $sf(p) = p$  y  $fs = \text{id}|_{\text{Dom } s}$ . De aquí se concluye que  $\text{Dom } s \subset \text{Im } f$ . Además  $\text{Dom } s$  es un abierto por ser el dominio de una función diferenciable. Luego  $\text{Im } f$  es entorno de cada uno de sus puntos. Ésto implica que  $\text{Im } f$  es abierto.  $\square$

PROPOSICIÓN 2.3. Sea  $f: M \rightarrow N$  una submersión suprayectiva y sea  $g: N \rightarrow L$  una función. Entonces si  $gf$  es diferenciable se tiene que  $g$  es diferenciable.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $q \in N$ . Puesto que  $f$  es suprayectiva existe  $p \in M$  tal que  $f(p) = q$ . Por el corolario 2.1 existe  $s$  diferenciable tal que  $fs = \text{id}|_{\text{Dom } s}$ . Entonces  $g|_{\text{Dom } s} = (gf)s$  que es diferenciable por ser composición de diferenciables. Por lo tanto  $g$  es diferenciable en  $q$  para cada  $q \in N$ . Luego  $g$  es diferenciable.  $\square$

### 3. Las fibras de una submersión

PROPOSICIÓN 3.1. Si  $f: M \rightarrow N$  es una submersión y  $q \in \text{Codom } f$ , entonces  $S = f^{-1}(q)$  es una subvariedad regular de dimensión  $m - n$ .

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, supongamos que  $\dim(M) = m = n = \dim(N)$ . Entonces para cada  $p \in f^{-1}(q)$ , por el teorema 1.1, existe un entorno abierto  $U$  de  $p$  tal que  $f|_U$  es un difeomorfismo. En consecuencia  $U \cap f^{-1}(q) = \{p\}$ . Es decir,  $f^{-1}(q)$  es un espacio discreto que admite de modo natural estructura de variedad diferenciable 0-dimensional. Es también inmediato comprobar que  $S$  es una subvariedad regular de dimensión  $m - n = 0$ .

En segundo lugar, supongamos que  $m > n$ . Consideremos la descomposición canónica  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ . Sea  $\text{pr}_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$  la segunda proyección canónica e  $\text{in}_2: \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$  la inclusión definida por  $\text{in}_2(r_2) = (0, r_2)$ . Notemos que ambas son aplicaciones diferenciables.

Para cada  $p \in S = f^{-1}(q)$  existen cartas  $u$  en  $p$  y  $v$  en  $f(p)$  tales que  $\text{Dom } u \subset \text{Dom}(fv)$ ,  $v(q) = 0$  y  $vf u^{-1} = \text{pr}_1|_{\text{Dom}(vf u^{-1})}$ . Sea  $p' \in \text{Dom } u \cap S$ , y supongamos que  $u(p') = (r'_1, r'_2)$ , entonces  $r'_1 = \text{pr}_1 u(p') = vf(p') = v(q) = 0$ . Por lo tanto  $u(p') \in \text{Codom } u \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n})$ . Sea ahora  $(0, r'_2) \in \text{Codom } u \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-n})$ , entonces  $u^{-1}(0, r'_2) \in \text{Dom } u \cap S$ . Luego  $u(\text{Dom } u \cap S) = \text{Codom } u \cap (0 \times \mathbb{R}^{m-n})$ .

Denotemos por  $\text{in}: S \rightarrow M$  la inclusión canónica. Para cada  $p \in S$  podemos considerar la carta  $x = \text{pr}_2 u \text{in}$  que es inyectiva y tiene por codominio el abierto  $\text{in}_2^{-1}(\text{Codom } u)$ . Supongamos que tenemos dos cartas del tipo anterior  $x = \text{pr}_2 u \text{in}$ ,  $\bar{x} = \text{pr}_2 \bar{u} \text{in}$ . Estudieemos la composición  $\bar{x}x^{-1}$ . Puesto que  $x^{-1} = \text{in}^{-1} u^{-1} \text{in}_2$ , entonces  $\bar{x}x^{-1} = \text{pr}_2 \bar{u} \text{in} \text{in}^{-1} u^{-1} \text{in}_2 = \text{pr}_2 \bar{u} u^{-1} \text{in}_2$  que es una función diferenciable. Además es claro que la reunión de los dominios de las cartas así definidas es  $S$ . Entonces  $S$  admite estructura de variedad  $(m - n)$ -dimensional.

Ahora vamos a ver que la inclusión  $\text{in}: S \rightarrow M$  es una inmersión. Para  $p \in S$  consideremos las cartas  $x$  y  $u$ . Entonces  $u \text{in} x^{-1} = u \text{in} \text{in}^{-1} u^{-1} \text{in}_2 = uu^{-1} \text{in}_2 = \text{in}_2$  que es una inmersión. Luego  $\text{in}$  es una inmersión en  $p$  para cada  $p \in S$ . Es decir que  $\text{in}$  es una inmersión. Para ver que es regular, queda por ver que la topología de  $S$  es más fina que la topología traza. Sea  $U$  un entorno abierto de  $p$  contenido en el dominio de una carta  $x$ , entonces  $x(U) = \text{in}_2^{-1} W$  con  $W$  abierto de  $\mathbb{R}^m$  contenido en codominio de  $u$ . Entonces  $U = S \cap u^{-1}W$ . Luego  $U$  es un abierto de la topología traza.  $\square$

**PROPOSICIÓN 3.2.** Sea  $f: M \rightarrow N$  diferenciable,  $q \in \text{Codom } f$  y  $f$  es submersión en todo punto  $p \in f^{-1}(q)$ , entonces  $f^{-1}(q)$  es una subvariedad regular de dimensión  $m - n$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Para cada  $p \in f^{-1}(q)$  se tiene que si tomamos cartas  $x, y$  en  $p, f(p)$ , respectivamente, entonces  $\det J_f^{y,x}$  es diferenciable y como su valor en  $p$  es no nulo también lo será en un entorno abierto  $U_p$  de  $p$  en  $M$ . En consecuencia si  $U = \bigcup_p U_p$ ,  $p \in f^{-1}(q)$ , entonces  $f|_U$  es una submersión luego  $f^{-1}(q)$  es una subvariedad regular de  $M$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 3.3.** Sea  $f: M \rightarrow N$  una submersión,  $q \in \text{Codom } f$ ,  $p \in f^{-1}(q) = S$  y  $j: S \rightarrow M$  la inclusión canónica, entonces  $T_p j T_p S = \text{Ker } T_p f$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Nótese que  $fj$  es una función constante. Entonces  $T_p f T_p j = 0$ , de donde se tiene que  $T_p j (T_p S) \subset \text{Ker } T_p f$ . Teniendo en cuenta que los espacios vectoriales anteriores tienen la misma dimensión se sigue que  $T_p j (T_p S) = \text{Ker } T_p f$ .  $\square$

## CAMPOS Y FORMAS

La noción de campo vectorial se utiliza para estudiar numerosos fenómenos. Citemos los campos de fuerzas, campos eléctricos, magnéticos, etc., que son herramientas básicas para una física básica. Similarmente, las formas se utilizan para desarrollar teorías de integración, medir longitudes, ángulos, etc. Cuando la situación lo requiere y la modelización no se puede abordar mediante abiertos euclidianos, es necesario utilizar variedades diferenciales y para este contexto presentamos a continuación las definiciones y propiedades elementales de los campos y las formas.

### 1. Fibrado tangente y cotangente

Sea  $M$  una variedad diferenciable  $m$ -dimensional, consideremos el conjunto de todos los vectores tangentes  $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$ . Denotemos por  $\pi: TM \rightarrow M$  la proyección que aplica un vector tangente en el punto de tangencia,  $\pi(v_p) = p$ . Para cada carta  $x$  de  $M$ , consideremos una nueva carta  $\tilde{x}: TM \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$  definida por  $\tilde{x}_i(v_p) = x_i(p)$ ,  $\tilde{x}_{m+i}(v_p) = v_p(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Notemos que  $\text{Dom } \tilde{x} = \pi^{-1}(\text{Dom } x)$  y  $\text{Codom } \tilde{x} = \text{Codom } x \times \mathbb{R}^m$ . Para  $x, y$  cartas de  $M$  el cambio de las nuevas cartas viene dado por

$$\begin{aligned} \tilde{y}\tilde{x}^{-1}(a, r) &= \tilde{y}\left(\sum r_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x^{-1}a}\right) \\ &= (y_1 x^{-1}a, \dots, y_m x^{-1}a, \sum r_i \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_i}\right)_{x^{-1}a}, \dots, \sum r_i \left(\frac{\partial y_m}{\partial x_i}\right)_{x^{-1}a}) \\ &= (y x^{-1}a, r J_{y x^{-1}}^T(a)), \end{aligned}$$

donde  $J_{y x^{-1}}^T$  denota traspuesta de la matriz jacobiana del cambio de cartas. En consecuencia, la familia de las cartas  $\{\tilde{x} | x \text{ carta de } M\}$  dota a  $TM$  de una estructura de variedad diferenciable  $2m$ -dimensional.

**DEFINICIÓN 1.1.** Llamaremos *fibrado tangente* a la proyección natural  $\pi: TM \rightarrow M$ . También denominaremos fibrado tangente a la variedad  $TM$ .

Recordemos que  $C^\infty(M)$  denota el espacio de todas las funciones diferenciables de  $M$  en  $\mathbb{R}$ . Si  $p \in \text{Dom } f$ ,  $f \in C^\infty(M)$  podemos definir la aplicación lineal  $df_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la expresión  $df_p(v) = v(f)$  para cada  $v \in T_p M$ .

DEFINICIÓN 1.2. Una aplicación lineal de la forma  $T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  diremos que es un *vector cotangente en  $p$  a  $M$* . El espacio vectorial de los vectores cotangentes en  $p$  a  $M$  se denotará por  $T_p^* M$ .

Para una carta  $x$  de  $M$  tenemos las funciones  $x_i: M \rightarrow \mathbb{R}$  y para cada punto  $p$  podemos considerar  $(dx_i)_p$  para  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

LEMA 1.1. Sea  $p$  un punto del dominio de una carta  $x$  de una variedad  $M$ , entonces  $(dx_1)_p, \dots, (dx_m)_p$  es una base del espacio  $T_p^* M$ .

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$  es una base de  $T_p M$ . Los vectores cotangentes anteriores verifican que  $(dx_i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_p$ . Lo que prueba que precisamente se trata de la base dual.  $\square$

Sea  $M$  una variedad diferenciable, consideremos el conjunto de todos los vectores cotangentes  $T^* M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M$ . Denotemos por  ${}^* \pi: T^* M \rightarrow M$  la proyección  ${}^* \pi(w_p) = p$ .

Para cada carta  $x$  de  $M$ , consideramos una nueva carta  ${}^* \tilde{x}: T^* M \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$  definida por  ${}^* \tilde{x}_i(w_p) = x_i(p)$ ,  ${}^* \tilde{x}_{m+i}(w_p) = w_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Notemos que  $\text{Dom } {}^* \tilde{x} = {}^* \pi^{-1}(\text{Dom } x)$  y  $\text{Codom } {}^* \tilde{x} = \text{Codom } x \times \mathbb{R}^m$ . El cambio de las nuevas cartas viene dado por

$$\begin{aligned} {}^* \tilde{y} {}^* \tilde{x}^{-1}(a, r) &= {}^* \tilde{y} \left( \sum_i r_i (dx_i)_{x^{-1}a} \right) \\ &= (yx^{-1}a, \left( \sum_i r_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial y_1} \right)_{x^{-1}a} \right), \dots, \left( \sum_i r_i \left( \frac{\partial x_i}{\partial y_m} \right)_{x^{-1}a} \right)) \\ &= (yx^{-1}a, r((J_{yx^{-1}}(a))^{-1})). \end{aligned}$$

Notemos que es una función  $C^\infty$ . De este modo vemos que la familia de cartas  $\{{}^* \tilde{x} | x \text{ carta de } M\}$  dota a  $T^* M$  de una estructura de variedad diferenciable  $2m$ -dimensional. Es interesante observar que la matriz que aparece en el cambio de cartas del fibrado cotangente es precisamente la traspuesta de la inversa de la que obtenemos en el fibrado tangente.

DEFINICIÓN 1.3. Se llamará *fibrado cotangente* a la proyección natural  ${}^* \pi: T^* M \rightarrow M$ . Como antes, se utiliza también este mismo nombre para designar a la variedad  $T^* M$ .

## 2. Definición y propiedades de campos y formas

Un operador lineal sobre un abierto  $U$  de  $M$  es una aplicación  $\xi: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  tal que  $\text{Dom } \xi f = U \cap \text{Dom } f$  y que verifica la propiedad de linealidad siguiente:  $\xi(\alpha f + \beta g) = \alpha \xi f + \beta \xi g$ . Si además se tiene que  $\xi(f \cdot g) = (\xi f) \cdot g + f \cdot (\xi g)$ , diremos que es un *operador derivación con dominio  $U$* . A continuación analizaremos la relación entre operadores derivación y campos.

DEFINICIÓN 2.1. Un *campo  $X$*  de vectores tangentes a una variedad  $M$  es una sección diferenciable del fibrado tangente  $\pi: TM \rightarrow M$ ;

es decir,  $\pi X = \text{id}|_{\text{Dom } X}$ . Una *1-forma*  $w$  de vectores cotangentes a una variedad  $M$  es una sección diferenciable del fibrado cotangente  $\pi^*: T^*M \rightarrow M$ ; es decir,  $\pi w = \text{id}|_{\text{Dom } w}$ .

LEMA 2.1. Sea  $M$  una variedad diferenciable y sea  $x$  una carta de la variedad.

- (i) Si  $X: M \rightarrow TM$  es una sección del fibrado tangente y  $X|_{\text{Dom } x} = \sum_{i=1}^m A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , entonces  $X|_{\text{Dom } x}$  es diferenciable si y sólo si  $A_1, \dots, A_m$  son diferenciables.
- (ii) Si  $w: M \rightarrow T^*M$  es una sección del fibrado cotangente y  $w|_{\text{Dom } x} = \sum_{i=1}^m B^i dx_i$ , entonces  $w|_{\text{Dom } x}$  es diferenciable si y sólo si  $B^1, \dots, B^m$  son diferenciables,
- (iii) Sean  $X, Y$  campos tangentes a  $M$  y  $f, g \in C^\infty(M)$  entonces la sección del fibrado tangente  $fX + gY$  definida por  $(fX + gY)_p = f(p)X_p + g(p)Y_p$  es también diferenciable, por lo que  $fX + gY$  es un campo tangente a  $M$  con dominio  $\text{Dom } f \cap \text{Dom } X \cap \text{Dom } g \cap \text{Dom } Y$ .
- (iv) Sean  $u, v$  1-formas cotangentes a  $M$  y  $f, g \in C^\infty(M)$  entonces la sección del fibrado cotangente  $fu + gv$  definida por  $(fu + gv)_p = f(p)u_p + g(p)v_p$  es también diferenciable; por lo que  $fu + gv$  es una 1-forma cotangente a  $M$  con dominio  $\text{Dom } f \cap \text{Dom } u \cap \text{Dom } g \cap \text{Dom } v$ .

DEMOSTRACIÓN. Nótese que  $\tilde{x}X_p = (x(p), A_1(p), \dots, A_m(p))$ . Entonces por el ejercicio ?? del capítulo 1, se tiene que  $X|_{\text{Dom } x}$  es diferenciable si y sólo si  $A_1, \dots, A_m$  son diferenciables.

Análogamente para las 1-formas. La verificación de (iii) y (iv) es una comprobación rutinaria.  $\square$

Dado  $X$  un campo tangente a  $M$ , podemos definir el siguiente operador inducido  $\xi$  que aplica una función diferenciable  $f$  de  $M$  en  $\mathbb{R}$  en la función  $\xi f$  cuyo dominio es  $\text{Dom } X \cap \text{Dom } f$  y que está definida por  $\xi f(p) = X_p(f)$ . Recíprocamente, dado un operador derivación  $\xi$  sobre un abierto  $U$ , podemos asociarle la sección  $X$  del fibrado tangente cuyo dominio es  $U$  y que está definida por  $X_p(f) = \xi f(p)$ .

PROPOSICIÓN 2.1. Si  $X$  es un campo tangente a una variedad  $M$ , entonces el operador inducido  $\xi$  es un operador derivación. Recíprocamente, si  $\xi$  es un operador derivación, entonces la sección asociada  $X$  es un campo tangente.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $X$  un campo y supongamos que  $\xi$  es el correspondiente operador. En primer lugar probaremos que si  $f$  es diferenciable entonces  $\xi f$  también lo es. Sea  $x$  una carta y supongamos que  $X|_{\text{Dom } x} = \sum_{i=1}^m A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Entonces para  $p \in \text{Dom } X \cap \text{Dom } x$  se tiene que  $\xi f(p) = X_p(f) = \left( \sum_{i=1}^m A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (f) = \sum_{i=1}^m A_i(p) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p =$

$\left(\sum_{i=1}^m A_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(p)$ . Entonces  $\xi f|_{\text{Dom } x} = \sum_{i=1}^m A_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ , para cada carta  $x$ . Por lo tanto, si aplicamos el lema 2.1 se obtiene que  $\xi f$  es diferenciable. Ahora veamos que es lineal, en efecto,  $(\xi(\alpha f + \beta g))(p) = X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g) = \alpha \xi f(p) + \beta \xi g(p) = (\alpha \xi f + \beta \xi g)(p)$  para cada  $p \in \text{Dom } X \cap \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ , escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $f, g \in C^\infty(M)$ . Para ver que  $\xi$  es una derivación, sean  $f, g \in C^\infty(M)$ , entonces  $\xi(f \cdot g)(p) = X_p(f \cdot g) = f(p)X_p(g) + X_p(f)g(p) = f(p)\xi g(p) + \xi f(p)g(p) = (f(\xi g) + (\xi f)g)(p)$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\xi$  es un operador derivación con dominio el abierto  $U$ . Para cada  $p \in U$ , se tiene que  $X_p$  es lineal, ya que  $X_p(\alpha f + \beta g) = (\xi(\alpha f + \beta g))(p) = \alpha \xi f(p) + \beta \xi g(p) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g)$ . Además cada  $X_p$  verifica la propiedad de Leibniz: Si  $f, g \in C^\infty(p)$ , entonces  $X_p(f \cdot g) = \xi(f \cdot g)(p) = (f(\xi g) + (\xi f)g)(p) = f(p)X_p(g) + X_p(f)g(p)$ . Finalmente, queda por probar que  $X$  es diferenciable. Sea  $p \in U = \text{Dom } X$  y sea  $x$  una carta de  $M$  en  $p$  tal que  $\text{Dom } x \subset U$ . Entonces  $X = \sum_1^m X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_1^m \xi(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Puesto que  $\xi(x_i)$  es diferenciable para  $1 \leq i \leq m$ , aplicando el lema 2.1 se deduce que  $X$  es diferenciable en el punto  $p$ . Por lo tanto  $X$  es una sección diferenciable. □

**OBSERVACIÓN 2.1.** (Notación) Dada la correspondencia biunívoca entre campos tangentes y operadores derivación, utilizaremos la misma letra  $X$  para denotar el campo y el operador derivación inducido. El conjunto de todos los campos tangentes a una variedad  $M$  se denotará por  $\Xi(M)$  y los campos tangentes con dominio un abierto  $U$  por  $\Xi_U(M)$ . En particular  $\Xi_M(M)$  denota los campos globales tangentes a la variedad  $M$ .

Un espacio vectorial real  $V$  provisto de una aplicación bilineal antisimétrica  $[-, -]: V \times V \rightarrow V$  que satisfaga la identidad de Jacobi

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$$

se denomina *álgebra de Lie*.

**DEFINICIÓN 2.2.** Dados dos campos tangentes  $X, Y$  a una variedad  $M$  se llama *corchete de Lie* al campo tangente definido como el operador lineal que aplica la función  $f \in C^\infty(M)$  en la función  $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ . Notemos que  $\text{Dom}[X, Y] = \text{Dom } X \cap \text{Dom } Y$ .

**PROPOSICIÓN 2.2.** El corchete de Lie dota al espacio vectorial  $\Xi_U(M)$  de los campos tangentes a una variedad  $M$  con dominio un abierto  $U$  de estructura de álgebra de Lie. En particular el espacio vectorial  $\Xi_M(M)$  de los campos globales tiene una estructura de álgebra de Lie.

**DEMOSTRACIÓN.** No es difícil comprobar que efectivamente los campos tangentes globales de una variedad tiene estructura de espacio

vectorial real. La identidad de Jacobi se desprende de las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} & [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = \\ & (XY - YX)Z - Z(XY - YX) + (YZ - ZY)X - X(YZ - ZY) \\ & + (ZX - XZ)Y - Y(ZX - XZ) = 0. \end{aligned}$$

□

Dada  $w$  una 1-forma de  $M$ , podemos definir el siguiente operador lineal inducido  $\omega$  que aplica un campo  $X$  tangente a  $M$  en la función  $\omega X$  cuyo dominio es  $\text{Dom } w \cap \text{Dom } X$  y está definida por  $\omega X(p) = w_p(X_p)$ .

Una aplicación  $\omega: \Xi(M) \rightarrow C^\infty(M)$  diremos que es *un operador lineal sobre un abierto  $U$*  si satisface que  $\text{Dom}(\omega X) = U \cap \text{Dom } X$  y  $\omega(fX + gY) = f\omega X + g\omega Y$  donde  $f, g \in C^\infty(M)$  y  $X, Y \in \Xi(M)$ . De modo recíproco, dado un operador lineal  $\omega: \Xi(M) \rightarrow C^\infty(M)$  sobre un abierto  $U$ , podemos asociarle la 1-forma  $w$  tal que si  $v \in T_p M$  y  $V$  es un campo tal que  $V_p = v$ , entonces  $w_p(v) = \omega V(p)$ . Notemos que el lema siguiente prueba la existencia del campo  $V$  y la independencia del campo  $V$  elegido.

LEMA 2.2. Sea  $M$  una variedad diferenciable.

- (i) Si  $\omega: \Xi(M) \rightarrow C^\infty(M)$  es un operador lineal y  $X$  un campo tangente a  $M$  y  $W$  un abierto de  $M$ , entonces

$$(\omega X)|_W = \omega(X|_W),$$

- (ii) Si  $v$  es un vector tangente en un punto  $p \in M$ , entonces existe un campo tangente  $V$  definido en  $p$  tal que  $V_p = v$ ,
- (iii) Sea  $\omega: \Xi(M) \rightarrow C^\infty(M)$  es un operador lineal sobre un abierto  $U$  y sean  $V, V'$  son dos campos tangentes definidos en un punto  $p \in U$ , si  $V_p = V'_p$ , entonces  $\omega V(p) = \omega V'(p)$ .

DEMOSTRACIÓN. Para ver (i), notemos que  $X - X|_W = 0(X - X|_W)$ , entonces  $0 = 0\omega(X - X|_W) = \omega(0(X - X|_W)) = \omega(X - X|_W) = \omega(X) - \omega(X|_W)$ . De aquí se obtiene que  $(\omega X)|_W = \omega(X|_W)$ .

Para (ii), sea  $x$  una carta en el punto  $p$ , entonces  $v = \lambda_1 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + \dots + \lambda_m \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p$ . Entonces el campo  $V = \lambda_1 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \dots + \lambda_m \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \right)$  verifica que  $V_p = v$ .

(iii) Sea  $X$  un campo definido en  $p$  tal que  $X_p = 0$  y sea  $x$  una carta en  $p$ . Supongamos que  $X|_{\text{Dom } X} = \sum_i f_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ . Entonces aplicando (i) se tiene que

$$(\omega X)(p) = (\omega(X|_{\text{Dom } x}))(p) = \omega\left(\sum_i f_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)\right)(p) = \sum_i f_i(p)\omega \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)(p).$$

De la condición  $X_p = 0$  se desprende que  $f_1(p) = 0, \dots, f_m(p) = 0$ , luego  $(\omega X)(p) = 0$ .

Tomemos ahora  $X = V - V'$ , notemos que  $X_p = 0$ , entonces  $0 = (\omega(V - V'))(p) = (\omega V)(p) - (\omega V')(p)$ .  $\square$

**PROPOSICIÓN 2.3.** Existe una correspondencia biunívoca entre operadores lineales respecto funciones de la forma  $\omega: \Xi(M) \rightarrow C^\infty(M)$  y 1-formas  $w: M \rightarrow T^*M$  de una variedad  $M$ .

**DEMOSTRACIÓN.** En primer lugar, veamos que si  $w$  es una 1-forma, el correspondiente operador es  $\omega$  y  $X$  un campo diferenciable, entonces  $\omega X$  es diferenciable. En el dominio de una carta  $x$  se tiene que  $w|_{\text{Dom } x} = \sum A^i dx_i$  y para el campo  $X|_{\text{Dom } x} = \sum B_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Entonces  $(\omega X)|_{\text{Dom } x} = \sum A^i B_i$  que por el lema 2.1 es diferenciable. Puesto que esto sucede para cada carta  $x$  se sigue que  $\omega X$  es diferenciable. Veamos ahora que  $\omega$  es lineal, en efecto,  $(\omega(fX + gY))(p) = w_p(f(p)X_p + g(p)Y_p) = f(p)w_p(X_p) + g(p)w_p(Y_p) = f(p)\omega X(p) + g(p)\omega Y(p) = (f\omega X + g\omega Y)(p)$  para cada  $p \in \text{Dom } w \cap \text{Dom } X \cap \text{Dom } Y$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$  y  $X, Y \in \Xi(M)$ .

Recíprocamente, supongamos que  $\omega$  es un operador lineal con dominio el abierto  $U$ . Para cada  $p \in U$ , se tiene que  $w_p$  es lineal, para verlo supongamos que  $v, \bar{v} \in T_p M$  y que  $V, \bar{V}$  son campos que extienden  $v$  y  $\bar{v}$ , entonces  $w_p(\alpha v + \beta \bar{v}) = (\omega(\alpha V + \beta \bar{V}))(p) = \alpha \omega V(p) + \beta \omega \bar{V}(p) = \alpha w_p(v) + \beta w_p(\bar{v})$ . Finalmente queda probar que  $w$  es diferenciable. Sea  $p \in U = \text{Dom } w$  y sea  $x$  una carta de  $M$  en  $p$  tal que  $\text{Dom } x \subset U$ . Entonces  $w = \sum_1^m \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) dx_i$ . Puesto que para  $i \in \{1, \dots, m\}$  se tiene que  $\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$  es diferenciable, aplicando lema 2.1 se obtiene que  $w$  es diferenciable en  $p$  para cada  $p \in \text{Dom } w$ . Entonces  $w$  es una sección diferenciable.  $\square$

Como consecuencia del resultado anterior utilizaremos la misma letra, digamos  $\omega$ , para denotar el operador lineal y la sección.

**DEFINICIÓN 2.3.** Una  $r$ -forma  $\omega$  con dominio un abierto  $\text{Dom } \omega$  de una variedad  $M$  es una aplicación multilineal (respecto funciones) y alternada de la forma  $\omega: \Xi(M) \times \dots \times \Xi(M) \rightarrow C^\infty(M)$  verificando que  $\text{Dom}(\omega(X_1, \dots, X_r)) = \text{Dom } \omega \cap \text{Dom } X_1 \cap \dots \cap \text{Dom } X_r$ . Se toman como 0-formas las funciones diferenciables  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotemos por  $\Omega^r(M)$  el espacio de las  $r$ -formas de  $M$  y por  $\Omega_U^r(M)$  el espacio de las  $r$ -formas con dominio un abierto  $U$ . En particular  $\Omega_M^r(M)$  es el espacio de las  $r$ -formas globales de  $M$ .

Dada una  $r$ -forma  $\omega$  de una variedad  $M$ , su *diferencial* como la  $(r+1)$ -forma  $d\omega$  definida por

$$d\omega(X_0, \dots, X_r) = \frac{1}{r+1} \sum_0^r (-1)^i X_i \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_r)$$

$$+ \frac{1}{r+1} \sum_{0 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_r)$$

Dada una  $r$ -forma  $\theta$  con dominio  $\text{Dom } \theta$  y un abierto  $U$  de la variedad se tiene que la restricción  $\theta|_U$  se define a través de la siguiente fórmula

$$\theta|_U(X_1, \dots, X_r) = \theta(X_1, \dots, X_r)|_U$$

Es fácil ver que la restricción de  $r$ -formas verifica las siguientes propiedades:

PROPOSICIÓN 2.4. Sea  $M$  una variedad y  $\omega$  una  $r$ -forma,

- (i) Si  $X_1, \dots, X_r$  son campos tangentes a  $M$ , entonces  $\theta|_U(X_1, \dots, X_r) = \theta(X_1|_U, \dots, X_r|_U)$ .
- (ii) Si  $\omega|_U = 0$  para cada abierto  $U$  de un cubrimiento de la variedad, entonces  $\omega = 0$ ,
- (iii) Si  $U$  es un abierto, entonces  $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$ .

PROPOSICIÓN 2.5. El operador  $d$  verifica para cualquier  $r$ -forma la ecuación  $dd\omega = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Veamos que  $dd\omega|_{\text{Dom } \omega} = 0$  para cada dominio de carta. Esto implica que  $dd\omega = 0$ . Nótese que si  $X_0 = \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_0}}\right), \dots, X_{r+1} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}}\right)$ , son los campos coordenados se tiene que el corchete de Lie de dos de ellos es nulo, entonces

$$\begin{aligned} dd\omega(X_0, \dots, X_{r+1}) &= \frac{1}{r+2} \sum_0^{r+1} (-1)^i X_i d\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{r+1}) = \\ &= \frac{1}{r+1} \frac{1}{r+2} \sum_{i < j}^{r+1} (-1)^i (-1)^j (X_j X_i - X_i X_j) \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{r+1}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

DEFINICIÓN 2.4. Una  $r$ -forma  $\omega$  se dice que es *cerrada* si  $d\omega = 0$ . Una  $r$ -forma  $\varepsilon$  se dice que es *exacta* si existe una  $(r-1)$ -forma  $\theta$  tal que  $d\theta = \varepsilon$ . Sea  $Z_U^r(M) = \{\omega | \omega \text{ } r\text{-forma cerrada con dominio } U\}$  y  $B_U^r(M) = \{\varepsilon | \varepsilon \text{ } r\text{-forma exacta con dominio } U\}$ . El  $r$ -ésimo grupo de cohomología de De Rham de un abierto  $U$  de la variedad  $M$  se define como:

$$H_{DR}^r(U) = Z_U^r(M) / B_U^r(M).$$

En particular se obtienen los grupos de cohomología de De Rham de la variedad  $M$ .

Para cualquier  $r$ -forma  $\omega$  con dominio  $U$  se tiene que  $dd\omega = 0$  por lo que se obtiene el complejo de cocadenas siguiente:

$$0 \rightarrow \Omega_U^0(M) \rightarrow \Omega_U^1(M) \rightarrow \dots \rightarrow \Omega_U^r(M) \rightarrow \dots$$

donde  $\Omega_U^r(M)$  denota las  $r$ -formas de  $M$  con dominio  $U$ , el  $r$ -ésimo grupo de cohomología de De Rham de un abierto  $U$  de la variedad  $M$  es el  $r$ -ésimo grupo de cohomología del complejo de cocadenas anterior.

OBSERVACIÓN 2.2. Si  $M$  es una variedad paracompacta Hausdorff, se tiene que los grupos de cohomología de De Rham son isomorfos a los grupos de cohomología singular con coeficientes enteros

$$H_{DR}^r(U) \cong H_{\text{sing}}(M, \mathbb{Z})$$

Una demostración de este resultado puede verse en [40].

### 3. Variedades paralelizables

Recordemos que asociado a una variedad  $M$  podemos considerar el espacio  $\Xi_M(M)$  de todos los campos globales tangentes a  $M$  que tiene una estructura natural de  $C_M^\infty(M)$ -módulo.

DEFINICIÓN 3.1. Dados  $X^1, \dots, X^r$  campos globales tangentes a  $M$ , diremos que son *linealmente independientes* si  $X_p^1, \dots, X_p^r$  son independientes en  $T_p M$  para cada  $p \in M$ . Una variedad  $M$  de dimensión  $m$  se dice *paralelizable* si existen  $X^1, \dots, X^m$  campos globales e independientes.

PROPOSICIÓN 3.1. Sea  $M$  una variedad, entonces son equivalentes:

- (i)  $M$  es paralelizable,
- (ii) Existe un difeomorfismo de  $TM$  con  $M \times \mathbb{R}^m$  que conmuta con las proyecciones y es lineal en las fibras.

DEMOSTRACIÓN. (i) implica (ii): Supongamos que  $X^1, \dots, X^m$  es una paralelización de  $M$ . Entonces podemos considerar la biyección  $\Theta: M \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM$  definida por  $\Theta(p, (\lambda_1, \dots, \lambda_m)) = \lambda_1 X_p^1 + \dots + \lambda_m X_p^m$ , que además conmuta con las proyecciones y es lineal en las fibras. Si  $x$  es una carta de  $M$  y  $X^j = \sum (X^j x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ , la representación coordenada de  $\Theta$  es la siguiente:

$$\tilde{x}\Theta(x^{-1} \times \text{id}_{\mathbb{R}^m})(r, \lambda) = (r, (\sum \lambda_j (X^j x_1) x^{-1}(r), \dots, \sum \lambda_j (X^j x_m) x^{-1}(r)))$$

De aquí se deduce que  $\det J_{\Theta}^{\tilde{x}, (x \times \text{id})}(p, \lambda) \neq 0$ . Por lo tanto la biyección  $\Theta$  es un difeomorfismo local, ello implica que  $\Theta$  es un difeomorfismo global de  $M \times \mathbb{R}^m$  en  $TM$ .

(ii) implica (i): Es fácil ver que el fibrado  $M \times \mathbb{R}^m$  tiene  $m$  secciones diferenciables independientes, basta considerar  $S^i(p) = (p, (0, \dots, 1^i, \dots, 0))$ . Entonces si  $\Theta$  es el difeomorfismo dado, podemos tomar como paralelización  $\Theta S^1, \dots, \Theta S^m$ .  $\square$

Nótese que si los fibrados  $TM$  y  $M \times \mathbb{R}^m$  son difeomorfos (como fibrados vectoriales), entonces  $\Xi_M(M)$  es isomorfo al módulo de las secciones diferenciables de  $M \times \mathbb{R}^m$ . Una sección  $M \times \mathbb{R}^m$  es de la forma  $S(p) = (p, (f_1(p), \dots, f_m(p)))$  con  $f_1, \dots, f_m: M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables. Esto implica que la correspondencia  $S \rightarrow (f_1, \dots, f_m)$  es un isomorfismo de  $\Xi_M(M)$  en el  $C_M^\infty(M)$ -módulo libre de rango  $m$ ,  $C_M^\infty(M)^m$ .

#### 4. Variedades orientables

Dadas dos bases de un espacio vectorial de dimensión mayor que uno  $e = (e_1, \dots, e_m)$ ,  $e' = (e'_1, \dots, e'_m)$  tal que el cambio de bases viene dado por la matriz  $e'_j = \sum a_j^i e_i$ . Diremos que  $e' \sim e$  si  $\det(a_j^i) > 0$ . Se llama *orientación del espacio vectorial real* a cada una de las dos clases de equivalencia de la relación anterior  $\theta(e_1, e_2, \dots, e_m)$ ,  $\theta(-e_1, e_2, \dots, e_m)$ .

**DEFINICIÓN 4.1.** Una *orientación* de una variedad  $M$  es una sección que asigna a cada  $p \in M$  una orientación  $\theta_p$  del espacio vectorial  $T_p M$  de tal modo que para cada  $p \in M$  existen  $m$  campos independientes  $X^1, \dots, X^m$  definidos en un entorno abierto  $U$  de  $p$  de modo que  $\theta_q = \theta(X_q^1, \dots, X_q^m)$  para cada  $q \in U$ . Una variedad se dice *orientable* si admite una orientación. Una variedad provista de una orientación se dice que es una *variedad orientada*.

**PROPOSICIÓN 4.1.** Sea  $\theta$  una orientación en una variedad  $M$  y  $\theta'$  una orientación en un abierto conexo  $U$ . Entonces  $\theta' = \theta|_U$  o  $\theta' = -\theta|_U$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sean los subconjuntos  $U^+ = \{p \in U | \theta_p = \theta'_p\}$  y  $U^- = \{p \in U | \theta_p = -\theta'_p\}$ . Si  $p \in U^+$ , entonces existen paralelizaciones  $X^1, \dots, X^m$  y  $X'^1, \dots, X'^m$  que determinan las orientaciones  $\theta$  y  $\theta'$  en un entorno abierto  $V$  del punto  $p$  contenido en  $U$ . Para cada  $q \in V$  se tiene que  $X_q^i = \sum a_i^j(q) X_q'^j$  de modo que cada  $a_i^j$  es un función diferenciable con dominio  $V$ . Nótese que  $\det(a_i^j(p)) > 0$ , y por ser  $\det(a_i^j)$  una función continua, existe un entorno abierto  $W$  de  $p$  contenido en  $V$  tal que  $\det(a_i^j(q)) > 0$  para cada  $q \in W$ . Entonces  $p \in W \subset U^+$ , esto sucede para cada punto de  $U^+$ . Por lo que  $U^+$  es un abierto de  $M$ . Similarmente se prueba que  $U^-$  es abierto. Aplicado que  $U$  es conexo se tiene que  $U = U^+$  o  $U = U^-$ . Consecuentemente  $\theta' = \theta|_U$  o  $\theta' = -\theta|_U$ .  $\square$

**COROLARIO 4.1.** Una variedad orientable y conexa admite dos orientaciones.

**PROPOSICIÓN 4.2.** Sean  $x, y$  un atlas de una variedad orientable  $M$  con dominios conexos, entonces  $\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)$  tiene signo constante en  $\text{Dom } x \cap \text{Dom } y$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Teniendo en cuenta que  $\text{Dom } x$  es conexo y que  $M$  es orientable se puede aplicar la proposición 4.1 para afirmar que existe una orientación  $\theta$  en  $M$  compatible con la parametrización  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ . Por otro lado la parametrización  $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}$  induce una orientación  $\theta'$  en el dominio de la carta  $y$ . Al ser este conexo, de la proposición 4.1 se infiere que  $\theta' = \theta|_{\text{Dom } y}$  o  $\theta' = -\theta|_{\text{Dom } y}$ , en el primer caso  $\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)$  es positivo en  $\text{Dom } x \cap \text{Dom } y$  y en el otro caso negativo.  $\square$

COROLARIO 4.2. La banda de Moebius no es orientable.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la banda de Moebius como el espacio cociente  $M = \mathbb{R}^2 / (r, s) \sim (r + z, (-1)^z s)$  con  $z$  entero. Sea  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  la proyección canónica. Tomemos el atlas de dos cartas  $x = (p|_{(0,1) \times \mathbb{R}})^{-1}$ ,  $y = (p|_{(1/2, 3/2) \times \mathbb{R}})^{-1}$  que tienen dominio conexo. El cambio de cartas viene dado por

$$yx^{-1}(r, s) = (r + 1, -s) \text{ si } 0 < r < 1/2 ,$$

$$yx^{-1}(r, s) = (r, s) \text{ si } 1/2 < r < 1 .$$

Entonces  $\det \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{(r,s)}$  vale 1 para  $0 < r < 1/2$  y vale  $-1$  para  $1/2 < r < 1$ . Si suponemos que  $M$  es orientable, entonces la proposición anterior implica que el signo de  $\det \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{(r,s)}$  debe ser constante. En consecuencia  $M$  no es orientable.  $\square$

PROPOSICIÓN 4.3. Sea  $\phi: M \rightarrow N$  un difeomorfismo local con dominio  $M$ . Si  $\theta$  es una orientación en  $N$ , entonces  $\phi$  induce de modo natural una orientación  $\phi^*\theta$  en  $M$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $l: V \rightarrow W$  un isomorfismo de espacios vectoriales. Si una orientación  $\theta$  de  $W$  está determinada por una base  $(b_1, \dots, b_m)$ , entonces  $(l^{-1}b_1, \dots, l^{-1}b_m)$  es una base de  $V$  que determina una orientación  $l^*\theta$  en  $V$ . Ahora puesto que  $\phi$  es un difeomorfismo local se tiene que para  $p \in M$ ,  $T_p\phi$  determina una orientación  $(T_p\phi)^*\theta_{\phi p}$  en  $T_pM$ . Sea  $U$  un entorno abierto de  $p$  tal que  $\phi|_U$  es un difeomorfismo. Si  $Y^1, \dots, Y^m$  es una paralelización de  $\theta$  en  $\phi U$ , entonces  $(T\phi|_U)^{-1}Y^1\phi|_U, \dots, (T\phi|_U)^{-1}Y^m\phi|_U$  es una paralelización para  $(T_p\phi)^*\theta_{\phi p}$  con  $p \in U$ . Luego  $(\phi^*\theta)_p = (T_p\phi)^*\theta_{\phi p}$ ,  $p \in M$  define una orientación en  $M$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 4.4. Sean  $\phi: M \rightarrow N$ ,  $\psi: N \rightarrow P$  difeomorfismo local con dominios  $M$  y  $N$ , respectivamente. Si  $\theta$  es una orientación en  $P$ , entonces  $\phi^*\psi^*\theta = (\psi\phi)^*\theta$ .

DEMOSTRACIÓN. Para cada punto  $a \in M$  se tiene que  $T_a(\psi\phi) = (T_{\phi(a)}\psi)(T_a\phi)$ . Además por ser difeomorfismos locales, si  $w \in T_{\psi\phi(a)}P$  entonces obtenemos que  $(T_a\phi)^{-1}(T_{\phi(a)}\psi)^{-1}(w) = (T_a(\psi\phi))^{-1}(w)$ . De la definición de orientación inducida por un difeomorfismo local inmediatamente se sigue que  $\phi^*\psi^*\theta = (\psi\phi)^*\theta$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 4.5. Sea  $G$  un grupo discontinuo de transformaciones de  $M$ . Entonces  $G \backslash M$  es orientable si y sólo si existe una orientación  $\theta$  en  $M$  que es preservada por cada transformación del grupo.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\eta: M \rightarrow G \backslash M$  la proyección canónica que es un difeomorfismo local. Denotaremos por  $\bar{\phi}_g$  la transformación asociada al elemento  $g \in G$ . Supongamos que  $G \backslash M$  es orientable y

sea  $\theta$  una orientación. Tomemos en  $M$  la orientación  $\eta^*\theta$ . Para cada  $g \in G$  la transformación  $\bar{\phi}_g$  verifica que  $\eta\bar{\phi}_g = \eta$ . Aplicando la proposición anterior se tiene que  $\bar{\phi}_g^*\eta^*\theta = \eta^*\theta$ . Luego la orientación inducida es preservada por las transformaciones del grupo. Recíprocamente, supongamos que en  $M$  disponemos de una orientación  $\varepsilon$ . Sea  $b \in G \setminus M$ , tomemos  $a \in M$  tal que  $\eta(a) = b$ . Si la orientación  $\varepsilon_a$  está determinada por la base  $(e_1, \dots, e_m)$  y  $T_a\eta$  es la aplicación tangente, que es un isomorfismo, entonces  $(T_a\eta(e_1), \dots, T_a\eta(e_m))$  es una base que determina una orientación en  $T_b(G \setminus M)$ . Si hubiéramos tomado otro  $a' \in M$  verificando  $\eta(a') = b$ , entonces existiría un  $g \in G$  tal que  $\bar{\phi}_g(a) = a'$ . Supongamos que  $\varepsilon_{a'}$  está determinada por la base  $(e'_1, \dots, e'_m)$ , puesto que  $\bar{\phi}_g^*\varepsilon = \varepsilon$ , si  $(T_a\bar{\phi}_g)^{-1}(e'_j) = \sum \alpha_j^i e_i$  con  $\det(\alpha_j^i) > 0$ . Entonces se tiene que  $(T_{a'}\eta(e'_j)) = \sum \alpha_j^i T_a\eta(e_i)$ . En consecuencia  $(T_a\eta(e_1), \dots, T_a\eta(e_m))$  y  $(T_{a'}\eta(e'_1), \dots, T_{a'}\eta(e'_m))$  determinan la misma orientación en  $b$ . Finalmente observemos que existe un entorno abierto  $U$  de  $a$  y una paralelización  $X^1, \dots, X^m$  definida en  $U$  tal que  $\varepsilon$  es compatible con  $X^1, \dots, X^m$ ,  $\eta|_U$  es un difeomorfismo. Entonces  $(\eta|_U)^{-1}X^1(T(\eta|_U)), \dots, (\eta|_U)^{-1}X^m(T(\eta|_U))$  es una paralelización de  $\theta$  en  $\eta U$  entorno abierto de  $b$ .  $\square$

**EJEMPLO 4.1.** La 1-esfera  $S^1$  se puede obtener como la variedad de las órbitas del grupo de traslaciones enteras  $\phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por la acción  $\phi(z, r) = z + r$ . Nótese que la orientación inducida por la paralelización canónica  $\frac{d}{dt}$  es invariante por traslaciones. Entonces, la proposición anterior implica que  $S^1$  es orientable.

Para ver que las demás esferas  $S^n$ ,  $n \geq 2$  son orientables, es suficiente aplicar el siguiente resultado al atlas estereográfico.

**PROPOSICIÓN 4.6.** Si una variedad  $M$  admite un atlas de dos cartas  $x, y$  de modo que  $\text{Dom } x \cap \text{Dom } y$  es conexo, entonces  $M$  es orientable.

**DEMOSTRACIÓN.** La carta  $x$  induce una orientación  $\theta$  en su dominio, y respectivamente una orientación  $\tau$  es inducida por  $y$ . En la intersección conexa  $\text{Dom } x \cap \text{Dom } Y$  se tiene que  $\theta|_{\text{Dom } y} = \tau|_{\text{Dom } x} \circ \theta|_{\text{Dom } x} = -\tau|_{\text{Dom } y}$ . En el primer caso,  $\theta \cup \tau$  define una orientación en  $M$  y en el segundo  $\theta \cup -\tau$ .  $\square$

**COROLARIO 4.3.** La espacio proyectivo  $P^n(\mathbb{R})$  es orientable si y sólo si  $n$  es impar.

**DEMOSTRACIÓN.** El espacio proyectivo  $P^n(\mathbb{R})$  es el espacio de órbitas de la acción del cíclico de orden dos generado por la aplicación antípoda  $a$  de  $S^{n+1}$ . Si  $\theta$  es una de las dos orientaciones de  $S^{n+1}$ , entonces por la proposición 4.1, se tiene que  $a^*\theta = \theta$  o  $a^*\theta = -\theta$ . Para determinar se se verifica una u otra bastara ver que ocurre en un punto. Si tomamos la carta  $x$  de la proyección estereográfica sucede

que el punto  $E = (1, 0, \dots, 0)$  y  $-E$  están en  $\text{Dom } x$ , entonces

$$x_1 = \frac{s_1}{1 - s_{n+1}}, \dots, x_n = \frac{s_n}{1 - s_{n+1}}$$

$$xa(s_1, \dots, s_{n+1}) = x(-s_1, \dots, -s_{n+1}) = \left( \frac{-s_1}{1 + s_{n+1}}, \dots, \frac{-s_n}{1 + s_{n+1}} \right).$$

Notemos que

$$(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 = \frac{1 - s_{n+1}^2}{(1 - s_{n+1})^2} = \frac{1 + s_{n+1}}{(1 - s_{n+1})} = \frac{-x_i a}{x_i}.$$

De donde se tiene que

$$x_i a = \frac{-x_i}{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}.$$

Calculando las derivadas parciales se obtiene:

$$\frac{\partial(x_i a)}{\partial x_j} = \frac{-\delta_{ij}((x_1)^2 + \dots + (x_n)^2) + 2x_i x_j}{((x_1)^2 + \dots + (x_n)^2)^2}$$

De donde

$$\left( \frac{\partial(x_i a)}{\partial x_j} \right)_E = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j = 1, \\ -1 & \text{if } i = j > 1, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En consecuencia se tiene que  $a^* \theta = (-1)^{n-1} \theta$ . Luego  $a$  preserva la orientación si y sólo si  $n$  es impar. Aplicando la proposición anterior se tiene que  $\mathbb{R}P^n$  es orientable si y sólo si  $n$  es impar.  $\square$

**PROPOSICIÓN 4.7.** Si  $\theta$  es una orientación en  $M$ , entonces existe un atlas compatible con  $\theta$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Tomemos un atlas con dominios conexos y en caso que una carta no sea compatible se le cambia una coordenada de signo.  $\square$

## 5. Curvas integrales

Una curva es una función diferenciable  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow M$ . Sea  $X$  un campo de vectores tangentes. Se dice que  $\sigma$  es una *curva integral* de  $X$  si para cada  $s \in \sigma^{-1} \text{Dom } X$  se tiene que  $T_s \sigma \left( \frac{d}{dt} \right)_s = X_{\sigma(s)}$ .

Sea  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  una carta y sea  $c = x \circ \sigma$ . Si  $\sigma$  es una curva integral de  $X$  en el dominio de la carta, entonces para cada  $s \in \sigma^{-1} \text{Dom } X \cap \text{Dom } x$  se tiene que por un lado

$$\begin{aligned} \sigma_* \left( \frac{d}{dt} \right) &= \left( \sigma_* \frac{d}{dt} \right) x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \left( \sigma_* \frac{d}{dt} \right) x_m \frac{\partial}{\partial x_m} \\ &= \left( \frac{d(x_1 \sigma)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \left( \frac{d(x_m \sigma)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_m} \\ &= \left( \frac{dc_1}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \left( \frac{dc_m}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_m} \end{aligned}$$

y, por otro, si suponemos que  $X = \sum_i^m \tilde{f}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Para cada punto de la curva se tiene que

$$X_\sigma = \tilde{f}_1 \sigma \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \tilde{f}_m \sigma \frac{\partial}{\partial x_m} = \tilde{f}_1 x^{-1} x \sigma \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \tilde{f}_m x^{-1} x \sigma \frac{\partial}{\partial x_m}$$

Entonces  $\sigma$  es curva integral en el dominio de la carta si y sólo si  $c = x\sigma$  y  $f_i = \tilde{f}_i x^{-1}$  satisfacen las ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{dt} &= f_1(c_1, \dots, c_m) \\ &\vdots \\ \frac{dc_m}{dt} &= f_m(c_1, \dots, c_m) \end{aligned}$$

Es decir si y sólo si  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una solución de la del sistema de ecuaciones diferenciales de primer grado anterior.

Recordemos que

**PROPOSICIÓN 5.1.** Sea  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función  $C^\infty$ ,  $a \in \text{Dom } f$ . Entonces existe un entorno abierto  $V$  de  $a$  en  $\text{Dom } f$  y un  $\varepsilon > 0$  tales que para cada  $t_0$  en  $\mathbb{R}$  y cada  $r \in V$  existe una única curva  $c^r$  tal que  $\text{Dom } c^r = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ ,  $c^r(t_0) = r$  y

$$\begin{aligned} \frac{dc_1^r}{dt} &= f_1(c_1^r, \dots, c_m^r) \\ &\vdots \\ \frac{dc_m^r}{dt} &= f_m(c_1^r, \dots, c_m^r) \end{aligned}$$

Además la función  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(s, r) \rightarrow c^r(s)$  es  $C^\infty$ .

Una demostración detallada y no demasiado larga puede verse en [?]. Como consecuencia del teorema de existencia y unicidad anterior se obtiene el siguiente resultado:

**PROPOSICIÓN 5.2.** Sea  $X$  un campo de vectores tangentes a una variedad  $M$ ,  $p \in \text{Dom } X$ . Entonces existe un entorno abierto  $U$  de  $p$  en  $\text{Dom } X$  y un  $\varepsilon > 0$  tales que para cada  $t_0$  en  $\mathbb{R}$  y cada  $q \in U$  existe una única curva  $\sigma_q$  tal que  $\text{Dom } \sigma_q = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ ,  $\sigma_q(t_0) = q$  y  $\sigma_{*s} \left( \frac{d}{dt} \right)_s = X_{\sigma(s)}$ . Es decir que  $\sigma_q$  es una curva integral de  $X$ . Además la función  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times U \rightarrow M$ ,  $(s, q) \rightarrow \sigma_q(s)$  es diferenciable.

**DEFINICIÓN 5.1.** Una curva integral  $\sigma$  se dice *completa* si  $\text{Dom } \sigma = \mathbb{R}$ . Un campo se dice *completo* si todas sus curvas integrales son completas.

**PROPOSICIÓN 5.3.** Los campos de una variedad compacta son completos.

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $X$  un campo en una variedad compacta  $M$  para cada  $p \in M$  existe un entorno abierto  $U$  y un  $\varepsilon > 0$  satisfaciendo las propiedades de la proposición anterior. Estos abiertos forman un cubrimiento abierto de  $M$  y por ser  $M$  compacta se puede extraer un subcubrimiento finito  $U_1, \dots, U_n$  que tiene asociados los

reales  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ . Tomemos  $\delta = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ . Veamos que  $X$  es completo, sea  $\sigma: (a, b) \rightarrow M$  una curva integral con dominio conexo  $(a, b)$  veamos que siempre se puede extender el dominio a un nuevo intervalo  $(a - \frac{\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2})$ . Si para el punto  $\sigma(b - \frac{\delta}{2})$  aplicamos la proposición anterior tomando  $t_0 = b - \frac{\delta}{2}$ , encontramos una nueva curva integral  $\sigma^{\sigma(b - \frac{\delta}{2})}: (b - \frac{3\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2}) \rightarrow M$ . Por la unicidad probada en la proposición anterior tenemos que  $\sigma|_{(b - \frac{3\delta}{2}, b)} = \sigma^{\sigma(b - \frac{\delta}{2})}|_{(b - \frac{3\delta}{2}, b)}$ . De aquí se sigue que  $\sigma$  admite una extensión diferenciable a  $(a, b + \frac{\delta}{2})$ . De modo análogo se puede extender a  $(a - \frac{\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2})$ . Esto implica que la curva integral  $\sigma$  se puede extender a  $(-\infty, +\infty)$  ya que en caso contrario, el dominio abierto conexo de la extensión maximal sería de la forma  $(a', b')$ , y podríamos aplicar de nuevo el argumento anterior para llegar a ver que la extensión considerada no era la maximal.  $\square$

El siguiente resultado relaciona las curvas integrales de campos con los sistemas dinámicos diferenciables que hemos visto en la sección ?? del capítulo anterior:

**PROPOSICIÓN 5.4.** Sea  $X$  un campo completo en una variedad diferenciable  $M$  y denotemos por  $\sigma^p: \mathbb{R} \rightarrow M$  a la única curva integral de campo tal que  $\sigma^p(0) = p$  y  $(\frac{d\sigma^p}{dt})_0 = X_p$ . Entonces la aplicación  $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  definida por  $\phi(t, p) = \sigma^p(t)$  es un sistema dinámico diferenciable.

**DEMOSTRACIÓN.** Veamos las propiedades que verifica  $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ . Para cada  $p \in M$  se tiene que  $\phi(0, p) = \sigma^p(0) = p$ . Sea la traslación  $\lambda_s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\lambda_s(t) = t + s$ . Notemos que

$$\begin{aligned}\phi(t + s, p) &= \sigma^p(t + s) = \sigma^p \lambda_s(t) \\ \phi(t, \phi(s, p)) &= \sigma^{\phi(s, p)}(t) = \sigma^{\sigma^p(s)}(t).\end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\frac{d(\sigma^p \lambda_s)}{dt} = \left( \frac{d\sigma^p}{dt} \right)_{\lambda_s} = X_{\sigma^p \lambda_s}$$

por lo que  $\sigma^p \lambda_s$  es curva integral del campo. En cuanto a las condiciones iniciales se verifica

$$\sigma^p \lambda_s(0) = \sigma^p(s), \quad \sigma^{\sigma^p(s)}(0) = \sigma^p(s)$$

y además

$$\begin{aligned}\left( \frac{d(\sigma^p \lambda_s)}{dt} \right)_0 &= X_{\sigma^p(s)}, \\ \left( \frac{d\sigma^{\sigma^p(s)}}{dt} \right)_0 &= X_{\sigma^p(s)}\end{aligned}$$

Aplicando las propiedad de unicidad se obtiene que  $\sigma^p \lambda_s = \sigma^{\sigma^p(s)}$ . Luego  $\sigma^p \lambda_s(t) = \sigma^{\sigma^p(s)}(t)$ . Por lo tanto  $\phi(t + s, p) = \phi(t, \phi(s, p))$ . Por

otro lado, por las propiedades que se desprenden del teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales se obtiene también que  $\phi$  es diferenciable.

□



## VARIETADES Y CONEXIONES RIEMANNIANAS

### 1. Conexiones y derivada covariante

Sea  $\Xi(M, p)$  el conjunto de todos los campos tangentes de una variedad  $M$  definidos en el punto  $p \in M$ . Una *conexión lineal en un punto  $p$*  es un operador lineal que asocia a cada vector tangente  $v$  en  $p$  y a cada campo tangente  $X$  definido en  $p$  un vector tangente en  $p$  que se denotará por  $\nabla_v X$  y que verifica las siguientes propiedades:

- (C1)  $\nabla_v(\alpha X + \beta Y) = \alpha \nabla_v X + \beta \nabla_v Y$   
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad v \in T_p M, \quad X, Y \in \Xi(M, p),$
- (C2)  $\nabla_{au+bv} X = a \nabla_u X + b \nabla_v X$   
 $a, b \in \mathbb{R}, \quad u, v \in T_p M, \quad X \in \Xi(M, p),$
- (C3)  $\nabla_v f X = v(f) X_p + f(p) \nabla_v X \quad f \in C_p^\infty(M, p), \quad X \in \Xi(M, p).$

**PROPOSICIÓN 1.1.** Si  $v \in T_p M$  y  $X, Y \in \Xi(M, p)$  tal que en un entorno abierto  $U$  de  $p$  se tiene que  $X|_U = Y|_U$ , entonces  $\nabla_v X = \nabla_v Y$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Nótese que  $\text{Dom}(X - X|_U) = U$  y que  $X - X|_U = 0|_U = 0(0|_U)$ . Entonces  $\nabla_v(X - X|_U) = \nabla_v(0|_U) = \nabla_v(0(0|_U)) = 0 \nabla_v(0|_U) = 0$ . Por lo tanto  $\nabla_v(X) = \nabla_v(X|_U)$ . Análogamente se obtiene que  $\nabla_v Y = \nabla_v(Y|_U)$ . Entonces  $\nabla_v X = \nabla_v Y$ .  $\square$

Si tenemos una conexión lineal para cada punto  $p \in M$  y  $V, X$  son campos tangentes a una variedad  $M$  se puede definir la sección del fibrado tangente  $\nabla_V X$ , cuyo dominio es  $\text{Dom } V \cap \text{Dom } X$ , y está definida por  $(\nabla_V X)_p = \nabla_{V_p} X$ .

**DEFINICIÓN 1.1.** Llamaremos una *conexión lineal* sobre una variedad  $M$  a una familia que se obtiene tomando una conexión lineal en cada punto  $p$  de  $M$ , de tal modo que si  $V, X$  son campos tangentes a  $M$ , entonces la sección del fibrado tangente  $\nabla_V X$  es diferenciable.

**DEFINICIÓN 1.2.** Sea  $x$  la carta identidad de  $\mathbb{R}^m$ . Dados  $p \in \mathbb{R}^m$ ,  $v \in T_p \mathbb{R}^m$  y un campo  $X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  definido en  $p$ . Entonces se define  $\bar{\nabla}_v X = v(f_1) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \cdots + v(f_m) \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p$ . Nótese que si tenemos campos  $V$  y  $X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , entonces  $\bar{\nabla}_V X = (V f_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (V f_m) \frac{\partial}{\partial x_m}$ .

**PROPOSICIÓN 1.2.** El operador  $\bar{\nabla}$  definido en  $\mathbb{R}^m$  es una conexión lineal.

DEMOSTRACIÓN. Dados  $p \in \mathbb{R}^m$ ,  $v \in T_p\mathbb{R}^m$ , campos  $X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $Y = \sum_i g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  definidos en  $p$  y escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Entonces  $\bar{\nabla}_v(\alpha X + \beta Y) = v(\alpha f_1 + \beta g_1) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + \cdots + v(\alpha f_m + \beta g_m) \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p = \alpha v(f_1) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + \cdots + \alpha v(f_m) \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p + \beta v(g_1) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + \cdots + \beta v(g_m) \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p = \alpha \bar{\nabla}_v(X) + \beta \bar{\nabla}_v(Y)$ . Con esto queda verificada la propiedad **C1**. De modo rutinario se comprueba que se verifican el resto de las propiedades.  $\square$

PROPOSICIÓN 1.3. El operador  $\nabla$  que asocia a dos campos tangentes  $V$  y  $X$  el campo tangente  $\nabla_V X$ , verifica las siguientes propiedades:

- (CL1)  $\nabla_V(\alpha X + \beta Y) = \alpha \nabla_V X + \beta \nabla_V Y$   
 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad V, X, Y \in \Xi(M)$ ,
- (CL2)  $\nabla_{aU+bV} X = a \nabla_U X + b \nabla_V X$   
 $a, b \in \mathbb{R}, \quad U, V, X \in \Xi(M)$ ,
- (CL3)  $\nabla_V fX = VfX + f \nabla_V X \quad f \in C^\infty(M), \quad V, X \in \Xi(M)$ .

DEMOSTRACIÓN. CL1) Para un punto  $p \in M$  que este en el dominio se tiene  $(\nabla_V(\alpha X + \beta Y))_p = \nabla_{V_p}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \nabla_{V_p} X + \beta \nabla_{V_p} Y = (\alpha \nabla_V X + \beta \nabla_V Y)_p$ . Por lo tanto  $\nabla_V(\alpha X + \beta Y) = \alpha \nabla_V X + \beta \nabla_V Y$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad V, X, Y \in \Xi(M)$ .

CL2) Para cada  $p$  en el dominio de definición se tiene que  $(\nabla_{aU+bV} X)_p = \nabla_{aU_p+bV_p} X = a \nabla_{U_p} X + b \nabla_{V_p} X = (a \nabla_U X + b \nabla_V X)_p$ . Consecuentemente  $\nabla_{aU+bV} X = a \nabla_U X + b \nabla_V X \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad U, V, X \in \Xi(M)$ .

CL3) Para cada  $p$  en el dominio de definición se tiene que  $(\nabla_V fX)_p = \nabla_{V_p} fX = (V_p f)X_p + f(p) \nabla_{V_p} X = (VfX + f \nabla_V X)_p$ . Por lo tanto  $\nabla_V fX = VfX + f \nabla_V X \quad f \in C^\infty(M), \quad V, X \in \Xi(M)$ .  $\square$

Sea  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow M$  una curva (diferenciable). Un *campo tangente a  $M$  a lo largo de  $\sigma$*  es una función diferenciable  $X: \mathbb{R} \rightarrow TM$  tal que  $\pi X = \sigma$ . Uno de estos campos es precisamente el campo *velocidad* de la curva  $\dot{\sigma}$  que se define del modo siguiente:  $\dot{\sigma}(s) = T_s \sigma \left( \frac{d}{dt} \right)_s$ . Nótese que los campos tangentes a  $M$  a lo largo de  $\sigma$  tienen estructura natural de espacio vectorial real y también de módulo sobre el anillo de funciones  $C_{\text{Dom } \sigma}^\infty(\mathbb{R})$ .

Si  $M$  tiene una conexión  $\nabla$  entonces para cada  $s \in \text{Dom } \sigma$  se puede definir un operador lineal  $D_{\dot{\sigma}(s)}$  que asocia a cada campo  $X$  tangente a  $M$  a lo largo de  $\sigma$  un vector tangente a  $M$  en el punto  $\sigma(s)$ . Supongamos que  $X^1, \dots, X^m$  es una paralelización definida en un entorno abierto de  $\sigma(s)$ . El campo  $X$  se puede expresar de modo único como  $X(t) = \sum_i A_i(t) X_{\sigma(t)}^i$ . Entonces definimos

$$D_{\dot{\sigma}(s)} X = \sum_i \left( \left( \frac{dA_i}{dt} \right)_s X_{\sigma(s)}^i + A_i(s) \nabla_{\dot{\sigma}(s)} X^i \right)$$

LEMA 1.1. El operador  $D_{\dot{\sigma}(s)}$  es independiente de la paralelización elegida.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $X^1, \dots, X^m$  e  $Y^1, \dots, Y^m$  son paralelizaciones definidas en un entorno abierto de  $\sigma(s)$ . El campo  $X$  se puede expresar como  $X(t) = \sum_i A_i(t)X_{\sigma(t)}^i$  o bien  $X(t) = \sum_i B_i(t)Y_{\sigma(t)}^i$ . Supongamos que  $X^i = \sum_j a_j^i Y^j$ . Entonces  $X = \sum_i A_i X_{\sigma}^i = \sum_i A_i \sum_j (a_j^i \sigma) Y_{\sigma^j} = \sum_j (\sum_i A_i (a_j^i \sigma)) Y_{\sigma^j}$ . De aquí se deduce que  $B_j = \sum_i A_i (a_j^i \sigma)$ . Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
& \sum_j \left( \left( \frac{dB_j}{dt} \right)_s Y_{\sigma(s)}^j + B_j(s) \nabla_{\dot{\sigma}(s)} Y^j \right) \\
&= \sum_j \left( \left( \frac{d(\sum_i A_i (a_j^i \sigma))}{dt} \right)_s Y_{\sigma(s)}^j + \sum_i A_i(s) a_j^i(\sigma(s)) \nabla_{\dot{\sigma}(s)} Y^j \right) \\
&= \sum_j \left( \sum_i \left( \frac{dA_i}{dt} (a_j^i \sigma) + A_i \frac{d(a_j^i \sigma)}{dt} \right)_s Y_{\sigma(s)}^j + \sum_j \sum_i A_i(s) a_j^i(\sigma(s)) \nabla_{\dot{\sigma}(s)} Y^j \right) \\
&= \sum_i \sum_j \left[ \left( \frac{dA_i}{dt} \right)_s a_j^i(\sigma(s)) Y_{\sigma(s)}^j + A_i(s) \left( \frac{d(a_j^i \sigma)}{dt} \right)_s Y_{\sigma(s)}^j \right] \\
&+ \sum_i \sum_j \left[ A_i(s) a_j^i(\sigma(s)) \nabla_{\dot{\sigma}(s)} Y^j \right] \\
&= \sum_i \left[ \left( \frac{dA_i}{dt} \right)_s \sum_j a_j^i(\sigma(s)) Y_{\sigma(s)}^j + A_i(s) \sum_j \left( \frac{d(a_j^i \sigma)}{dt} \right)_s Y_{\sigma(s)}^j \right] \\
&+ \sum_i \left[ A_i(s) \sum_j a_j^i(\sigma(s)) \nabla_{\dot{\sigma}(s)} Y^j \right] \\
&= \sum_i \left( \frac{dA_i}{dt} \right)_s X_{\sigma(s)}^i + \sum_i A_i(s) \nabla_{\dot{\sigma}(s)} \sum_j a_j^i Y^j \\
&= \sum_i \left( \left( \frac{dA_i}{dt} \right)_s X_{\sigma(s)}^i + A_i(s) \nabla_{\dot{\sigma}(s)} X^i \right)
\end{aligned}$$

□

Nótese que si  $X$  es un campo tangente a  $M$  a lo largo de  $\sigma$ , el operador anterior permite definir un nuevo campo  $D_{\dot{\sigma}}X$  tangente a  $M$  a lo largo de  $\sigma$ , mediante la fórmula  $(D_{\dot{\sigma}}X)(s) = D_{\dot{\sigma}(s)}X$ .

DEFINICIÓN 1.3. Si  $V$  e  $Y$  son campos tangentes a una variedad  $M$  con una conexión lineal  $\nabla$  diremos que  $\nabla_V Y$  es la *derivada covariante de  $Y$  según el campo  $V$* . Si  $X$  es un campo tangente a  $M$  a lo largo de una curva  $\sigma$  diremos que  $D_{\dot{\sigma}}X$  es la *derivada covariante de  $X$* .

Sea  $x$  es una carta en  $\sigma(s)$  y consideremos la paralelización  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ , entonces si el campo  $X$  tangente a  $M$  a lo largo de  $\sigma$  se expresa como  $X = \sum_i A_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_\sigma$  se tiene que en el dominio de la carta se verifica

$$D_{\dot{\sigma}}X = \sum_i \left( \frac{dA_i}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_\sigma + A_i \nabla_{\dot{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

LEMA 1.2. Sea  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow M$  una curva y sea  $Y$  un campo tangente a  $M$  que induce un campo  $X = Y\sigma$  tangente a  $M$  a lo largo de  $M$ . Entonces  $D_{\dot{\sigma}}X = \nabla_{\dot{\sigma}}Y$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $Y^1, \dots, Y^m$  es una paralelización definida en un entorno abierto  $U$  de  $\sigma(s)$ . Si el campo  $Y$  verifica que  $Y|_U = \sum_i A_i Y^i$ . La parte del campo  $X$  que es tangente dentro de ese entorno se puede expresar como  $X(t) = \sum_i A_i \sigma(t) Y_{\sigma(t)}^i$ . Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
D_{\dot{\sigma}(s)}X &= \sum_i \left( \left( \frac{d(A_i\sigma)}{dt} \right)_s Y_{\sigma(s)}^i + A_i\sigma(s)\nabla_{\dot{\sigma}(s)}Y^i \right) \\
&= \sum_i \left( (\dot{\sigma}(s)(A_i))Y_{\sigma(s)}^i + A_i(\sigma(s))\nabla_{\dot{\sigma}(s)}Y^i \right) \quad \square \\
&= \nabla_{\dot{\sigma}(s)}(\sum_i A_iY^i) \\
&= \nabla_{\dot{\sigma}(s)}Y
\end{aligned}$$

COROLARIO 1.1. Sea  $v$  un vector tangente a  $M$  en un punto  $p$  y sean  $X, X'$  campos definidos en  $p$ . Si existe una curva  $\sigma$  que pase por  $p$  a velocidad  $v$  de modo que  $X\sigma = X'\sigma$ , entonces  $\nabla_v X = \nabla_v X'$ .

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior se tiene que  $\nabla_v X = \nabla_{\dot{\sigma}(s)}X = D_{\dot{\sigma}(s)}(X\sigma) = D_{\dot{\sigma}(s)}(X'\sigma) = \nabla_{\dot{\sigma}(s)}X' = \nabla_v X'$ .  $\square$

Dada  $x$  una carta de  $M$ , si consideramos la paralelización local  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ , entonces la conexión  $\nabla$  determina la funciones  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k: M \rightarrow \mathbb{R}$  mediante la expresión:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Si denotaremos por  $\Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k x^{-1}$  la representación coordenada de en la carta  $x$ , entonces las derivadas covariantes de los campos coordenados también se puede expresar como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k (\Gamma_{ij}^k x) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_k \Gamma_{ij}^k(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Ambos tipos de funciones,  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k, \Gamma_{ij}^k$ , se denominaran como los *símbolos de Christoffel* de la conexión en la carta  $x$ .

Dada una curva  $\sigma$  y una carta  $x$  denotemos por  $c = x\sigma$  la representación coordenada de la curva. Si  $X$  es una campo tangente a  $M$  a lo largo de la curva  $\sigma$ , supongamos que en el dominio de la carta  $x$  se tiene que  $X = \sum_j A_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_\sigma$ . Notemos que  $\dot{\sigma} = \sum \frac{dc_i}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_\sigma$ .

Sustituyendo  $\dot{\sigma}$  se obtiene

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{\sigma}} X &= \sum_j \left( \frac{dA_j}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_\sigma + A_j \nabla_{\sum \frac{dc_i}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_j \left( \frac{dA_j}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_\sigma + A_j \sum_i \frac{dc_i}{dt} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_\sigma \right) \\
&= \sum_k \frac{dA_k}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_\sigma + \sum_{i,j} A_j \frac{dc_i}{dt} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_\sigma \\
&= \sum_k \frac{dA_k}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_\sigma + \sum_{i,j} A_j \frac{dc_i}{dt} \left( \sum_k \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_\sigma \\
&= \sum_k \frac{dA_k}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_\sigma + \sum_k \sum_{i,j} \frac{dc_i}{dt} \tilde{\Gamma}_{ij}^k \sigma A_j \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_\sigma \\
&= \sum_k \left( \frac{dA_k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dc_i}{dt} \Gamma_{ij}^k(c) A_j \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_\sigma
\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.4. Se dice que un campo  $X$  tangente a una variedad  $M$  a lo largo de una curva  $\sigma$  es *paralelo* si  $D_{\dot{\sigma}} X = 0$ .

Teniendo en cuenta los cálculos anteriores se tiene el resultado siguiente.

PROPOSICIÓN 1.4. Sea  $X$  un campo tangente a una variedad  $M$  a lo largo de una curva  $\sigma$  y sea  $x$  una carta cuyo dominio corte a la curva y tal que  $X = \sum_j A_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_\sigma$  en  $\sigma^{-1}(\text{Dom } x)$  y denotemos  $c = x\sigma$ . Entonces  $X$  es paralelo en  $\sigma^{-1}(\text{Dom } x)$  si y sólo si se verifican las ecuaciones

$$\frac{dA_k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dc_i}{dt} \Gamma_{ij}^k(c) A_j = 0 \quad , \quad k = 1 \cdots m.$$

que se llaman el sistema de ecuaciones diferenciales de los campos paralelos a lo largo de la curva  $\sigma$  en el dominio de la carta  $x$ .

PROPOSICIÓN 1.5. Sea una variedad  $M$  con una conexión lineal  $\nabla$ , una curva  $\sigma$  con dominio conexo y  $t_0 \in \text{Dom } \sigma$ . Entonces dado  $X_0 \in T_{\sigma(t_0)} M$  existe único campo  $X$  tangente a  $M$  a lo largo de  $\sigma$  que es paralelo y tal que  $X(t_0) = X_0$ .

DEMOSTRACIÓN. Si la curva  $\sigma$  está dada, entonces una carta  $x$  en  $\sigma(t_0)$  determina funciones  $c = x\sigma$  y sus componentes  $c_i = x_i\sigma$  de tal modo que el sistema anterior es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en las variables  $A_1, \dots, A_m$ . Además existe un entorno  $V(t_0) = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset \sigma^{-1}(\text{Dom } x)$  tal que para cada valores iniciales de las variables  $A_1, \dots, A_m$  existen unas únicas funciones

definidas en  $V(t_0)$ , que sean solución del sistema y que tengan los valores iniciales dados. Ahora para cada  $t \in \text{Dom } \sigma$ , si  $t > t_0$  se tiene que  $[t_0, t] \subset \text{Dom } \sigma$  por ser el dominio de la curva conexo. Además al ser  $[t_0, t]$  compacto existe una partición  $t_0 < t_1 < \dots < t_k = t$  de modo que en cada subintervalo verifica condiciones de existencia y unicidad del correspondiente sistema de ecuaciones diferenciales. Cada  $X_0 \in T_{\sigma(t_0)}M$  determina valores iniciales  $X_0 = \sum_j A_j(t_0) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{\sigma(t_0)}$  de funciones  $A_1, \dots, A_m$  definidas en  $V(t_0)$  y que son únicas verificando el sistema de ecuaciones y con los valores iniciales dados. Tomemos entonces el campo  $X = \sum_j A_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_\sigma$ . Ahora procedemos de modo inductivo tomando  $X_1 \in T_{\sigma(t_1)}M$  hasta obtener el campo  $X$  definido en un entorno de  $[t_0, t]$ . Análogamente se procede en el caso  $t < t_0$ . La unicidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales anteriores garantizan que el campo  $X$  es el único campo paralelo definido en  $\text{Dom } \sigma$  con valores iniciales  $X_0$ .  $\square$

**DEFINICIÓN 1.5.** Se dice que una curva  $\sigma$  de una variedad  $M$  es una *geodésica* respecto  $\nabla$  si  $\dot{\sigma}$  es paralelo; es decir, si  $D_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = 0$ .

**PROPOSICIÓN 1.6.** Sea una variedad  $M$  con una conexión lineal  $\nabla$ . Dado un  $v \in T_pM$ , entonces existe una única geodésica  $\gamma$  que pasa por  $p$  a velocidad  $v$ . Denotaremos esta geodésica por  $\gamma(t, p, v)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $x$  una carta en el punto  $p$ , de manera que  $\dot{\sigma} = \sum \frac{dc_k}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_\sigma$ , entonces  $\dot{\sigma}$  es paralelo a lo largo de  $\sigma$  y en el dominio de la carta si y sólo si se verifica la ecuación diferencial de segundo orden siguiente:

$$\frac{d^2c_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \frac{dc_i}{dt} \Gamma_{ij}^k(c) \frac{dc_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Ésta tiene solución única bajo las condiciones iniciales correspondientes; en este caso que pase por el punto  $p$  a velocidad  $v$ .  $\square$

**DEFINICIÓN 1.6.** La función  $\exp_p: T_pM \rightarrow M$  definida por  $\exp_p(v) = \gamma(1, p, v)$  se llama *exponencial*.

## 2. Variedades riemannianas

**DEFINICIÓN 2.1.** Llamaremos *producto interno* de un espacio vectorial real a una aplicación  $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilineal simétrica y definida positiva. Una *métrica riemanniana* asocia a cada  $p$  de  $M$  un producto interno  $\langle -, - \rangle_p: T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  de forma diferenciable; es decir, si  $X, Y$  son campos tangentes entonces la función  $\langle X, Y \rangle(p) = \langle X_p, Y_p \rangle$ , definida para  $p \in \text{Dom } X \cap \text{Dom } Y$ , es diferenciable. Un variedad  $M$  provista de un métrica riemanniana diremos

que es una *variedad riemanniana*. Con las mismas condiciones de diferenciabilidad anteriores si cada producto  $\langle -, - \rangle_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  es bilineal simétrico y no singular se dice que es una *métrica pseudoriemanniana* y que  $(M, \langle -, - \rangle)$  es una *variedad pseudoriemanniana*.

EJEMPLO 2.1. En  $\mathbb{R}^n$  podemos considerar la siguiente métrica: Para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  si  $u = \sum_k u_k \left( \frac{\partial}{\partial r_k} \right)_p$  y  $v = \sum_k v_k \left( \frac{\partial}{\partial r_k} \right)_p$ , entonces se define la métrica mediante la fórmula  $\langle u, v \rangle_p = \sum_k u_k v_k$ .

PROPOSICIÓN 2.1. Sea  $N$  una variedad con una métrica  $\langle -, - \rangle$ . Si  $f: M \rightarrow N$  es un inmersión global, entonces  $f$  induce una métrica riemanniana en  $M$  definida por la fórmula

$$\langle u, v \rangle_p = \langle f_* u, f_* v \rangle_{f(p)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Del hecho de que para cada  $p \in M$  el producto interno  $\langle -, - \rangle_{f(p)}$  sea bilineal, simétrico y definido positivo, y teniendo en cuenta que  $T_p f$  es monomorfismo, se tiene de modo rutinario que  $\langle -, - \rangle_p$  es un producto interno. Si  $f: M \rightarrow N$  es un inmersión global, entonces por la proposición 1.1 para cada  $p \in M$  existen cartas  $x$  de  $M$  en  $p$  e  $y$  de  $N$  en  $f(p)$  tal que  $\text{Dom } x \subset \text{Dom}(y \circ f)$ ,  $y_i \circ f|_{\text{Dom } x} = x_i$  para  $1 \leq i \leq m$  y además  $y_i \circ f|_{\text{Dom } x} = 0$  para  $m \leq i \leq n$ . De aquí se deduce que  $f|_{\text{Dom } x}$  es inyectiva y además  $T_p f \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right)_{f(p)}$  para  $1 \leq i \leq m$ . Por lo que la función  $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \rangle f$  es diferenciable. Ahora dados dos campos  $X, Y$  definidos en un punto  $p$  si tomamos cartas  $x$  e  $y$  como las anteriores se tiene que si  $X|_{\text{Dom } x} = \sum_i A_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $Y|_{\text{Dom } x} = \sum_j B_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ , entonces  $\langle X, Y \rangle|_{\text{Dom } x} = \sum_{i,j} A_i B_j \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$  que es diferenciable. Por lo tanto se tiene que  $\langle X, Y \rangle$  es diferenciable.  $\square$

DEFINICIÓN 2.2. Se dice que  $f: M \rightarrow N$  es una *inmersión isométrica* si para  $p \in \text{Dom } f$  y  $u, v \in T_p M$  se tiene que  $\langle u, v \rangle_p = \langle f_* u, f_* v \rangle_{f(p)}$ . Si además  $f$  es un difeomorfismo local diremos que  $f$  es una *isometría local* y si  $f$  es un difeomorfismo global de  $M$  sobre  $N$  diremos que  $M$  es *isométrica a  $N$* .

EJEMPLO 2.2. Si  $\Sigma^k$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$  entonces la inclusión  $i: \Sigma^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una inmersión que induce la siguiente métrica: Para cada  $p \in \Sigma^k$  si  $u, v \in T_p \Sigma^k$ , entonces  $\langle u, v \rangle_p = \langle i_* u, i_* v \rangle_{i(p)}$ . Por ejemplo, la esfera unidad  $S^{n-1}$  tiene estructura natural de variedad riemanniana inducida por la inclusión natural  $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

EJEMPLO 2.3. En  $\mathbb{R}_+^n = \{(r_1, \dots, r_n) | r_n > 0\}$  podemos considerar la siguiente métrica: Para cada  $p = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$  si  $u = \sum_k u_k \left( \frac{\partial}{\partial r_k} \right)_p$  y  $v = \sum_k v_k \left( \frac{\partial}{\partial r_k} \right)_p$ , entonces se define  $\langle u, v \rangle_p = \frac{1}{r_n^2} \sum_k u_k v_k$ . Esta variedad riemanniana se denomina *espacio hiperbólico  $n$ -dimensional* y se denota por  $H^n$ .

EJEMPLO 2.4. En  $\mathbb{R}^n$  podemos considerar la siguiente métrica: Para cada  $p = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$  si  $u = \sum_k u_k \left(\frac{\partial}{\partial r_k}\right)_p$  y  $v = \sum_k v_k \left(\frac{\partial}{\partial r_k}\right)_p$ , entonces se define  $\langle u, v \rangle_p = -u_1 v_1 + \sum_{k=2}^n u_k v_k$ . Esta variedad pseudoriemanniana se denomina *espacio de Minkovski  $n$ -dimensional* y lo denotaremos por  $M^n$ .

Recordemos que un producto interno en un espacio vectorial  $V$  con una base  $(e_1, \dots, e_n)$  queda determinado por la matriz simétrica  $(\langle e_i, e_j \rangle)$ . De modo similar una métrica riemanniana en el dominio de una carta  $x$  queda determinado por las funciones definidas por  $\tilde{g}_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$  que llamaremos *coeficientes de la métrica* respecto de la carta  $x$ . A las representaciones coordenadas las denotaremos por  $g_{ij} = \tilde{g}_{ij} x^{-1}$ .

### 3. Longitudes de curvas y volúmenes

DEFINICIÓN 3.1. Sea  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow M$  una curva en una variedad riemanniana. Sea un intervalo  $[a, b] \subset \text{Dom } \sigma$ . La longitud de la curva entre  $a$  y  $b$  se define como la integral

$$l_a^b = \int_a^b \langle \dot{\sigma}, \dot{\sigma} \rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

Sea  $V$  un espacio vectorial con un producto interno. Si  $(e_1, \dots, e_m)$  es una base ortonormal de  $V$ , entonces el volumen del paralelepípedo expandido por  $v_1 = \sum a_{1j} e_j, \dots, v_m = \sum a_{mj} e_j$  viene dado por  $\text{vol}(v_1, \dots, v_m) = \det(a_{ij})$ . Notemos que

$$g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \sum_k a_{ik} e_k, \sum_l a_{jl} e_l \right\rangle = \sum_k a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} = \sum_k a_{ik} a_{jk}$$

De donde deducimos que  $\text{vol}(v_1, \dots, v_m) = \sqrt{\det(g_{ij})}$  donde el signo del volumen se puede tomar positivo si  $\det(a_{ij}) > 0$  o negativo si  $\det(a_{ij}) < 0$ .

Recordemos también que si respecto una base  $v_1, \dots, v_m$  tenemos los coeficientes  $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$  y respecto a otra base  $w_1, \dots, w_m$  los nuevos coeficientes  $h_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle$ . Si  $w_s = \sum_l c_{sl} v_l$  entonces  $h_{ij} = \langle \sum_k c_{ik} v_k, \sum_l c_{jl} v_l \rangle = \sum_{kl} c_{ik} g_{kl} c_{jl}$ .

Sea  $R$  una "región" contenida en el dominio de una carta  $x$  donde los coeficientes métricos son  $g_{ij} = \tilde{g}_{ij} x^{-1}$ , entonces el volumen de esta región se define como

$$\text{vol}(R) = \int_{xR} \sqrt{\det(g_{ij}(r))} dr_1 \dots dr_m.$$

El volumen es independiente de la carta elegida supongamos que  $R$  está contenido en el dominio de una carta  $y$  con coeficientes métricos

$h_{ij} = \tilde{h}_{ij}y^{-1}$  y con misma orientación que  $x$ ; es decir,  $\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) > 0$ . Al realizar el cambio  $r = xy^{-1}(s)$  se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{xR} \sqrt{\det(g_{kl}(r))} dr_1 \dots dr_m \\ &= \int_{yR} \left| \det\left(\frac{\partial r_i}{\partial s_j}\right) \right| \sqrt{\det(g_{kl}(xy^{-1}(s)))} ds_1 \dots ds_m \\ &= \int_{yR} \sqrt{\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_k}\right)_{y^{-1}(s)} \det(\tilde{g}_{kl}(y^{-1}(s))) \det\left(\frac{\partial x_l}{\partial y_j}\right)_{y^{-1}(s)}} ds_1 \dots ds_m \\ &= \int_{yR} \sqrt{\det(h_{ij}(s))} ds_1 \dots ds_m . \end{aligned}$$

#### 4. Conexiones riemannianas

DEFINICIÓN 4.1. Se dice que una conexión lineal  $\nabla$  sobre una variedad  $M$  es *simétrica* si para  $X, Y$  campos tangentes a  $M$  se verifica que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Se dice que una conexión lineal  $\nabla$  sobre una variedad riemanniana  $(M, \langle -, - \rangle)$  es *compatible con la métrica* si para  $X, Y, Z$  campos tangentes a  $M$  se verifica que

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle X, \nabla_X Z \rangle.$$

En una variedad riemanniana una *conexión riemanniana* es una conexión simétrica y compatible con la métrica.

PROPOSICIÓN 4.1. Una conexión  $\nabla$  es simétrica si y sólo si para cada carta los símbolos de Christoffel satisfacen que  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} &= \sum_k \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_k \tilde{\Gamma}_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Entonces por ser la conexión simétrica

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$$

Se donde se concluye que  $\tilde{\Gamma}_{ji}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k$ . El recíproco se prueba sin dificultad.  $\square$

PROPOSICIÓN 4.2. La métrica de una variedad riemanniana induce un isomorfismo canónico entre el fibrado tangente y el cotangente.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $u \in T_p M$ . Entonces consideremos la aplicación lineal  $\theta(u): T_p^* M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\theta(u)(v) = \langle u, v \rangle_p$ . Por ser el producto interno no singular, se tiene que  $\theta: TM \rightarrow T^*M$  es una biyección que preserva fibras y es lineal en cada una de ellas. Además para  $x$  carta de  $M$  se tiene que  $\tilde{g}_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$  son funciones diferenciables. Entonces el cambio de cartas  ${}^* \tilde{x} \theta \tilde{x}^{-1}((r_1, \dots, r_m), (s_1, \dots, s_m)) = ((r_1, \dots, r_m), (\sum s_i g_{i1}(r), \dots, \sum s_i g_{im}(r)))$  es un difeomorfismo. Por lo tanto  $\theta$  es un difeomorfismo global y sobreyectivo.  $\square$

Como consecuencia del resultado anterior en una variedad riemanniana una 1-forma determina un único campo y recíprocamente.

TEOREMA 4.1. (Levi-Civita) Dada una variedad riemanniana  $M$  entonces existe una única conexión simétrica compatible con su métrica determinada por la siguiente expresión:

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2}(X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle)$$

DEMOSTRACIÓN. Una conexión compatible con la métrica para campos  $X, Y, Z$  debe verificar las fórmulas:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \end{aligned}$$

De éstas, aplicando que  $\nabla$  es simétrica, se infiere que

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle$$

de donde se obtiene que

$$(4.2) \quad \langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2}(X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle)$$

Entonces cualquier conexión riemanniana debe verificar la fórmula anterior. Es importante observar que para cada par de campos  $X, Y$  el operador

$$\omega(Z) = \frac{1}{2}(X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle)$$

es lineal respecto funciones diferenciables con valores reales, en efecto:

$$\begin{aligned}
\omega(fZ) &= \frac{1}{2}(X\langle Y, fZ \rangle + Y\langle fZ, X \rangle - fZ\langle X, Y \rangle \\
&\quad - \langle [X, fZ], Y \rangle - \langle [Y, fZ], X \rangle - \langle [X, Y], fZ \rangle) \\
&= \frac{1}{2}(fX\langle Y, Z \rangle + fY\langle Z, X \rangle - fZ\langle X, Y \rangle + Xf\langle Y, Z \rangle + Yf\langle Z, X \rangle \\
&\quad - f\langle [X, Z], Y \rangle - f\langle [Y, Z], X \rangle - f\langle [X, Y], Z \rangle \\
&\quad - \langle XfZ, Y \rangle - \langle YfZ, X \rangle) \\
&= f\omega(Z)
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la fórmula dada en el ejercicio ?? del capítulo 4. También se comprueba fácilmente que  $\omega(Z + Z') = \omega(Z) + \omega(Z')$ .

Si suponemos que  $\nabla, \nabla'$  son conexiones riemannianas, para  $X, Y$  campos tangentes se tiene que  $\langle -, \nabla_Y X \rangle = \omega = \langle -, \nabla'_Y X \rangle$ . De las proposiciones 2.3 (capítulo 4) y 4.2, se sigue que  $\nabla_Y X = \nabla'_Y X$ .

Para probar la existencia, notemos que cada dos campos  $X, Y$  determinan una 1-forma  $\omega$ . Teniendo en cuenta la proposición 2.3 del capítulo 4 y la anterior proposición 4.2, se obtiene que los campos  $X, Y$  determinan un único nuevo campo  $\nabla_Y X$  verificando la fórmula 4.2.

Es inmediato comprobar que se verifican la propiedades lineales **CL1**, **CL2**. Para probar **CL3** consideremos

$$\begin{aligned}
\langle Z, \nabla_Y fX \rangle &= \frac{1}{2}(fX\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, fX \rangle - Z\langle fX, Y \rangle \\
&\quad - \langle [fX, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], fX \rangle - \langle [fX, Y], Z \rangle)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
Y\langle Z, fX \rangle &= Yf\langle Z, X \rangle + fY\langle Z, X \rangle \\
-Z\langle fX, Y \rangle &= -Zf\langle X, Y \rangle - fZ\langle X, Y \rangle \\
-\langle [fX, Z], Y \rangle &= Zf\langle X, Y \rangle + f\langle [Z, X], Y \rangle \\
-\langle [fX, Y], Z \rangle &= Yf\langle X, Z \rangle + f\langle [Y, X], Z \rangle
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle Z, \nabla_Y fX \rangle &= f\langle Z, \nabla_Y X \rangle + \frac{1}{2}(2Yf\langle Z, X \rangle) \\
&= \langle Z, f\nabla_Y X + YfX \rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\nabla_Y fX = f\nabla_Y X + YfX$  y se verifica la propiedad **CL3**.

La comprobación de que está conexión es simétrica se obtiene restando términos en las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\langle Z, \nabla_Y X \rangle &= \frac{1}{2}(X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\
&\quad - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle) \\
\langle Z, \nabla_X Y \rangle &= \frac{1}{2}(Y\langle X, Z \rangle + X\langle Z, Y \rangle - Z\langle Y, X \rangle \\
&\quad - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, X], Z \rangle)
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\langle Z, \nabla_Y X - \nabla_X Y \rangle = \langle [Y, X], Z \rangle = \langle Z, [Y, X] \rangle$$

para todo  $Z$ . Por lo tanto  $\nabla_Y X - \nabla_X Y = [Y, X]$ .

Ahora sumando

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2}(Y\langle X, Z \rangle + X\langle Z, Y \rangle - Z\langle Y, X \rangle \\ &\quad - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, X], Z \rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_X Y \rangle &= \frac{1}{2}(Z\langle X, Y \rangle + X\langle Y, Z \rangle - Y\langle Z, X \rangle \\ &\quad - \langle [Z, Y], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Z, X], Y \rangle) \end{aligned}$$

se sigue que la conexión es riemanniana

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle = X\langle Y, Z \rangle$$

□

Si en la expresión anterior tomamos  $Z = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$  y  $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$  se obtiene que

$$\sum_k \tilde{\Gamma}_{ji}^k \tilde{g}_{lk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{g}_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

Si denotamos por  $(\tilde{g}^{ln})$  la matriz inversa de la matriz  $(\tilde{g}_{ln})$  se obtiene que

$$\sum_{k,l} \tilde{\Gamma}_{ji}^l \tilde{g}_{kl} \tilde{g}^{ln} = \frac{1}{2} \sum_l \tilde{g}^{ln} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{g}_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

y por lo tanto:

$$\tilde{\Gamma}_{ji}^n = \frac{1}{2} \sum_l \tilde{g}^{ln} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{g}_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

## 5. Curvatura

DEFINICIÓN 5.1. El *tensor curvatura*  $R$  de una variedad riemanniana  $M$  es una correspondencia que a cada par de campos  $X, Y$  le asocia un operador  $R(X, Y)$  que transforma cada campo  $Z$  en un campo denotado por  $R(X, Y)Z$  definido por la expresión:

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

donde  $\nabla$  es la conexión riemanniana de  $M$ .

PROPOSICIÓN 5.1. Sean  $X, Y, Z, W$  campos tangentes y  $f, g$  funciones diferenciables con valores reales, entonces

$$\begin{aligned} R(fX + gY, Z) &= fR(X, Z) + gR(Y, Z) \\ R(X, fY + gZ) &= fR(X, Y) + gR(X, Z) \\ R(X, Y)(fZ + gW) &= fR(X, Y)Z + gR(X, Y)W \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que son lineales respecto escalares reales. Para funciones se tiene:

$$\begin{aligned}
R(fX, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{fX} \nabla_Y Z + \nabla_{[fX, Y]} Z \\
&= \nabla_Y f \nabla_X Z - \nabla_{fX} \nabla_Y Z + \nabla_{f[X, Y] - YfX} Z \\
&= Yf \nabla_X Z + f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{f[X, Y]} Z + \nabla_{-YfX} Z \\
&= f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_Y \nabla_X Z + f \nabla_{[X, Y]} Z \\
&= fR(X, Y)Z
\end{aligned}$$

Para la variable  $Y$  se sigue fácilmente  $R(X, fY) = -R(fY, X) = -fR(Y, X) = fR(X, Y)$ . Para la variable  $Z$  se tiene:

$$R(X, Y)fZ = \nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_X \nabla_Y fZ + \nabla_{[X, Y]} fZ$$

Los términos de la derecha verifican

$$\begin{aligned}
\nabla_Y \nabla_X fZ &= \nabla_Y (XfZ + f \nabla_X Z) \\
&= YXfZ + Xf \nabla_Y Z + Yf \nabla_X Z + f \nabla_Y \nabla_X Z \\
-\nabla_X \nabla_Y fZ &= -\nabla_X (YfZ + f \nabla_Y Z) \\
&= -XYfZ - Yf \nabla_X Z - Xf \nabla_Y Z - f \nabla_X \nabla_Y Z \\
\nabla_{[X, Y]} fZ &= [X, Y]fZ + f \nabla_{[X, Y]} Z
\end{aligned}$$

Sumando se tiene que  $R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$ .  $\square$

LEMA 5.1. Si uno de los campos  $X, Y, Z$  se anula en un punto  $p$ , entonces  $R(X, Y)Z$  también se anula en  $p$ .

DEMOSTRACIÓN. Como en algunas demostraciones anteriores, del hecho de que  $R(X, Y)Z$  sea lineal en cada variable se sigue como es usual que si  $U$  es un abierto de la variedad entonces  $(R(X, Y)Z)|_U = R(X|_U, Y)Z = R(X, Y|_U)Z = R(X, Y)(Z|_U)$ . En el dominio  $U$  de una carta  $x$  se tiene que si por ejemplo  $X|_U = \sum_i f_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ , entonces

$$\begin{aligned}
(R(X, Y)Z)|_U &= R(X|_U, Y)Z = R\left(\sum_i f_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right), Y\right)Z \\
&= \sum_i f_i R\left(\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right), Y\right)Z.
\end{aligned}$$

Si  $p \in U \cap \text{Dom } X \cap \text{Dom } Y \cap \text{Dom } Z$  y  $X_p = 0$ , se tiene que  $f_i(p) = 0$  para  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Por lo tanto  $(R(X, Y)Z)_p = ((R(X, Y)Z)|_U)_p = (R(X|_U, Y)Z)_p = \sum_i f_i(p) \left( R\left(\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right), Y\right)Z \right)_p = 0$ .  $\square$

Como consecuencia del lema anterior si  $u, v, w$  son vectores tangentes en el punto  $p$ , podemos definir el vector tangente  $R(u, v)w$  tomando campos  $U, V, W$  tales que  $U_p = u$ ,  $V_p = v$ ,  $W_p = w$  y definiendo  $R(u, v)w = (R(U, V)W)_p$ .

El tensor curvatura verifica las propiedades siguientes:

PROPOSICIÓN 5.2. (Identidad de Bianchi) Sean  $X, Y, Z$  campos tangentes, entonces

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. De la definición del tensor curvatura se tiene que

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \\ R(Y, Z)X &= \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y, Z]} X \\ R(Z, X)Y &= \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z, X]} Y \end{aligned}$$

Sumando se obtiene

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_Y [X, Z] + \nabla_X [Z, Y] + \nabla_Z [Y, X] \\ &\quad - \nabla_{[Y, X]} Z - \nabla_{[Z, Y]} X - \nabla_{[X, Z]} Y \\ &= [Y[X, Z]] + [X, [Z, Y]] + [Z[Y, X]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 5.3. Sean  $X, Y, Z, T$  campos tangentes, entonces

- (i)  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle = 0$ ,
- (ii)  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(Y, X)Z, T \rangle$ ,
- (iii)  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(X, Y)T, Z \rangle$ ,
- (iv)  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(Z, T)X, Y \rangle$ .

DEMOSTRACIÓN. La propiedad (i) se sigue de la identidad de Bianchi y la (ii) es consecuencia inmediata de la definición. La propiedad (iii) es equivalente a ver que  $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, Z \rangle &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle + \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\ &= Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle - X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} Y (X \langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2} X (Y \langle Z, Z \rangle) + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= -\frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para probar (iv), tenemos que de la (i) se sigue que

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, T \rangle + \langle R(Y, Z)X, T \rangle + \langle R(Z, X)Y, T \rangle &= 0 \\ \langle R(Y, Z)T, X \rangle + \langle R(Z, T)Y, X \rangle + \langle R(T, Y)Z, X \rangle &= 0 \\ \langle R(Z, T)X, Y \rangle + \langle R(T, X)Z, Y \rangle + \langle R(X, Z)T, Y \rangle &= 0 \\ \langle R(T, X)Y, Z \rangle + \langle R(X, Y)T, Z \rangle + \langle R(Y, T)X, Z \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Sumando se obtiene que  $2\langle R(Z, X)Y, T \rangle + 2\langle R(Y, T)X, Z \rangle = 0$ . Por lo tanto  $\langle R(Z, X)Y, T \rangle = \langle R(Y, T)Z, X \rangle$ . De donde se deduce la propiedad (iv).  $\square$

Denotemos por  $|u|^2 = \langle u, u \rangle$  y por  $|u \wedge v| = \sqrt{|u|^2|v|^2 - \langle u, v \rangle^2}$ .

PROPOSICIÓN 5.4. Sea  $\sigma$  un subespacio bidimensional real,  $u, v$  una base de  $\sigma$  y supongamos que tenemos un producto interno y un operador  $R$  satisfaciendo las propiedades anteriores, entonces

$$\frac{\langle R(u, v)u, v \rangle}{|u \wedge v|^2}$$

es independiente de la base elegida.

DEMOSTRACIÓN. Realicemos un cambio de base  $u' = au + bv$ ,  $v' = cu + dv$ . De los 16 términos que se generan al aplicar que  $\langle R(au + bv, cu + dv)au + bv, cu + dv \rangle$  si se tienen en cuenta las propiedades del tensor quedan los cuatro términos siguientes:

$$\begin{aligned} \langle R(u', v')u', v' \rangle &= adad\langle R(u, v)u, v \rangle + adbc\langle R(u, v)v, u \rangle \\ &\quad + bcad\langle R(v, u)u, v \rangle + bcbc\langle R(v, u)v, u \rangle \\ &= \langle R(u, v)u, v \rangle (a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2) \\ &= (ab - cd)^2 \langle R(v, u)u, v \rangle \end{aligned}$$

Por otra parte  $|(au + bv) \wedge (cu + dv)|^2 = (ad - bc)^2|u \wedge v|^2$ . De aquí teniendo en cuenta que en el cambio de base se verifica que  $ad - bc \neq 0$  se tiene que

$$(5.1) \quad \frac{\langle R(u', v')u', v' \rangle}{|u' \wedge v'|^2} = \frac{(ad - bc)^2 \langle R(u, v)u, v \rangle}{(ad - bc)^2 |u \wedge v|^2} = \frac{\langle R(u, v)u, v \rangle}{|u \wedge v|^2}$$

$\square$

DEFINICIÓN 5.2. Sea  $M$  una variedad riemanniana y  $\sigma$  un subespacio bidimensional de  $T_pM$ , llamaremos *curvatura seccional* o *curvatura de Riemann* de  $\sigma$  a número real

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(u, v)u, v \rangle}{|u \wedge v|^2}$$

donde  $u, v$  es una base del subespacio  $\sigma$  de  $T_pM$ .

Dada una carta  $x$  de una variedad riemanniana, utilizaremos las siguientes funciones que determinan el tensor curvatura

$$\begin{aligned} R \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} &= \sum_l \tilde{R}_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \\ \tilde{R}_{ijk}^l &= \left\langle R \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle \end{aligned}$$

No es difícil comprobar que

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ijk}^l &= \sum_s \tilde{\Gamma}_{ik}^s \tilde{\Gamma}_{js}^l - \sum_s \tilde{\Gamma}_{jk}^s \tilde{\Gamma}_{is}^l + \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ik}^l}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{jk}^l}{\partial x_i} . \\ \tilde{R}_{ijk} &= \sum_l \tilde{R}_{ijk}^l \tilde{g}_{ls} .\end{aligned}$$

Señalaremos también que en el caso de 2-variedades riemannianas, en el dominio de una carta  $x$  la curvatura seccional se puede calcular con la fórmula

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{R}_{1212}}{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2} .$$

Es frecuente utilizar ciertas combinaciones de la curvatura seccional. Por ejemplo, si  $u$  es un vector unitario u consideramos una base ortonormal  $u_1, \dots, u_{m-1}$  del hiperplano ortogonal de  $u$  en  $T_p M$  si se consideran los promedios

$$\begin{aligned}\text{Ric}(u) &= \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \langle R(u, u_i, )u, u_i \rangle \\ \widetilde{\text{KE}} &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \text{Ric}(u_j) = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i,j} R(u_i, u_j, )u_i, u_j \rangle\end{aligned}$$

se obtiene *la curvatura de Ricci en la dirección  $u$  en el punto  $p$*  y *la curvatura escalar en el punto  $p$*  . Notemos que en principio las curvaturas anteriores no están bien definidas ya que dependen de como se complete la base ortonormal. La siguiente proposición da una definición intrínseca que prueba que están bien definidas.

Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita. Una aplicación lineal  $h: V \rightarrow V$  tiene asociada el invariante denominado traza y que denotaremos por  $\text{Tr}(h)$  que se define mediante la fórmula  $\text{Tr}(h) = \sum_{i=1}^m a_{ii}$  si  $(a_{ij})$  es la matriz de  $h$  respecto una base  $v_1, \dots, v_m$  del espacio vectorial.

Sean ahora  $u, v \in T_p M$  de una variedad riemanniana  $M$  . Consideremos la aplicación lineal  $R(u, -)v: T_p M \rightarrow T_p M$  definida por  $R(u, -)v(w) = R(u, w)v$  donde  $R$  es el tensor curvatura.

LEMA 5.2. Sea  $M$  una variedad riemanniana con tensor de curvatura  $R$  .

(i) La aplicación  $Q: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$Q(u, v) = \text{Tr}(R(u-)v)$$

es bilineal y simétrica.

(ii) Para  $u \in T_p M$  de norma uno, se tiene que

$$\text{Ric}(u) = \frac{1}{(m-1)} Q(u, u) .$$

- (iii) Sea  $E$  es la aplicación lineal autoadjunta de la forma bilineal  $Q$  ; esto es  $\langle E(u), v \rangle = Q(u, v)$  . Entonces la curvatura escalar viene dada por

$$\widetilde{KE} = \text{Tr}(E) .$$

DEMOSTRACIÓN. El hecho que  $Q$  sea bilineal es una comprobación rutinaria. Para ver que es simétrica sea  $u_1, \dots, u_n$  una base ortonormal de  $T_pM$  , entonces

$$Q(u, v) = \sum_i \langle R(u, u_i)v, u_i \rangle = \sum_i \langle R(v, u_i)u, u_i \rangle = Q(v, u) .$$

Notemos además si  $u = u_m$  se tiene que  $Q(u, u) = (m - 1) \text{Ric}(u)$  .

Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(E) &= \sum_i \langle E(u_i), u_i \rangle = \sum_i Q(u_i, u_i) \\ &= (m - 1) \sum_i \text{Ric}(u_i) = m(m - 1) \widetilde{KE} \end{aligned}$$

□

Nosotros llamaremos *tensor de Ricci* a la forma bilineal simétrica  $Q$  y los diremos que las funciones  $\tilde{Q}_{ik} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$  son los *coeficientes del tensor de Ricci* .

Una carta  $x$  de la variedad riemanniana  $M$  induce los campos coordenados usuales. La forma bilineal  $Q$  queda determinada por los valores

$$\tilde{Q}_{ik} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_j \tilde{R}_{ijk}^j$$

Sea  $u$  un vector unitario tangente en el punto  $p$ ; es decir si  $u = \sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$  y  $\sum_{ij} a_i \tilde{g}_{ij} a_j = 1$  , entonces la curvatura de Ricci viene dada por

$$\text{Ric}(u) = \frac{1}{m-1} \sum_{ik} a_i \tilde{Q}_{ik} a_k$$

Observemos que puesto que la aplicación bilineal autoadjunta  $E: T_pM \rightarrow T_pM$  verifica que  $Q(u, v) = \langle E(u), v \rangle$  . De donde se obtiene que la curvatura escalar viene dada por

$$\widetilde{KE} = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{ik} \tilde{Q}_{ik} \tilde{g}^{ik}$$



## EL PAQUETE RIEMANNIAN GEOMETRY

### 1. El paquete RiemannianGeometry

**1.1. Introducción.** En este paquete se definen una familia de pequeños programas que denominaremos funciones que calculan diversos coeficientes pseudo-métricos en un abierto coordenado de una variedad pseudo-riemanniana. La construcción de las funciones y la estructura de las funciones está basada en el libro “Introducción a la Geometría Diferencial” que está disponible en la página web:

<http://www.unirioja.es/cu/luhernan/lnes.html>

Versiones comprimidas del paquete junto con documentación y ejemplos se hallan también disponibles en la misma página web.

Para instalar el paquete seguir las instrucciones que están en documento léame.

Este paquete se carga mediante el comando:

```
<<RiemannianGeometry2007`
```

Podemos ver las funciones que contiene, ordenadas alfabéticamente, mediante:

```
?RiemannianGeometry`*
```

```
RiemannianGeometry`
Christoffel           HiperbolicBall
CurvatureTensor     InducedPseudoMetric
EuclideanMetric      ImmersionGeometricCoefficients2D
GeodesicLines        JacobianM
GeometricCoefficients MinkowskiPseudometric
GeometricCoefficients2D SectionalCurvature2D
```

Para ver la información que existe sobre cada función del paquete, se teclea el interrogante de cierre y el nombre de la función:

```
?Christoffel
```

**Christoffel[pseudometrica,variables]** Calcula los símbolos de Christoffel de una variedad pseudo-riemanniana a partir de los coeficientes de la métrica. Tiene como entrada la matriz  $m \times m$  de una pseudo-métrica de un abierto coordenado de una variedad  $M$  cuyos elementos son funciones que dependen de las variables que aparecen en la segunda entrada, éstas variables denotan las coordenadas de una carta de la variedad  $M$ . La salida es un tensor de dimensiones  $m \times m \times m$ , formado por las funciones denominadas como símbolos de Christoffel, cada una de éstas depende de las mismas variables de las que dependían

los coeficientes pseudo-métricos. Los símbolos de Chistofell determinan la conexión pseudo-riemanniana en el abierto coordenado, se utilizan para calcular las geodésicas y la curvatura seccional”

**1.2. Algunas pseudométricas más frecuentes.** Sea  $x$  una carta de una variedad  $M$ . Respecto dicha carta la pseudométrica viene determinada por una matriz cuyos elementos son funciones de  $M$  en  $\mathbb{R}$ . Estas funciones se suelen expresar de modo que dependan de las coordenadas de la carta elegida  $x$ . Veamos algunas de las más frecuentes:

**EuclideanMetric[n]** Construye la matriz identidad. Se puede utilizar para dar la métrica euclídea en el espacio usual  $\mathbb{R}^n$ .

**MinkowskiPseudometric[n]** Construye la matriz diagonal con todo unos salvo el lugar  $(n, n)$  que es menos uno. En particular tenemos la pseudo-métrica de Minkowski en  $\mathbb{R}^n$ .

**HiperbolicBall[n, variables]** Calcula la métrica riemanniana hiperbólica en la bola unidad. Tiene como entrada la dimensión del espacio y las variables que se deseen utilizar (exactamente  $n$  variables), la salida es la métrica hiperbólica en la bola unidad. En la esfera unidad no hay definida ninguna matriz, fuera del disco unidad aparece inducida una pseudo-métrica.

**EuclideanMetric[3]**

$$\{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}$$

**MinkowskiPseudometric[4]**

$$\{\{1, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 1, 0\}, \{0, 0, 0, -1\}\}$$

**HiperbolicBall[2, {u,v}]**

$$\left\{ \left\{ \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2} \right\} \right\}$$

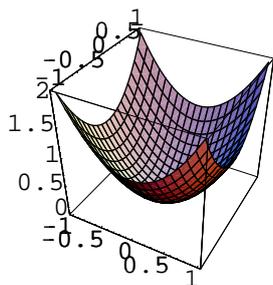
**1.3. Pseudo-métrica inducida por una inmersión.** Dada una inmersión  $f: M \rightarrow N$ , en la que se supone que disponemos de una carta  $x$  en la variedad  $M$  y también de una carta  $y$  en la variedad  $N$ . Supondremos que la variedad  $N$  es pseudo-riemanniana y que conocemos la matriz de la pseudo-métrica respecto de la carta  $y$ , cuyos coeficientes dependen de las coordenadas de la carta  $y$ . En una proposición del capítulo “Variedades y Conexiones Riemannianas” se prueba que bajo estas condiciones queda inducida una nueva pseudo-métrica en la variedad  $M$ . Con los siguientes miniprogramas se calcula la pseudo-métrica inducida en la variedad  $M$ . Se puede utilizar para estudiar las pseudo-métricas inducidas en subvariedades de los espacios euclídeos, hiperbólicos o de Minkowski. También puede ser utilizado con homeomorfismos locales y aplicaciones recubridoras.

**JacobianM[componentes, variables]** Obtiene la matriz jacobiana de una función dependiente de varias variables y que tiene valores vectoriales. Tiene como entrada componentes que es una lista de funciones que dependen de las variables que están en la segunda entrada.

La salida es la matriz jacobiana obtenida al calcular las derivadas parciales de las componentes respecto de las variables. Las filas contienen las derivadas parciales respecto las diferentes variables.

**InducedPseudoMetric[componentes, pseudometrica, variables1, variables2]** Calcula la pseudo-métrica inducida por una inmersión. Dada una función de una variedad  $M$  en otra  $N$  y supongamos que respecto dos cartas de  $M$  y  $N$  la función viene dada por las funciones que forman la lista componentes que es la primera entrada, estas funciones dependen de las variables1 que forman la tercera entrada y son las coordenadas de la carta que tenemos en la variedad  $M$ . La entrada pseudometrica es la pseudo-métrica de la variedad  $N$  en términos de la carta considerada en la variedad  $N$ , cada coeficiente es una expresión que depende de variables2 que es la última entrada. Tiene como salida la pseudo-métrica inducida en la variedad  $M$  que dependerá de las coordenadas de  $M$  contenidas en la lista variables1.

```
paraboloide = {u, v, u^2 + v^2};
ParametricPlot3D[paraboloide, {u, -1, 1}, {v, -1, 1}]
```



```
JacobianM[paraboloide, {u, v}]
{{1, 0}, {0, 1}, {2u, 2v}}
InducedPseudoMetric[paraboloide, EuclideanMetric[3], {u, v}, {x, y, z}]
{{1 + 4u^2, 4uv}, {4uv, 1 + 4v^2}}
```

**1.4. Símbolos de Christoffel y ecuaciones de las geodésicas.** Dada una variedad  $M$  y una carta  $x$  las dos funciones siguientes calculan los símbolos de Christoffel que dependen de las coordenadas de la carta. A partir de los símbolos de Christoffel también se puede calcular el sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas de la variedad  $M$ . El programa no integra estas ecuaciones por lo que no se calculan explícitamente las geodésicas. No obstante se pueden utilizar las funciones básicas de *Mathematica* para intentar encontrar las soluciones de dicho sistema de ecuaciones diferenciales.

**Christoffel[pseudometrica, variables]** Calcula los símbolos de Christoffel de una variedad pseudo-riemanniana a partir de los coeficientes de la pseudo-métrica. Tiene como entrada la matriz  $m \times m$  de una pseudo-métrica de un abierto coordenado de una variedad  $M$  cuyos elementos son funciones que dependen de las variables que aparecen en

la segunda entrada, estas variables denotan las coordenadas de una carta de la variedad  $M$ . La salida es un tensor de dimensiones  $m \times m \times m$ , formado por las funciones denominadas como símbolos de Christoffel, cada una de estas depende de las mismas variables de las que dependían los coeficientes pseudo-métricos. Los símbolos de Christoffel determinan la conexión pseudo-riemanniana en el abierto coordenado, se utilizan para calcular las geodésicas y la curvatura seccional.

**GeodesicLines[chris,variables,nombretiempo]** Obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas de una variedad pseudo-riemanniana. Tiene como entrada los símbolos de Christoffel, las variables de las que dependen y nombretiempo que es el nombre de la variable 'tiempo'. La salida es una lista que contiene el sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas de la variedad en la carta.

**paraboloidepsm** =  $\{\{1 + 4u^2, 4uv\}, \{4uv, 1 + 4v^2\}\}$ ;

**Christoffel[paraboloidepsm, {u,v}]**

$\left\{ \left\{ \left\{ \frac{4u}{1+4u^2+4v^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{4u}{1+4u^2+4v^2} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \frac{4v}{1+4u^2+4v^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{4v}{1+4u^2+4v^2} \right\} \right\} \right\}$

**paraboloidechris**=

$\left\{ \left\{ \left\{ \frac{4u}{1+4u^2+4v^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{4u}{1+4u^2+4v^2} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \frac{4v}{1+4u^2+4v^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{4v}{1+4u^2+4v^2} \right\} \right\} \right\}$ ;

**GeodesicLines[paraboloidechris, {u,v},t]**

$\left\{ \frac{4u u'[t]^2}{1+4u^2+4v^2} + \frac{4u v'[t]^2}{1+4u^2+4v^2} + u''[t], \frac{4v u'[t]^2}{1+4u^2+4v^2} + \frac{4v v'[t]^2}{1+4u^2+4v^2} + v''[t] \right\}$

**1.5. Tensor de curvatura y Curvatura Seccional.** Dada una variedad  $M$  y una carta  $x$  las dos funciones siguientes calculan los coeficientes del tensor de curvatura que dependen de las coordenadas de la carta y para el caso de variedades de dimensión dos obtiene la curvatura seccional.

**CurvatureTensor[simboloschristoffel, pseudometrica, variables]** Calcula todos los coeficientes del tensor de curvatura de una variedad riemanniana a partir de los símbolos de Christoffel y de los coeficientes de la pseudo-métrica. Tiene como primera entrada el tensor de los símbolos de Christoffel que seguramente se habrá calculado con la función del paquete Christoffel, estos símbolos dependen de las variables que aparecen en la tercera entrada, la segunda entrada es la matriz  $m \times m$  de una pseudo-métrica de un abierto coordenado de una variedad  $M$  cuyos elementos también son funciones que dependen de las variables que aparecen en la tercera y última entrada, estas variables denotan las coordenadas de una carta de la variedad  $M$ . La salida es un tensor de dimensiones  $m \times m \times m \times m$ , formado por las funciones del tensor de curvatura, cada una de estas depende de las mismas variables de las que dependían los coeficientes pseudométricos. El tensor de curvatura se utiliza para calcular la curvatura seccional y otras curvaturas.

**SectionalCurvature2D[tensordecurvatura, pseudometrica]**

Calcula la curvatura seccional, que coincide con la de Gauss, a partir de los coeficientes del tensor de curvatura y de la métrica. Tiene

como como primera entrada el tensor de curvatura 2x2x2x2 que seguramente se habrá calculado con la función `CurvatureTensor` del paquete `RiemannianGeometry`, como segunda entrada la matriz 2x2 de la pseudo-métrica de un abierto coordinado de la superficie  $M$ . La salida es un una función que da la curvatura seccional de la superficie que es una variedad de dimensión dos.

$$\begin{aligned} & \mathbf{CurvatureTensor}[\mathbf{paraboloidechris}, \mathbf{paraboloidepsm}, \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}] \\ & \left\{ \left\{ \{0, 0\}, \{0, 0\} \right\}, \left\{ \left\{ 0, \frac{4}{1+4u^2+4v^2} \right\}, \left\{ -\frac{4}{1+4u^2+4v^2}, 0 \right\} \right\} \right\}, \\ & \left\{ \left\{ \left\{ 0, -\frac{4}{1+4u^2+4v^2} \right\}, \left\{ \frac{4}{1+4u^2+4v^2}, 0 \right\} \right\}, \{0, 0\}, \{0, 0\} \right\} \right\} \\ & \mathbf{paraboloidecur} = \\ & \left\{ \left\{ \{0, 0\}, \{0, 0\} \right\}, \left\{ \left\{ 0, \frac{4}{1+4u^2+4v^2} \right\}, \left\{ -\frac{4}{1+4u^2+4v^2}, 0 \right\} \right\} \right\}, \\ & \left\{ \left\{ \left\{ 0, -\frac{4}{1+4u^2+4v^2} \right\}, \left\{ \frac{4}{1+4u^2+4v^2}, 0 \right\} \right\}, \{0, 0\}, \{0, 0\} \right\} \right\}; \\ & \mathbf{SectionalCurvature2D}[\mathbf{paraboloidecur}, \mathbf{paraboloidepsm}] \\ & \frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2} \end{aligned}$$

**1.6. Coeficientes geométricos inducidos por una inmersión.** El miniprograma siguiente calcula la pseudo-métrica, los símbolos de Christoffel, las ecuaciones diferenciales de las geodésicas, los coeficientes del tensor de curvatura y la curvatura seccional de la geometría inducida en una superficie por una inmersión de ésta en una variedad pseudo-riemanniana. El siguiente miniprograma para una superficie pseudo-riemanniana calcula los símbolos de Christoffel, el sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas, los coeficientes del tensor de curvatura y la curvatura seccional. El tercer programa para una variedad pseudo-riemanniana calcula todos los elementos anteriores salvo la curvatura seccional.

**InmersionGeometricCoefficients2D[componentes, inductora, variables1, variables2, nombretiempo]** Dada una inmersión de una variedad  $M$  en una variedad  $N$  que tiene una pseudo-métrica conocida esta función calcula la pseudo-métrica inducida en la variedad  $M$  y también obtiene los símbolos de Christoffel, el sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas, los coeficientes del tensor de curvatura y la curvatura seccional la variedad  $M$ . Tiene como primera entrada `componentes` que son  $n$  funciones con valores reales que dependen de las  $m$  variables que componen, `variables1`, que son precisamente las explicitadas en la tercera entrada. Estas funciones se supone que se han obtenido al considerar una inmersión  $f: M \rightarrow N$  entre variedades y tomar sistemas coordinados  $x$  e  $y$  respectivamente, se tiene que `componentes` =  $yfx^{-1}$ . La segunda entrada es la matriz de la pseudo-métrica de la variedad  $N$  respecto la carta  $y$ , los coeficientes pseudo-métricos dependen de la cuarta entrada, `variables2`. Las más usual en los ejemplos que acompañan este paquete es `EuclideanMetric`[3], que

es la matriz identidad de dimensión 3x3. La variable nombretiempo, que es el nombre que asignamos al ‘tiempo’ en el sistema de ecuaciones diferenciales que verifican las geodésicas. La salida consiste en varias líneas que van explicando los resultados que se van obteniendo. Para obtener una lista de los resultados anteriores basta introducir como `imput %`. Tomando elementos de ésta se pueden extraer cada resultado que interese para poderlo utilizar de nuevo.

**GeometricCoefficients2D**[`pseudometrica,variables,nombre tiempo`] Obtiene los símbolos de Christoffel, el sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas, los coeficientes del tensor de curvatura de una pseudo- métrica riemanniana y la curvatura seccional de una pseudo-métrica riemanniana. Tiene como primera entrada `pseudometrica`, que es la matriz de la pseudo-métrica de la variedad  $M$  respecto la carta  $x$ , los coeficientes pseudo-métricos dependen de la segunda entrada, `variables`. La tercera entrada, `nombretiempo`, que es el nombre que asignamos al ‘tiempo’ en el sistema de ecuaciones diferenciales que verifican las geodésicas. La salida consiste en varias líneas que van explicando los resultados que se van obteniendo. Para obtener una lista de los resultados anteriores basta introducir como `imput %`. Tomando elementos de ésta se pueden extraer cada resultado que interese para poderlo utilizar de nuevo.

**GeometricCoefficients**[`pseudometrica,variables,nombretiempo`] Obtiene los símbolos de Christoffel, el sistema de ecuaciones diferenciales de las geodésicas y los coeficientes del tensor de curvatura de una pseudo-métrica riemanniana. Tiene como primera entrada `pseudometrica`, que es la matriz de la pseudo-métrica de la variedad  $M$  respecto la carta  $x$ , los coeficientes pseudo-métricos dependen de la entrada `variables`. La tercera entrada, `nombretiempo`, que es el nombre que asignamos al ‘tiempo’ en el sistema de ecuaciones diferenciales que verifican las geodésicas. La salida consiste en varias líneas que van explicando los resultados que se van obteniendo. Para obtener una lista de los resultados anteriores basta introducir como `imput %`. Tomando elementos de ésta se pueden extraer cada resultado que interese para poderlo utilizar de nuevo. A diferencia de la función `GeometricCoefficients2D` funciona en cualquier dimensión, pero no calcula la curvatura seccional.

**InmersionGeometricCoefficients2D**[`paraboloide, Euclidean-Metric[3],{u,v}, {x,y,z},t`]

La matriz de la pseudométrica es la siguiente:  

$$= \{ \{ 1 + 4u^2, 4uv \}, \{ 4uv, 1 + 4v^2 \} \};$$

Los símbolos de Christoffel son los siguientes:

$$\left\{ \left\{ \left\{ \frac{4u}{1+4u^2+4v^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{4u}{1+4u^2+4v^2} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \frac{4v}{1+4u^2+4v^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{4v}{1+4u^2+4v^2} \right\} \right\} \right\}$$

Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son:

$$\left\{ \frac{4 u u'[t]^2}{1+4 u^2+4 v^2} + \frac{4 u v'[t]^2}{1+4 u^2+4 v^2} + u''[t], \frac{4 v u'[t]^2}{1+4 u^2+4 v^2} + \frac{4 v v'[t]^2}{1+4 u^2+4 v^2} + v''[t] \right\}$$

Los coeficientes del tensor de curvatura son:

$$\left\{ \left\{ \{0, 0\}, \{0, 0\} \right\}, \left\{ \left\{ 0, \frac{4}{1+4 u^2+4 v^2} \right\}, \left\{ -\frac{4}{1+4 u^2+4 v^2}, 0 \right\} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \left\{ 0, -\frac{4}{1+4 u^2+4 v^2} \right\}, \left\{ \frac{4}{1+4 u^2+4 v^2}, 0 \right\} \right\}, \left\{ \{0, 0\}, \{0, 0\} \right\} \right\}$$

La curvatura seccional viene dada por

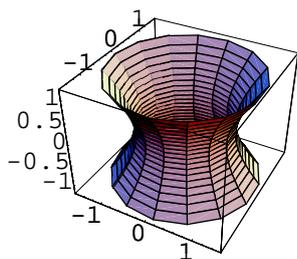
$$\frac{4}{(1+4 u^2+4 v^2)^2}$$

Para obtener los resultados anteriores introduce después de la ejecución ‘%’ como un input

**1.7. Ejemplos.** La superficies inmersas en el 3-espacio euclídeo heredan una métrica riemanniana. Si disponemos de una carta de la superficie y las funciones que nos dan las coordenadas cartesianas euclídeas en función de las de la superficie, entonces podemos calcular los diversos coeficientes geométricos.

**hiperboloide = {Cosh[ $\theta$ ] Cos[ $\varphi$ ], Cosh[ $\theta$ ] Sin[ $\varphi$ ], Sinh[ $\theta$ ]} ;**

**ParametricPlot3D[hiperboloide, { $\varphi$ , -4, 4}, { $\theta$ , -1, 1}]**



**ImmersionGeometricCoefficients2D[hiperboloide, EuclideanMetric[3], { $\varphi, \theta$ }, {x, y, z}, t]**

La matriz de la pseudométrica es la siguiente:

$$\left\{ \left\{ \cosh(\theta)^2, 0 \right\}, \left\{ 0, \cosh(2\theta) \right\} \right\}$$

Los símbolos de Christoffel son los siguientes:

$$\left\{ \left\{ \{0, \tanh(\theta)\}, \{ \tanh(\theta), 0 \} \right\}, \left\{ \left\{ -\frac{\tanh(2\theta)}{2}, 0 \right\}, \left\{ 0, \tanh(2\theta) \right\} \right\} \right\}$$

Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son:

$$\left\{ 2 \tanh(\theta) \theta'(t) \varphi'(t) + \varphi''(t), \tanh(2\theta) \theta'(t)^2 - \frac{\tanh(2\theta) \varphi'(t)^2}{2} + \theta''(t) \right\}$$

Los coeficientes del tensor de curvatura son:

$$\left\{ \left\{ \left\{ \{0, 0\}, \{0, 0\} \right\}, \left\{ \left\{ 0, -(\cosh(\theta)^2 \operatorname{Sech}(2\theta)) \right\}, \left\{ \cosh(\theta)^2 \operatorname{Sech}(2\theta), 0 \right\} \right\}, \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ \left\{ \{0, \cosh(\theta)^2 \operatorname{Sech}(2\theta)\}, \left\{ -(\cosh(\theta)^2 \operatorname{Sech}(2\theta)), 0 \right\} \right\}, \left\{ \{0, 0\}, \{0, 0\} \right\} \right\} \right\}$$

La curvatura seccional viene dada por

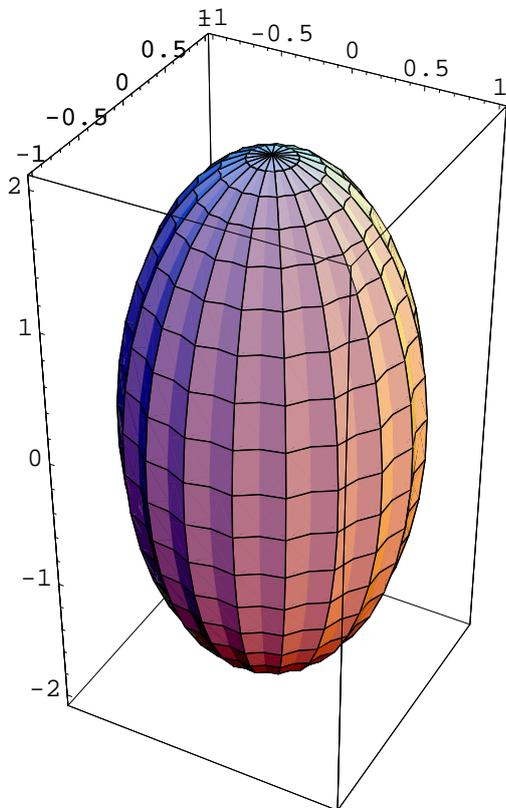
$$-\operatorname{Sech}(2\theta)^2$$

Para obtener los resultados anteriores introduce después de la ejecución ‘%’ como un input

**elipsoide = {a Cos[ $\theta$ ] Cos[ $\varphi$ ], a Cos[ $\theta$ ] Sin[ $\varphi$ ], c Sin[ $\theta$ ]} ;**

**eli = elipsoide // . {a > 1, c > 2} ;**

**ParametricPlot3D[eli, { $\varphi$ , -2 Pi, 2 Pi}, { $\theta$ , -Pi/2, Pi/2}]**



**InmersionGeometricCoefficients2D[elipsoide, EuclideanMetric[3],**  
**{ $\varphi, \theta$ }, { $x, y, z$ }, t]**

La matriz de la pseudométrica es la siguiente:

$$\left\{ \left\{ \frac{a^2 + c^2 + (-a^2 + c^2) \cos(2\theta)}{2}, 0 \right\}, \{0, a^2 \cos(\theta)^2\} \right\}$$

Los símbolos de Christoffel son los siguientes:

$$\left\{ \left\{ \left\{ - \left( \frac{(-a^2 + c^2) \sin(2\theta)}{a^2 + c^2 + (-a^2 + c^2) \cos(2\theta)} \right), 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{2a^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{a^2 + c^2 + (-a^2 + c^2) \cos(2\theta)} \right\} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \{0, -\tan(\theta)\}, \{-\tan(\theta), 0\} \right\} \right\}$$

Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son:

$$\left\{ - \left( \frac{(-a^2 + c^2) \sin(2\theta) \theta'(t)^2}{a^2 + c^2 + (-a^2 + c^2) \cos(2\theta)} \right) + \frac{2a^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \varphi'(t)^2}{a^2 + c^2 + (-a^2 + c^2) \cos(2\theta)} + \theta''(t), \right.$$

$$\left. - 2 \tan(\theta) \theta'(t) \varphi'(t) + \varphi''(t) \right\}$$

Los coeficientes del tensor de curvatura son:

$$\left\{ \left\{ \left\{ \{0, 0\}, \{0, 0\} \right\}, \left\{ \left\{ 0, \frac{2a^2 c^2 \cos(\theta)^2}{a^2 + c^2 + (-a^2 + c^2) \cos(2\theta)} \right\}, \right. \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{-2a^2 c^2 \cos(\theta)^2}{a^2 + c^2 + (-a^2 + c^2) \cos(2\theta)}, 0 \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \left\{ 0, \frac{-2a^2 c^2 \cos(\theta)^2}{a^2 + c^2 + (-a^2 + c^2) \cos(2\theta)} \right\}, \right. \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{2a^2 c^2 \cos(\theta)^2}{a^2 + c^2 + (-a^2 + c^2) \cos(2\theta)}, 0 \right\}, \{0, 0\}, \{0, 0\} \right\} \right\}$$

La curvatura seccional viene dada por

$$\frac{4c^2}{(a^2 + c^2 + (-a^2 + c^2) \cos(2\theta))^2}$$

Para obtener los resultados anteriores introduce después de la ejecución ‘%’ como un input

Una variedad pseudo-riemanniana viene determinada en cada carta por una matriz simétrica que depende de las coordenadas. A partir de sus coeficientes se pueden calcular, los símbolos de Christoffel, las geodésicas, el tensor de curvatura y en el caso de dimensión dos la curvatura seccional. Estudiamos a continuación las bolas hiperbólicas de dimensiones tres y dos.

**GeometricCoefficients[HiperbolicBall[3,{u,v,w}],{u,v,w},t]**

La matriz de la pseudométrica es la siguiente:

$$\left\{ \left\{ \frac{9}{(1-u^2-v^2-w^2)^2}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{9}{(1-u^2-v^2-w^2)^2}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{9}{(1-u^2-v^2-w^2)^2} \right\} \right\}$$

Los símbolos de Christoffel son los siguientes:

$$\left\{ \left\{ \left\{ \frac{-2u}{-1+u^2+v^2+w^2}, \frac{-2v}{-1+u^2+v^2+w^2}, \frac{-2w}{-1+u^2+v^2+w^2} \right\}, \left\{ \frac{-2v}{-1+u^2+v^2+w^2}, \frac{2u}{-1+u^2+v^2+w^2}, 0 \right\}, \left\{ \frac{-2w}{-1+u^2+v^2+w^2}, 0, \frac{2u}{-1+u^2+v^2+w^2} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \frac{2v}{-1+u^2+v^2+w^2}, \frac{-2u}{-1+u^2+v^2+w^2}, 0 \right\}, \left\{ \frac{-2u}{-1+u^2+v^2+w^2}, \frac{-2v}{-1+u^2+v^2+w^2}, \frac{-2w}{-1+u^2+v^2+w^2} \right\}, \left\{ 0, \frac{-2w}{-1+u^2+v^2+w^2}, \frac{2v}{-1+u^2+v^2+w^2} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \frac{2w}{-1+u^2+v^2+w^2}, 0, \frac{-2u}{-1+u^2+v^2+w^2} \right\}, \left\{ 0, \frac{2w}{-1+u^2+v^2+w^2}, \frac{-2v}{-1+u^2+v^2+w^2} \right\}, \left\{ \frac{-2u}{-1+u^2+v^2+w^2}, \frac{-2v}{-1+u^2+v^2+w^2}, \frac{-2w}{-1+u^2+v^2+w^2} \right\} \right\} \right\}$$

Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son:

$$\left\{ \frac{-2u u'(t)^2}{-1+u^2+v^2+w^2} - \frac{4v u'(t) v'(t)}{-1+u^2+v^2+w^2} + \frac{2u v'(t)^2}{-1+u^2+v^2+w^2} - \frac{4w u'(t) w'(t)}{-1+u^2+v^2+w^2} + \frac{2u w'(t)^2}{-1+u^2+v^2+w^2} + u''(t), \right. \\ \left. \frac{2v u'(t)^2}{-1+u^2+v^2+w^2} - \frac{4u u'(t) v'(t)}{-1+u^2+v^2+w^2} - \frac{2v v'(t)^2}{-1+u^2+v^2+w^2} - \frac{4w v'(t) w'(t)}{-1+u^2+v^2+w^2} + \frac{2v w'(t)^2}{-1+u^2+v^2+w^2} + v''(t), \right. \\ \left. \frac{2w u'(t)^2}{-1+u^2+v^2+w^2} + \frac{2w v'(t)^2}{-1+u^2+v^2+w^2} - \frac{4u u'(t) w'(t)}{-1+u^2+v^2+w^2} - \frac{4v v'(t) w'(t)}{-1+u^2+v^2+w^2} - \frac{2w w'(t)^2}{-1+u^2+v^2+w^2} + w''(t) \right\}$$

Los coeficientes del tensor de curvatura son:

$$\left\{ \left\{ \left\{ \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\} \right\}, \left\{ \left\{ 0, \frac{-36}{(-1+u^2+v^2+w^2)^4}, 0 \right\}, \left\{ \frac{36}{(-1+u^2+v^2+w^2)^4}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0 \right\} \right\}, \left\{ \left\{ 0, \frac{36}{(-1+u^2+v^2+w^2)^4}, 0, 0 \right\}, \left\{ \frac{-36}{(-1+u^2+v^2+w^2)^4}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0 \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \left\{ 0, \frac{36}{(-1+u^2+v^2+w^2)^4}, 0 \right\}, \left\{ \frac{-36}{(-1+u^2+v^2+w^2)^4}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0 \right\} \right\}, \left\{ \left\{ 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0 \right\} \right\}, \left\{ \left\{ 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{-36}{(-1+u^2+v^2+w^2)^4} \right\}, \left\{ 0, \frac{36}{(-1+u^2+v^2+w^2)^4}, 0 \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \left\{ 0, 0, \frac{36}{(-1+u^2+v^2+w^2)^4} \right\}, \left\{ 0, 0, 0 \right\}, \left\{ \frac{-36}{(-1+u^2+v^2+w^2)^4}, 0, 0 \right\} \right\}, \left\{ \left\{ 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{36}{(-1+u^2+v^2+w^2)^4} \right\}, \left\{ 0, \frac{-36}{(-1+u^2+v^2+w^2)^4}, 0 \right\} \right\}, \left\{ \left\{ 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0 \right\} \right\} \right\}$$

Para obtener los resultados anteriores introduce después de la ejecución ‘%’ como un input

## 2. Integración numérica de las geodésicas

El paquete dispone de dos funciones denominadas **NGeodesicLines** e **InmersionNGeodesicLines3D**. La primera de ellas se puede utilizar para cualquier inmersión y la salida es una lista de pares que contienen las coordenadas de los puntos y de las velocidades de una geodésica. La segunda se utiliza solamente para inmersiones en  $\mathbb{R}^3$  y su salida es de tipo gráfico; dibuja una geodésica en una superficie dando su punto y velocidad iniciales. Describimos a continuación estas funciones y después daremos algunos ejemplos.

**NGeodesicLines[chrís,variables,puntoinicial,velocidadinicial, incremento,iteraciones]** tiene como entrada los coeficientes de Christoffel, las variables de las que dependen, las coordenadas del punto inicial, las coordenadas de la velocidad inicial, el incremento de tiempo que se va a utilizar para saltar de un punto al siguiente de la geodésica y el número de iteraciones que vamos a realizar para encontrar más o menos coordenadas de puntos de la geodésica. La salida consiste en un lista de pares, los primeros elementos del par son coordenadas de puntos de la geodésica y los segundos elementos las coordenadas del vector velocidad en ese punto.

**InmersionNGeodesicLines3D[componentes,inductora,variables1, variables2,nombretiempo,puntoinicial,velocidadinicial, incremento, iteraciones,rango1,rango2]** tiene como primera entrada componentes que son  $n$  funciones con valores reales que dependen de las  $m$  variables que componen, variables1, que son precisamente las explicitadas en la tercera entrada. Estas funciones se supone que se han obtenido al considerar una inmersión  $f: M \rightarrow N$  entre variedades y tomar sistemas coordenados  $x$  e  $y$  respectivamente, se tiene que componentes =  $yfx^{-1}$ . La segunda entrada es la matriz de la pseudo-métrica de la variedad  $N$  respecto la carta  $y$ , los coeficientes pseudo-métricos dependen de la cuarta entrada variables2. La más usual en los ejemplos que acompañan este paquete es EuclideanMetric[3], que es la matriz identidad de dimensión 3x3. La variable nombretiempo es el nombre que asignamos al ‘tiempo’ en el sistema de ecuaciones diferenciales que verifican las geodésicas. Las siguientes variables son las coordenadas del punto inicial, las coordenadas de la velocidad inicial, el incremento de tiempo que se va a utilizar para saltar de un punto al siguiente de la geodésica y el número de iteraciones que vamos a realizar para encontrar más o menos coordenadas de puntos de la geodésica. La variables, rango1, rango2, son de la forma {variables1[[1]],a,b}, {variables1[[2]],c,d} y determinan los rangos para dibujar en paramétricas la superficie dada por la inmersión definida en la variable componentes. En variables1[[1]] se repite la primera de las variables que componen variables1 y análogamente para variables1[[2]] .

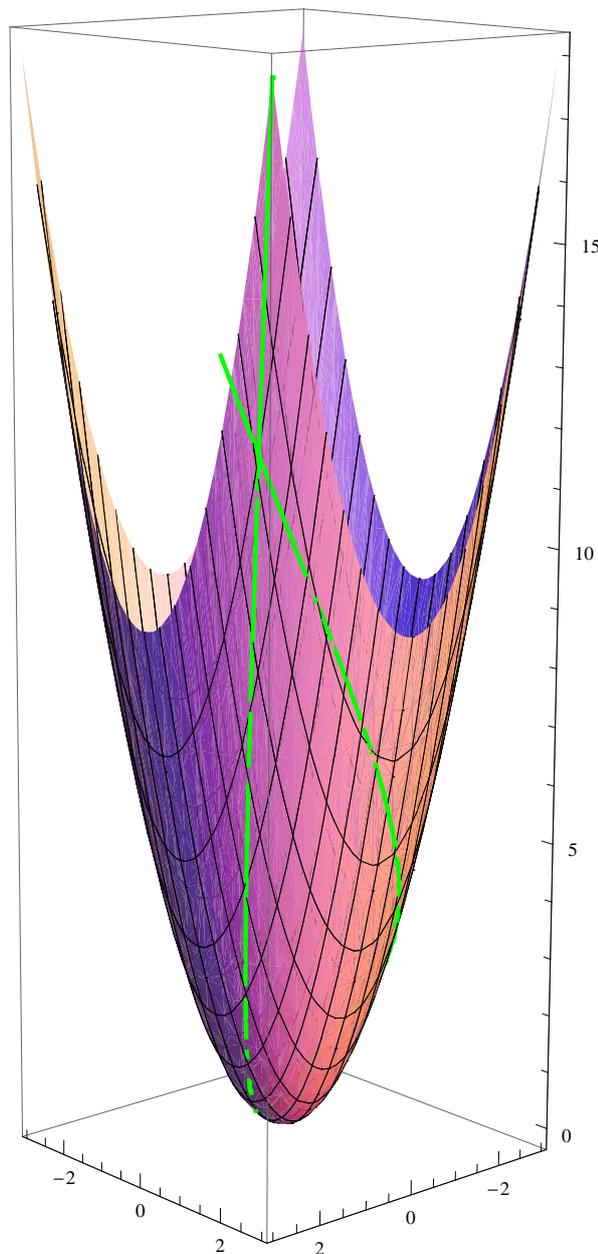
En el siguiente ejemplo tenemos una geodésica en el paraboloides. Se observa que al menos se corta a sí misma una vez.

```
InmersionNGeodesicLines3D[paraboloide, EuclideanMetric[3],
  {u, v}, {x, y, z}, t, {3, 3}, {-1, -2}, 0.05, 400, {u, -3, 3}, {v, -3, 3}]
```

Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son:

$$\left\{ \frac{4 u u' [t]^2}{1 + 4 u^2 + 4 v^2} + \frac{4 u v' [t]^2}{1 + 4 u^2 + 4 v^2} + u'' [t], \frac{4 v u' [t]^2}{1 + 4 u^2 + 4 v^2} + \frac{4 v v' [t]^2}{1 + 4 u^2 + 4 v^2} + v'' [t] \right\}$$

Geodésica con el punto y la velocidad inicial introducidos:



En este caso se considera una geodésica en el hiperboloide.

```

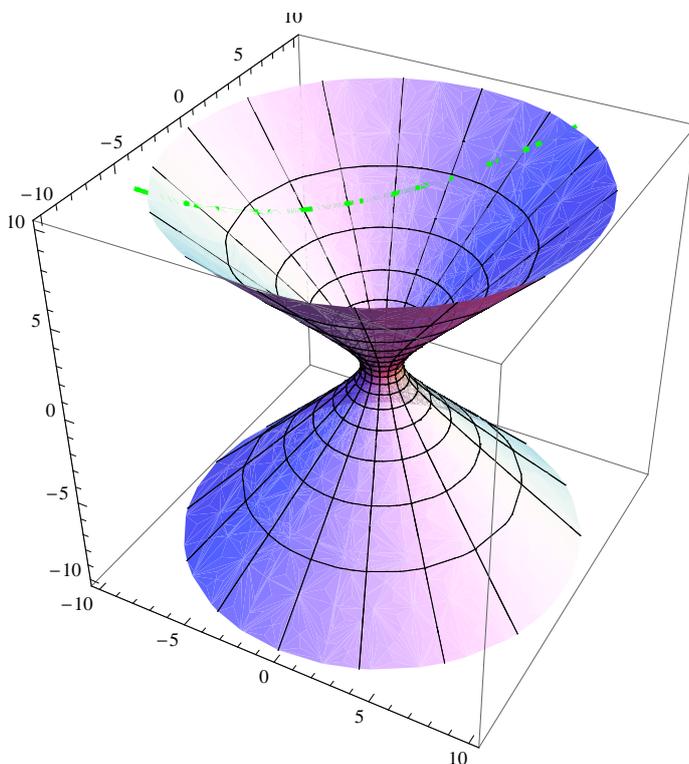
hiperboloide = {Cosh[θ] Cos[φ], Cosh[θ] Sin[φ], Sinh[θ]}
{Cos[φ] Cosh[θ], Cosh[θ] Sin[φ],
 Sinh[θ]}
InmersionNGeodesicLines3D[hiperboloide, EuclideanMetric[3],
 {φ, θ}, {x, y, z}, t, {1,
 3}, {0.1, -0.1}, 0.2, 1000, {φ, 0, 2 Pi}, {θ, -3, 3}]
{Cos[φ] Cosh[θ], Cosh[θ] Sin[φ], Sinh[θ]}
{Cos[φ] Cosh[θ], Cosh[θ] Sin[φ], Sinh[θ]}

```

Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son:

$$\left\{ 2 \operatorname{Tanh}[\theta] \theta' [t] \varphi' [t] + \varphi'' [t], \operatorname{Tanh}[2 \theta] \theta' [t]^2 - \frac{1}{2} \operatorname{Tanh}[2 \theta] \varphi' [t]^2 + \theta'' [t] \right\}$$

Geodésica con el punto y la velocidad inicial introducidos:



### 3. Algunas aplicaciones informáticas para la geometría

Algunas de las aplicaciones de los siguientes enlaces se adaptan bien a los contenidos de este curso. Téngase en cuenta que los muchos enlaces funcionan durante un tiempo limitado. No obstante en el caso que no funcionen realizando alguna búsqueda en la red se suelen encontrar los nuevos lugares donde han sido alojadas las páginas o aplicaciones que se mencionan a continuación.

ENLACE 3.1. Dibuja superficies en implícitas y paramétricas. En ellas se puede considerar la métrica inducida por el ambiente que puede ser euclídeo o minkowskiano. También trabaja con métricas pseudoriemannianas en un abierto del plano. Calcula la curvatura en cada punto, dibuja geodésicas, realiza transporte paralelo. En mi opinión es una herramienta docente motivadora e interesante.

<http://www.uv.es/~montesin/>

En el momento de escribir estas notas el programa anterior no se ha actualizado para que pueda funcionar con el sistema X (10.x) del MacOS.

ENLACE 3.2. Aquí se puede localizar la aplicación 3D-XplorMath (sólo para Macintosh) que es una herramienta para la visualización de objetos matemáticos, que incluye superficies, curvas y poliedros. También contiene otra versión de la aplicación 3D-XplorMath-J que requiere Java y que funciona en todos los sistemas.

<http://3d-xplormath.org/index.html>

ENLACE 3.3. Contiene información sobre un libro de A. Gray que además geometría diferencial enseña a utilizar Mathematica para representar gráficamente curvas y superficies, calcular curvaturas, y otros cálculos de interés en geometría diferencial.

<http://alpha01.dm.unito.it/personalpages/abbena/gray/>

Material adicional se puede encontrar en la página web dedicada a la memoria de Alfred Gray

<http://www.math.umd.edu/research/bianchi/>

ENLACE 3.4. Visualization ToolKit (VTK) es un código fuente abierto, se trata de software libre para gráficas de ordenador en 3D, procesamiento de imagen y visualización, utilizado por miles de investigadores en el mundo. VTK consiste en una librería de clase C++ y varios modos de interfaces que incluyen Tcl/Tk, Java, and Python. VTK dispone de una amplia variedad de algoritmos que incluyen métodos escalares, vectoriales, tensoriales y volumétricos. Tiene técnicas avanzadas y numerosos algoritmos para mezclar imágenes 2D y 3D. Ha sido instalado y comprobado en plataformas basadas en Unix, Windows 98 y Mac OSX.

<http://public.kitware.com/VTK/>

#### 4. Otros enlaces interesantes

ENLACE 4.1. La página web personal del autor de estas notas contiene materiales didácticos relacionados con geometría diferencial y el grupo fundamental, así como otros trabajos de divulgación sobre poliedros, nudos, ...

<http://www.unirioja.es/cu/luhernan/>

ENLACE 4.2. Tiene enlaces a varias páginas web relacionadas con Geometría Diferencial Elemental

<http://www.math.wayne.edu/~drucker/diffgeomrefsF07.html>

ENLACE 4.3. Se trata de un estudio de visualización de sistemas dinámicos realizado en la tesis de Helwig Löffelmann “Visualizing Local Properties and Characteristic Structures of Dynamical Systems”

<http://www.cg.tuwien.ac.at/~helwig/diss/diss.htm>

ENLACE 4.4. Contiene publicaciones on line, videos, imagenes de superficies, etc

<http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/>

## Bibliografía

1. Apostol, T.M. *Análisis Matemático*, 2ª edición, ed. Reverté, 1976.
2. Bishop, R.L. *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, 1964.
3. Bredon, G.E. *An Introduction to Transformation Groups*, Academic Press, New York, 1979.
4. Boothby, W.M. *Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1975.
5. Brickell, F., Clark, R.S. *Differentiable manifolds. An Introduction*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.
6. Chevalley, C. *Theory of Lie Groups*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1946.
7. Conner, P.E. *Differentiable Periodic Maps* (second edition), Springer, 1979.
8. Cordero, L. A., Fernández, M. and Gray, A. *Geometría diferencial de curvas y superficies* (con Mathematica), Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
9. Cheeger, J. and Ebin, D.G. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holland/ American Elsevier, 1975.
10. Carmo, M. P. do. *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1993.
11. Carmo, M. P. do. *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Universidad Textos, 1994.
12. Bröcker, T. and Jänich, K. *Introducción a la Topología Diferencial*, Editorial AC, 1977.
13. Dubrovin, B. A., Fomenko, A.T. and Novikov S. P. *Modern Geometry- Methods. Part II. The Geometry and Topology of Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1990.
14. Fleming, W. *Functions of Several Variables*, (2nd edition), Springer Verlag, 1977, New York.
15. Guillemin, V. and Pollack, A. *Differential Topology*, Prentice Hall, 1974.
16. Gray, A., Abbena, E. and Salamon, S. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica (3e)*, CRC Press, 2006.
17. Hicks, N. J. *Notas sobre Geometría Diferencial*, Editorial Hispano Europea, 1974.
18. Hirsch, M.W. *Differential Topology*, Springer-Verlag, 1976.
19. Izzo, A.J.  *$C^r$  Convergence of Picard's successive approximations*, P. of The Amer. Math. Soc., 127, 7, 2059-2063 (1999).
20. Kobayashi, S. and Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry. Volume I and II*, John Wiley and Sons, Inc., 1963.
21. Lang, S. *Differential and Riemannian Manifolds*, Springer (GTM 160), 1995.
22. Madsen, I. and Tornehave, J. *From Calculus to Cohomology*, Cambridge Univ. Press, 1997.
23. Margalef J. y Outerelo, E. *Topología Diferencial*, C.S.I.C, 1988.
24. Matsushima, Y. *Differentiable Manifold*, Marcel Decker, New York, 1972.
25. Milnor, J. W. *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. Math. 64 (1956), 399-405.

26. Milnor, J. W. *Morse Theory*, Princeton University Press (Study 51), 1963.
27. Milnor, J. and Stasheff, J.D. *Characteristic classes*, Princeton University Press (Study 51), 1974.
28. Mishchenko, A. and Fomenko, A. *A Course of Differential Geometry and Topology*, Mir Publishers Moscow, 1988.
29. Montesinos, J. M. *Classical Tessellations and Three-Manifolds*, Springer, 1985.
30. Okubo, T. *Differential Geometry*, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1987.
31. Olver, P. J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag New York, 1993.
32. O'Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry. With Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.
33. Outerelo, E. y Ruiz J. M. *Topología Diferencial. Variedades con borde. Transversalidad. Aproximación*, Addison-Wiley, 1998.
34. Poor, W. L. *Differential Geometric Structure*, McGraw-Hill, New York, 1981.
35. Sharpe, R. W. *Differential Geometry. Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, Springer (GTM 166), 1997.
36. Singer, I.M. and Thorpe, J.A. *Lecture notes on elementary topology and geometry*, Springer-Verlag, 1967.
37. Thorpe, J.A. *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer-Verlag, 1979.
38. Thurston, W.P. *Three-Dimensional Geometry and Topology. Volume 1*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1997.
39. Vinberg, E. B. (Ed) *Geometry II. Spaces of constant Curvature*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 29, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
40. Warner, F.W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scoot, Foresman and Company, 1971.
41. Willmore, T.J. *Riemannian Geometry*, Clarendon Press, Oxford, 1993.
42. Whitney, H. *Differentiable Manifolds*, Ann. Maths. 37, no. 3, (1936) 645-680.
43. Whitney, H. *Self intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space*, Ann. Maths. 45 (1944) 220-246.
44. Eves, H. *Estudio de las Geometrías, Tomos I y II*, UTEHA, Méjico, 1969.
45. Ríbnikov, K. *Historia de las Matemáticas*, Editorial Mir, Moscú, 1987.
46. Bonola, R. *Non-euclidean Geometry*, Dover Publications, Inc., New York, 1955.