

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Departamento de Matemáticas, Estadística y  
Computación

**CONVERGENCIA EN  $L^p$  CON PESOS DE LA  
SERIE DE FOURIER RESPECTO DE  
ALGUNOS SISTEMAS ORTOGONALES**

por

Juan Luis Varona Malumbres

Tesis Doctoral. Realizada bajo la di-  
rección del Dr. D. José J. Guadalupe  
Hernández.

Año 1988.



La presente Tesis Doctoral fue defendida, en el Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación de la Universidad de Cantabria, el día 10 de diciembre de 1988, ante el siguiente tribunal:

**Presidente:** Dr. D. José Manuel Bayod Bayod, Universidad de Cantabria.

**Secretario:** Dr. D. Francisco José Ruiz Blasco, Universidad de Zaragoza.

**Vocal 1:** Dr. D. José Manuel Correas Dobato, Universidad de Zaragoza.

**Vocal 2:** Dr. D. Miguel Lobo Hidalgo, Universidad de Cantabria.

**Vocal 3:** Dr. D. Francisco Marcellán Español, Universidad Politécnica de Madrid.

Obtuvo la calificación de Apto “cum laude” (la mayor que existía en la legislación vigente cuando se defendió la tesis). Posteriormente, recibió el Premio Extraordinario de Doctorado.

Dicha tesis fue editada por la Universidad de Zaragoza: “Convergencia en  $L^p$  con pesos de la serie de Fourier respecto de algunos sistemas ortogonales”, Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, Sección 3, n.º 22, Zaragoza, 1989.

Lo que aquí aparece es una reedición realizada en  $\text{\LaTeX}$ , y es que, con el tiempo y los cambios de formatos electrónicos, ningún procesador de texto era ya capaz de leer los archivos con el texto original. Aunque la paginación y el aspecto ha cambiado algo, el contenido es el mismo, salvo algunas erratas sin importancia que han sido corregidas. Lamentablemente, en el proceso de cambio de formato (efectuado, en parte, con la ayuda de `rtf2latex2e`) se introdujeron erratas nuevas, que ha habido que tratar de eliminar; probablemente sobrevivirán algunas.

Logroño, 1 de julio de 2004.

Juan Luis Varona Malumbres, [jvarona@dmc.unirioja.es](mailto:jvarona@dmc.unirioja.es)

P. D.: Última revisión de erratas de la reedición en  $\text{\LaTeX}$ : 13 de mayo de 2015.



# CONVERGENCIA EN $L^p$ CON PESOS DE LA SERIE DE FOURIER RESPECTO DE ALGUNOS SISTEMAS ORTOGONALES

Juan Luis Varona Malumbres

**RESUMEN:** Dado un sistema ortonormal completo respecto a una medida  $\mu$  definida en un intervalo, se aborda la convergencia en espacios de tipo  $L^p$  de las correspondientes series de Fourier. Los sistemas ortogonales que se analizan son los de Jacobi generalizados, los de Hermite generalizados, diversos sistemas de polinomios ortogonales respecto a pesos con deltas de Dirac y los sistemas de Bessel y Dini. En este estudio utilizamos estimaciones adecuadas de las funciones ortonormales y resultados de teoría  $A_p$  para resolver el problema de la acotación de la transformada de Hilbert con uno o dos pesos.

## WEIGHTED $L^p$ -CONVERGENCE OF THE FOURIER SERIES WITH RESPECT TO SEVERAL ORTHOGONAL SYSTEMS

**ABSTRACT:** Given an orthogonal complete system with respect to a measure  $\mu$  on an interval, we approach the convergence in weighted  $L^p$  spaces of the corresponding Fourier series. The orthogonal systems we analyze are generalized Jacobi, generalized Hermite, several systems of orthogonal polynomials with respect to weights with Dirac's deltas and Bessel and Dini's systems. In this study we use good estimates of the orthonormal functions and results on  $A_p$ -theory in order to solve the boundedness of the Hilbert transform with one or two weights.

*1985 AMS classification:* Primary 42C15; Secondary 33A65, 42A50, 42C05.

*Key words and phrases:* Orthogonal polynomials, Hilbert transform,  $A_p$  weights, mean convergence.



D. José J. Guadalupe Hernández, Doctor en Ciencias Matemáticas (Universidad de Zaragoza), Profesor Titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza,

CERTIFICA:

Que la Tesis Doctoral “Convergencia en  $L^p$  con pesos de la serie de Fourier respecto de algunos sistemas ortogonales” ha sido realizada bajo mi dirección por el Doctorando D. Juan Luis Varona Malumbres.

AUTORIZA:

La presentación de dicha Tesis en conformidad con el Artículo 8.1 del Real Decreto 185/1985 de 23 de enero (B.O.E. 16-2-1985) por el que se regula el tercer ciclo de estudios universitarios, la obtención y expedición del Título de Doctor y otros estudios postgraduados.

Zaragoza, 26 de Octubre de 1988.

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Departamento de Matemáticas, Estadística y  
Computación

**CONVERGENCIA EN  $L^p$  CON PESOS DE LA  
SERIE DE FOURIER RESPECTO DE  
ALGUNOS SISTEMAS ORTOGONALES**

por

Juan Luis Varona Malumbres

Memoria presentada para optar al  
grado de Doctor en Ciencias Mate-  
máticas. Realizada bajo la dirección  
del Dr. D. José J. Guadalupe Her-  
nández.

Octubre de 1988.



Quiero agradecer al Profesor José J. Guadalupe la ayuda que me ha prestado durante estos últimos años, sin la cual no hubiera sido posible la realización de esta Memoria.

Por otra parte, expreso también mi gratitud a todos mis compañeros con los que he trabajado en colaboración durante estos años, en especial a Mario Pérez Riera.

Quedo asimismo agradecido a todos los que se han preocupado de realizar y agilizar los numerosos trámites necesarios para haber llegado a defender la presente Memoria, ante todo al Profesor Jaime Vinuesa, de la Universidad de Cantabria.

Por último, deseo hacer constar que, para su realización, este trabajo ha contado con una Ayuda a la Investigación de la Consejería de Educación, Cultura y Deportes, Instituto de Estudios Riojanos.

# INTRODUCCIÓN

Los problemas que se abordan en esta Memoria surgen al considerar cuándo un sistema ortogonal dado es base de algún  $L^p$ . Más en concreto, sea  $\phi_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , un conjunto de funciones ortonormales sobre un intervalo  $(a, b)$  y pertenecientes al espacio  $L^p(a, b)$  y a su conjugado  $L^q(a, b)$ ,  $1 < p < \infty$ . Diremos que el conjunto  $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  forma una base de  $L^p(a, b)$  si el desarrollo formal

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \int_a^b f(y) \phi_n(y) dy = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \phi_n(x)$$

de cada función  $f$  en  $L^p(a, b)$  converge a  $f$  en media de orden  $p$ .

Resulta obligado comenzar citando un importante precedente histórico. Hace más de cincuenta años, M. Riesz [1] probó el célebre teorema de la función conjugada, el cual sigue aún inspirando muchos trabajos.

Sea  $f$  integrable en  $(0, 2\pi)$  y formemos su función conjugada

$$\tilde{f}(e^{-in\theta}) \sim -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\operatorname{sgn} n) c_n e^{-in\theta}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

M. Riesz demostró que si  $f \in L^p(0, 2\pi)$ ,  $1 < p < \infty$ , entonces  $\tilde{f} \in L^p(0, 2\pi)$ , y por tanto  $-i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\operatorname{sgn} n) c_n e^{-in\theta}$  es una serie de Fourier, cumpliéndose además

$$\|\tilde{f}\|_p \leq C \|f\|_p.$$

De la acotación de la función conjugada puede obtenerse la desigualdad

$$\|S_n f\|_p \leq C \|f\|_p, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde

$$S_n(f, \theta) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{-ik\theta},$$

y de esto se deduce que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n f - f\|_p = 0$  para toda  $f \in L^p(0, 2\pi)$ ,  $1 < p < \infty$ .

El teorema de M. Riesz (1927) asegura que las funciones  $\sqrt{2/\pi} \cos(nx)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , forman una base de  $L^p(0, \pi)$  para todo  $p > 1$ . Más tarde se encuentran otros tres conjuntos que forman base de  $L^p(a, b)$ ; se trata de las funciones de Haar, las transformadas de Fourier de polinomios de Laguerre y las funciones de Walsh. Estos conjuntos son base de  $L^p(0, 1)$ ,  $L^p(-\infty, \infty)$  y  $L^p(0, 1)$  respectivamente para todos los valores de  $p > 1$  (en el caso de funciones de Haar, para  $p = 1$  también).

En 1946, Pollard [1] se plantea investigar la propiedad de convergencia en norma  $p$ . Los métodos del Análisis Funcional proporcionan condiciones suficientes y

necesarias útiles, pero no parecen ser un método general para determinar si un conjunto dado es base de  $L^p$ , lo que conduce a estudiar cada conjunto por separado. Pollard [2] estudia la convergencia de la serie de Fourier para polinomios de Legendre, que son ortogonales en  $L^2(-1, 1)$ , y prueba que forman base de  $L^p(-1, 1)$  si  $4/3 < p < 4$  y que no la forman si  $p < 4/3$  o  $p > 4$ . La idea de la demostración es básicamente la siguiente:

Denotemos  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  la sucesión ortonormal de polinomios de Legendre. Queremos conocer para qué valores de  $p$  es cierto que

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \left( \int_{-1}^1 f(y) p_k(y) dy \right) p_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

en la norma de  $L^p(-1, 1)$  para cada función  $f \in L^p(-1, 1)$ . La  $n$ -ésima suma parcial de la serie de Fourier,  $S_n f$ , es un operador integral dado por el núcleo de Dirichlet

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n p_k(x) p_k(y),$$

el cual, por la fórmula de Christoffel-Darboux, puede escribirse como

$$K_n(x, y) = u_n \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y}.$$

Manipulaciones convenientes de este núcleo, usando la fórmula de recurrencia para polinomios ortogonales, permiten ponerlo en la forma

$$K_n(x, y) = \alpha_n T_1(n, x, y) + \beta_n T_2(n, x, y) + \gamma_n T_3(n, x, y),$$

donde las constantes  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  y  $\gamma_n$  son acotadas y

$$\begin{aligned} T_1(n, x, y) &= p_{n+1}(x) \frac{p_{n+2}(y) - p_n(y)}{x - y}, & T_2(n, x, y) &= T_1(n, y, x), \\ T_3(n, x, y) &= p_{n+1}(x) p_{n+1}(y). \end{aligned}$$

Si escribimos

$$W_{i,n}(f, x) = \int_{-1}^1 T_i(n, x, y) f(y) dy, \quad i = 1, 2, 3,$$

la acotación uniforme de estos tres operadores es suficiente para probar la acotación de la serie de Fourier. Para ello se tienen en cuenta dos cosas:

(a) Que los polinomios verifican las estimaciones

$$|p_n(x)| \leq C(1 - x^2)^{-1/4}, \quad |p_{n+2}(x) - p_n(x)| \leq C(1 - x^2)^{1/4}, \quad x \in (-1, 1).$$

(b) Si denotamos  $q_n = p_{n+2} - p_n$ , y  $H$  la transformada de Hilbert,

$$W_{1,n}(f, x) = p_{n+1}(x)H(q_n f, x), \quad W_{2,n}(f, x) = -q_n(x)H(p_{n+1}f, x).$$

La acotación en norma  $p$  de estos operadores requiere, usando las estimaciones de (a), de la acotación de la transformada de Hilbert con ciertos pesos, y este problema puede ser actualmente abordado usando técnicas de teoría  $A_p$ .

A partir del trabajo de Pollard se inicia una extensa investigación en relación al estudio de bases respecto de sistemas ortogonales. El problema puede plantearse del siguiente modo:

Sean  $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  funciones ortonormales respecto de una medida  $d\mu$  en un intervalo  $[a, b]$ , y  $u, v$  dos pesos en  $[a, b]$ . Si denotamos por

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \hat{f}(k)\phi_k(x), \quad \hat{f}(k) = \int_a^b f(y)\phi_k(y) d\mu(y),$$

las sumas parciales de la serie de Fourier de una función  $f \in L^1(d\mu)$ , es conocido que la serie de Fourier de  $f \in L^2(d\mu)$  converge a  $f$  en la norma de  $f \in L^2(d\mu)$ . Se trata de ver para qué valores de  $p$ ,  $S_n f$  converge a  $f$  en  $L^p(u d\mu)$  para cada  $f \in L^p(v d\mu)$ , lo cual se traduce en que los operadores  $S_n$  sean uniformemente acotados de  $L^p(v d\mu)$  en  $L^p(u d\mu)$ .

Como dice Askey, no es mucho lo que se ha conseguido hasta ahora, y las aportaciones pueden mencionarse brevemente.

Si  $d\mu = w dx$ ,  $[a, b] = [-1, 1]$  y  $w$  un peso de Jacobi, el estudio de este problema ha sido desarrollado por el mismo Pollard [3, 4], Wing [1], Newman-Rudin [1] y Muckenhoupt [1], y para pesos de Jacobi generalizados por Badkov [1–4]. En cualquier caso se trata de pesos radiales en  $[-1, 1]$ .

Si  $w$  es un peso de Hermite o de Laguerre, la solución del problema se debe a Askey-Wainger [1] y Muckenhoupt [2, 3]; y para funciones de Bessel, a Wing [1] y Benedek-Panzone [1–3].

Cuando  $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  son autofunciones de un problema de Sturm-Liouville, existen soluciones en casos particulares debidas a Gilbert [1, 2], Benedek-Panzone [1, 5], Genozov [1], Barceló-Córdoba [1] y Benzinger [1].

En todos los casos la idea de la demostración consiste en descomponer el núcleo de Dirichlet de la serie de Fourier de manera conveniente, encontrar buenas estimaciones para los  $\phi_n$  y tratar de acotar la transformada de Hilbert con ciertos pesos. La solución de este último aspecto del problema encuentra su sitio natural en la teoría  $A_p$  de pesos introducida por Muckenhoupt [4].

La presente Memoria se halla dividida en seis capítulos, cuyo contenido expon-dremos a continuación. Hemos supuesto, quizás equivocadamente, que el lector pudiera no estar familiarizado con alguno de los conceptos que aquí se tratan,

por lo que, para conseguir una mayor claridad, hemos decidido explicarlos aunque pueden consultarse en diversas fuentes. En ningún momento hemos intentado apropiarnos de resultados ya conocidos pese a que se incluyan sus demostraciones. En cada capítulo y en esta introducción se intenta distinguir lo que es nuevo de lo que ya estaba anteriormente desarrollado, así como de las demostraciones originales aunque el resultado fuese ya conocido por otro método. Por otra parte, en aras de una mayor claridad, se repiten ideas y demostraciones parecidas en capítulos diversos. Esto está pensado fundamentalmente para permitir, en lo posible, leer los distintos capítulos con independencia unos de otros.

El Capítulo I es meramente introductorio. Contiene conceptos y resultados generales que se utilizarán a lo largo de la Memoria. Se hace hincapié en los sistemas de polinomios ortogonales y en particular en los sistemas clásicos y algunas de sus generalizaciones. Asimismo, se presentan las estimaciones que más adelante se necesitarán para abordar el problema de la convergencia.

En el Capítulo II, en primer lugar se hace un resumen general de lo ya conocido sobre teoría  $A_p$  de pesos, explicándose algunos de los resultados más importantes. Un par de pesos  $(u, v)$  definidos en un intervalo  $(a, b)$  se dice que están en la clase  $A_p$  si existe una constante  $C$  independiente del intervalo  $I \subset (a, b)$  tal que

$$\left( \int_I u(x) dx \right) \left( \int_I v(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq C|I|^p \quad (1 < p < \infty).$$

Esta caracterización sólo es útil para nuestros propósitos cuando se conocen estimaciones de los polinomios (o funciones) ortonormales independientes de  $n$  en todo el intervalo, como ocurre por ejemplo con los polinomios de Legendre. Pero esto no es posible en la mayoría de los casos; en general, las estimaciones que se obtienen dependen de  $n$ . Para salvar esta dificultad se introduce la teoría  $A_p$  uniforme para familias de pesos  $(u_n, v_n)$ , y se analiza lo que sucede con diversas familias concretas.

En el Capítulo III se estudia en profundidad la convergencia de series de Fourier de polinomios ortonormales definidos en el intervalo  $[-1, 1]$ . Para ello, se parte de una conocida descomposición del núcleo en tres sumandos, que lleva de modo inmediato a la descomposición de la serie de Fourier en otros tres. Entonces, se analizan las condiciones necesarias y suficientes para que cada uno de los tres sumandos sea uniformemente acotado, utilizando para ello la teoría  $A_p$  uniforme desarrollada en el capítulo anterior. Como consecuencia, se obtienen fácilmente todos los resultados conocidos para polinomios de Jacobi, así como algunas de sus generalizaciones (Badkov), y se da una caracterización general de pesos para los cuales el método anterior asegura la convergencia. Asimismo, se demuestra que la convergencia en media de las series de Fourier de diversos sistemas de polinomios debidos a Pollaczek sólo se verifica para  $p = 2$ .

En el Capítulo IV se estudia lo que sucede con la serie de Fourier de polinomios ortogonales en  $[-1, 1]$  respecto a la medida  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta_{-1} + N\delta_1$ , donde  $\delta_a$  denota una delta de Dirac en  $a$ , encontrándose condiciones necesarias y suficientes para la convergencia en media. Para ello se necesita como paso previo encontrar las acotaciones que verifican los polinomios normalizados. Es esta la primera vez en que se aborda la convergencia de la serie de Fourier respecto a una medida no absolutamente continua, desarrollándose un método que puede ser útil para averiguar lo que ocurre con diversos sistemas ortogonales respecto a medidas con deltas de Dirac, una vez conocidas las adecuadas estimaciones. Para este estudio no basta con utilizar la teoría  $A_p$  sino que son necesarias nuevas herramientas y propiedades de los polinomios. Para concluir el capítulo se estudia la convergencia de otro sistema ortogonal cuyos polinomios pueden relacionarse con los tratados previamente.

Otros sistemas ortogonales muy conocidos pero que ya no están constituidos por polinomios son los de Bessel y Dini. Su convergencia también puede ser estudiada mediante teoría  $A_p$  y de ello es de lo que nos ocupamos en el Capítulo V. Asimismo se demuestran condiciones necesarias para la acotación uniforme de las sumas parciales de las series de Bessel y Dini entre espacios de tipo  $L^p$ , similares a las que Máté-Nevai-Totik [2] encuentran para series de polinomios ortogonales.

Otra vía para encontrar resultados sobre convergencia es utilizar resultados ya conocidos sobre un sistema ortogonal para lograr demostrar otros nuevos sobre sistemas relacionados de alguna manera con el primero. Para ello no se necesita utilizar la teoría  $A_p$ , sino simplemente encontrar relaciones entre las respectivas series de Fourier a partir de las relaciones entre los polinomios. En el Capítulo VI se aplica este hecho a la convergencia de series de Hermite generalizadas, cuyos polinomios son ortogonales en  $\mathbb{R}$  respecto al peso  $e^{-x^2}|x|^{2\mu}$ .

# ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	x
ÍNDICE	xv
<b>CAPÍTULO I: Sistemas ortonormales</b>	<b>1</b>
PARTE 1. <sup>a</sup> : Teoría general . . . . .	1
PARTE 2. <sup>a</sup> : Sistemas de polinomios ortogonales . . . . .	11
PARTE 3. <sup>a</sup> : Sistemas clásicos de polinomios . . . . .	16
<b>CAPÍTULO II: Acotación de la transformada de Hilbert para cierto tipo de pesos <math>A_p</math></b>	<b>25</b>
<b>CAPÍTULO III: Convergencia de la serie de Fourier respecto de pesos en el intervalo <math>[-1, 1]</math></b>	<b>49</b>
<b>CAPÍTULO IV: Series de Fourier respecto de pesos de Jacobi con deltas de Dirac</b>	<b>73</b>
PARTE 1. <sup>a</sup> : Caso $(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta + M\delta_{-1}(x) + N\delta_1(x)$ . . . . .	73
PARTE 2. <sup>a</sup> : Caso $(1 - x^2)^\alpha x ^\gamma + M\delta_0(x) + \frac{N}{2}\delta_{-1}(x) + \frac{N}{2}\delta_1(x)$ . . . . .	97
<b>CAPÍTULO V: Series de Fourier de los sistemas de Bessel y Dini</b>	<b>107</b>
<b>CAPÍTULO VI: Series de Fourier de polinomios de Hermite generalizados</b>	<b>133</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>149</b>





# CAPÍTULO I

## Sistemas ortonormales

### PARTE 1.<sup>a</sup>: Teoría general

Sea  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  un espacio de medida ( $\mu \geq 0$ ). Llamamos  $L^p(\Omega, \mu)$  o  $L^p(\mu)$  ( $1 < p < \infty$ ) al espacio de las funciones  $\mu$ -medibles reales tales que

$$\|f\|_{p,\mu} = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty.$$

Además, dadas  $f \in L^p(\mu)$  y  $g \in L^q(\mu)$  siendo, de aquí en adelante,  $1/p + 1/q = 1$ , denotaremos

$$\langle f, g \rangle_{\mu} = \int_{\Omega} fg d\mu.$$

Cuando no dé lugar a confusión usaremos simplemente  $\|f\|_p$  y  $\langle f, g \rangle$ .

Supongamos que  $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  sea un sistema ortonormal y completo en  $L^2(\mu)$ , es decir,

$$\int_{\Omega} \phi_n \phi_m d\mu = \delta_{nm} \quad \text{y} \quad \overline{\text{span}\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}} = L^2(\mu).$$

Entonces, si para cada  $f \in L^2(\mu)$  construimos las sumas parciales de su serie de Fourier

$$(1.1) \quad S_n f = \sum_{k=0}^n c_k \phi_k, \quad c_k = c_k(f) = \langle f, \phi_k \rangle_{\mu} = \int_{\Omega} \phi_k f d\mu,$$

la teoría de espacios de Hilbert asegura que

$$\|S_n f\|_2 = \left( \sum_{k=0}^n c_k(f)^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_2 \quad (\text{desigualdad de Bessel}),$$

de lo cual se deduce que  $S_n f \rightarrow f$  en  $\|\cdot\|_2$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Además, dada cualquier otra combinación lineal  $\sum_{k=0}^n a_k \phi_k$ , el teorema de mejor aproximación demuestra que

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k \phi_k - f \right\|_2 \geq \|S_n f - f\|_2$$

y que la igualdad sólo se alcanza cuando  $a_k = c_k(f)$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Por tanto, la serie de Fourier se comporta de forma satisfactoria en  $L^2(\mu)$ , ya que no sólo es cierto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n f - f\|_2 = 0$ , sino también que la suma parcial  $S_n f$  da la mejor aproximación de  $f$  en  $\|\cdot\|_2$  de entre todas las combinaciones lineales de  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ .

Una primera cuestión que puede plantearse es averiguar para qué valores de  $p$  el sistema  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$  es base (topológica) de  $L^p(\mu)$ , es decir que para cada  $f \in L^p(\mu)$  exista una sucesión  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  tal que

$$P_n = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$

en la norma de  $L^p(\mu)$  (a esta convergencia la llamaremos convergencia en media de orden  $p$ ). Esto nos impone la restricción obvia de que  $\phi_n \in L^p(\mu) \forall n$ . En este caso, la convergencia de  $P_n$  a  $f$  implica que  $\langle P_n, g \rangle$  converge a  $\langle f, g \rangle \forall g \in L^q(\mu)$ , ya que por la desigualdad de Hölder la aplicación  $\langle \cdot, g \rangle : L^p(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$  es continua. Y si suponemos que  $\phi_n \in L^q(\mu)$ , como ocurrirá en los casos que posteriormente tratemos, entonces  $\langle P_n, \phi_j \rangle$  convergerá a  $\langle f, \phi_j \rangle$ . Pero  $\langle f, \phi_j \rangle = a_j \forall n \geq j$  luego  $a_j = \langle f, \phi_j \rangle$ . Es decir, si queremos que  $P_n \longrightarrow f$ ,  $a_j$  tiene que ser el  $j$ -ésimo coeficiente de Fourier de la función  $f$  con respecto al sistema ortonormal  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ . De aquí que lo que nos interesa estudiar es cuándo la serie de Fourier definida en (1.1) converge a  $f$  para cada  $f \in L^p(\mu)$ . Si esto ocurre diremos que el sistema  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ , ortonormal y completo en  $L^2(\mu)$  y cumpliendo  $\phi_n \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \forall n$ , es base de  $L^p(\mu)$ .

Veremos en el teorema siguiente que la convergencia de  $S_n f$  a  $f$  en  $L^p(\mu)$  va a estar relacionada con la existencia de alguna constante  $C$  tal que

$$(1.2) \quad \|S_n f\|_p \leq C \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mu) \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si se cumple esta desigualdad uniforme, haciendo uso sucesivamente de la dualidad entre  $L^p(\mu)$  y  $L^q(\mu)$ , de

$$\langle f, S_n g \rangle = \sum_{k=0}^n c_k(f) c_k(g) = \langle g, S_n f \rangle$$

y de la desigualdad de Hölder tendremos

$$\begin{aligned} \|S_n g\|_q &= \sup\{|\langle f, S_n g \rangle| : \|f\|_p \leq 1\} = \sup\{|\langle g, S_n f \rangle| : \|f\|_p \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|S_n f\|_p \|g\|_q : \|f\|_p \leq 1\} \leq C \|g\|_q, \end{aligned}$$

y por tanto también deberá cumplirse

$$(1.3) \quad \|S_n g\|_q \leq C \|g\|_q \quad \forall g \in L^q(\mu) \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esta relación entre la norma  $p$  y  $q$  la utilizaremos en la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 1.1**

Sea  $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  sistema ortonormal completo en  $L^2(\Omega, \mu)$ ,  $\mu(\Omega) < \infty$ , y tal que  $\phi_n \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \forall n$ . Entonces:

- (i)  $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  es base ortonormal de  $L^p(\mu)$  si y sólo si  $S_n f$  está uniformemente acotada, o sea,  $\|S_n f\|_p \leq C \|f\|_p$  para alguna constante  $C$  independiente de  $n$  y de  $f \in L^p(\mu)$ .
- (ii) Si  $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  es base de  $L^p(\mu)$  entonces también es base de  $L^r(\mu)$  para todo  $r \in [\min\{p, q\}, \max\{p, q\}]$ .

Demostración:

(i) Si  $\{\phi_n\}$  es base de  $L^p(\mu)$  entonces  $S_n : L^p(\mu) \longrightarrow L^p(\mu)$  está puntualmente acotado, o sea, existe  $K(f)$  tal que  $\|S_n f\|_p \leq K(f) \forall n$ . Luego por el principio de acotación uniforme (teorema de Banach-Steinhaus) está uniformemente acotado. Para el recíproco, estudiemos primero el caso  $p < 2$ . Por ser  $\mu(\Omega) < \infty$  se tiene que  $L^2(\mu) \subset L^p(\mu)$  inclusión continua y densa, cumpliéndose

$$\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{1/p-1/2} \|f\|_2 \quad \forall f \in L^p(\mu).$$

Entonces  $\|S_n f - f\|_p \leq \mu(\Omega)^{1/p-1/2} \|S_n f - f\|_2$  y como  $\{\phi_n\}$  es completo en  $L^2(\mu)$  se sigue que  $S_n f \longrightarrow f$  en  $L^p(\mu) \forall f \in L^2(\mu)$ .

Sea ahora  $f \in L^p(\mu)$ . Por la inclusión densa, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $g \in L^2(\mu)$  tal que  $\|f - g\|_p < \varepsilon$  y de aquí

$$\begin{aligned} \|S_n f - f\|_p &\leq \|S_n f - S_n g\|_p + \|S_n g - g\|_p + \|f - g\|_p \leq C \|f - g\|_p \\ &\quad + \mu(\Omega)^{1/p-1/2} \|S_n g - g\|_2 + \|f - g\|_p < (C + 2)\varepsilon \end{aligned}$$

a partir de un  $n_0$ .

Sea ahora  $p > 2$ . Teniendo en cuenta que (1.2) implica (1.3), tendremos  $\|S_n f\|_q \leq C \|f\|_q$  con  $q < 2$ , luego  $\{\phi_n\}$  base de  $L^q(\mu)$ . Veamos, por reducción al absurdo, que  $\text{span}\{\phi_n\}$  es denso en  $L^p(\mu)$ . Si no lo fuera, por el teorema de Hahn-Banach, existiría un funcional no nulo en  $L^p(\mu)$  que se anula en  $\text{span}\{\phi_n\}$ , o equivalentemente, por dualidad, existe  $f \in L^q(\mu)$  no nula tal que  $\langle f, \phi_n \rangle = 0 \forall n$ , de donde  $S_n f = 0 \forall n$  y consiguientemente  $S_n f \longrightarrow 0$  en  $L^q(\mu)$ , lo cual es absurdo por ser  $\{\phi_n\}$  base de  $L^q(\mu)$ . Con esto, vamos por fin a comprobar que  $\forall g \in L^p(\mu)$ ,  $S_n g$  converge a  $g$  en  $L^p(\mu)$ . En efecto, por lo anterior, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $P \in \text{span}\{\phi_n\}$  tal que  $\|P - g\|_p < \varepsilon$ . Pero  $S_n P = P$  para  $n$  suficientemente grande y por tanto

$$\begin{aligned} \|S_n g - g\|_p &\leq \|S_n g - P\|_p + \|P - g\|_p = \|S_n(g - P)\|_p + \|P - g\|_p \\ &\leq (C + 1)\|P - g\|_p < (C + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) Utilizando que (1.2) implica (1.3) y el apartado (i) se tiene que

$$\begin{aligned} S_n : L^\alpha(\mu) &\longrightarrow L^\alpha(\mu), & \alpha = \min\{p, q\}, \\ S_n : L^\beta(\mu) &\longrightarrow L^\beta(\mu), & \beta = \max\{p, q\}, \end{aligned}$$

son operadores uniformemente acotados y por interpolación (ver Stein-Weiss [1, pág. 179] se sigue que  $S_n : L^r(\mu) \longrightarrow L^r(\mu)$  son uniformemente acotados  $\forall r \in [\alpha, \beta]$ ).

La condición  $\mu(\Omega) < \infty$  no es esencial, pero entonces en las hipótesis del teorema anterior hay que incluir que las combinaciones lineales de  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$  sean densas en  $L^p(\mu)$ . Bajo estas nuevas hipótesis, es inmediato comprobar que el teorema sigue siendo cierto y además su demostración se simplifica (para (ii), utilizar que si  $1 \leq a \leq r \leq b < \infty$  entonces  $L^a \cap L^b \subset L^r$  inclusión densa).

En lo que sigue, utilizaremos  $C$  o  $C_i$  para denotar constantes positivas posiblemente diferentes en cada ocasión que aparezcan.

Cuando la medida  $d\mu$  viene dada de la forma  $d\mu = w(x) dx$  (en este caso  $w(x)$  se denomina peso), es muy fácil construir a partir del sistema ortonormal  $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  otro nuevo relacionado con él. En efecto, si tomamos  $\psi_n(x) = \phi_n(x)w(x)^{1/2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es inmediato que

$$\int_{\Omega} \psi_n \psi_m dx = \int_{\Omega} \phi_n \phi_m w dx = \int_{\Omega} \phi_n \phi_m d\mu = \delta_{nm},$$

luego  $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  son ortonormales en  $L^2(\Omega, dx)$ .

Más aún, dado  $r \in \mathbb{R}$  cualquiera, si hubiéramos tomado

$$(1.4) \quad \psi_n(x) = \phi_n(x)w(x)^{(1-r)/2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

tendríamos

$$\int_{\Omega} \psi_n(x)\psi_m(x)w(x)^r dx = \int_{\Omega} \phi_n(x)\phi_m(x)w(x) dx = \int_{\Omega} \phi_n\phi_m d\mu = \delta_{nm},$$

luego  $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  formarían un sistema ortonormal en  $L^2(\Omega, w(x)^r dx)$ . Lógicamente, este segundo caso abarca al primero sin más que tomar  $r = 0$ , y además también abarca el caso original tomando  $r = 1$ .

Denotemos  $S_n f$  las sumas parciales de las series de Fourier respecto al sistema original  $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  y  $\mathcal{S}_n g$  respecto al sistema  $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  y vamos a ver qué relación existe entre ellas. Es claro que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(g, x) &= \sum_{k=0}^n \left( \int_{\Omega} g(y)\psi_k(y)w(y)^r dy \right) \psi_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \int_{\Omega} g(y)\phi_k(y)w(y)^{(1-r)/2}w(y)^r dy \right) \phi_k(x)w(x)^{(1-r)/2}, \end{aligned}$$

luego si tomamos  $f(y) = g(y)w(y)^{(r-1)/2}$  tendremos

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}_n(g, x) &= \sum_{k=0}^n \left( \int_{\Omega} f(y) \phi_k(y) w(y) dy \right) \phi_k(x) w(x)^{(1-r)/2} \\ &= w(x)^{(1-r)/2} \mathcal{S}_n(f, x). \end{aligned}$$

Por otra parte, de acuerdo con el teorema anterior, para estudiar la convergencia de  $\mathcal{S}_n g$  a  $g$  en el espacio  $L^p(w^r)$  habría que ver

$$\|\mathcal{S}_n g\|_{p, w_r} \leq C \|g\|_{p, w_r} \quad \text{uniformemente.}$$

Pero

$$\|\mathcal{S}_n(g, x)\|_{p, w_r} = \|\mathcal{S}_n(f, x)w(x)^{(1-r)/2}\|_{p, w_r} = \|\mathcal{S}_n(f, x)w(x)^{(1-r)/2+r/p-1/p}\|_{p, w}$$

y

$$\|g(x)\|_{p, w_r} = \|f(x)w(x)^{(1-r)/2}\|_{p, w_r} = \|f(x)w(x)^{(1-r)/2+r/p-1/p}\|_{p, w},$$

luego la acotación que buscamos es equivalente a

$$(1.6) \quad \|\mathcal{S}_n(f, x)w(x)^{(1-r)/2+r/p-1/p}\|_{p, w} \leq C \|f(x)w(x)^{(1-r)/2+r/p-1/p}\|_{p, w}.$$

Podíamos haber generalizado aún más este proceso descomponiendo el peso  $w(x)$  en la forma  $w(x) = w_1(x)w_2(x)$  y tomando

$$\psi_n(x) = \phi_n(x)w_1(x)^{(1-r)/2}w_2(x)^{(1-s)/2}$$

(análogamente descomponiendo  $w$  en un número finito de factores) y hubiéramos encontrado que bastaba con estudiar una acotación similar a (1.6).

Es decir, lo que hemos hecho ha sido relacionar la convergencia de la serie  $\mathcal{S}_n g$  con una acotación del tipo

$$\|(S_n f)U\|_{p, \mu} \leq C \|fU\|_{p, \mu}.$$

Un paso más nos lleva directamente a pensar en acotaciones de la forma

$$(1.7) \quad \|(S_n f)U\|_{p, \mu} \leq C \|fV\|_{p, \mu}$$

y a estudiar su relación con la convergencia en media. A este respecto tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.2**

Sean  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ,  $(\Omega, \mathcal{M}, u)$  y  $(\Omega, \mathcal{M}, v)$  tres espacios de medida,  $u \leq Cv$ , y  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$  sistema ortonormal respecto a  $\mu$  de funciones en  $L^p(v)$  cuya clausura lineal es densa en este espacio. En estas condiciones,

(i) Dada una sucesión  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ , denotemos  $P_n = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle P_n, \phi_j \rangle_\mu = \langle f, \phi_j \rangle_\mu \implies a_j = \langle f, \phi_j \rangle_\mu.$$

En particular, dada  $f \in L^p(v)$ , si para cada sucesión  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  se verifica

$$(1.8) \quad P_n = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ en } L^p(u) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \langle P_n, \phi_j \rangle_\mu = \langle f, \phi_j \rangle_\mu \quad \forall j,$$

entonces la única forma posible de conseguir la convergencia  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  en  $L^p(u)$  es tomando  $a_n = \langle f, \phi_n \rangle_\mu$  el  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier respecto de  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$  y  $\mu$  (con lo cual  $P_n = S_n f$ ).

(ii) Supongamos que los operadores  $S_n : L^p(v) \longrightarrow L^p(u)$  definidos

$$S_n f = \sum_{k=0}^n \phi_k \int_\Omega \phi_k f \, d\mu$$

existen y son acotados para cada  $n$ . Entonces, son equivalentes

$$(1.9) \quad \|S_n f\|_{p,u} \leq C \|f\|_{p,v} \quad (C \text{ independiente de } n \text{ y } f)$$

y

$$(1.10) \quad S_n f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \text{en } L^p(u) \quad \forall f \in L^p(v).$$

Demostración:

(i) Cuando  $n \geq j$  es claro que  $\langle P_n, \phi_j \rangle_\mu = a_j$  luego tomando límites

$$a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle P_n, \phi_j \rangle_\mu = \langle f, \phi_j \rangle_\mu.$$

(ii) Si  $\|S_n f - f\|_{p,u} \longrightarrow 0$ , como  $u \leq Cv$ , tendremos

$$\begin{aligned} \|S_n f\|_{p,u} &\leq \|S_n f - f\|_{p,u} + \|f\|_{p,u} \leq C + \|f\|_{p,u} \\ &\leq C + C_1 \|f\|_{p,v} = K(f). \end{aligned}$$

Por tanto  $S_n f$  está puntualmente acotado y por el teorema de Banach-Steinhaus los operadores  $S_n$  lo estarán uniformemente.

Para probar el recíproco, sea  $\varepsilon > 0$  cualquiera y  $P$  una combinación lineal de funciones  $\phi_n$  tal que  $\|f - P\|_{p,v} < \varepsilon$ . Para  $n$  suficientemente grande  $S_n P = P$  y de aquí

$$\begin{aligned} \|S_n f - f\|_{p,u} &\leq \|S_n f - P\|_{p,u} + \|P - f\|_{p,u} = \|S_n(f - P)\|_{p,u} + \|P - f\|_{p,u} \\ &\leq C \|P - f\|_{p,v} + C_1 \|P - f\|_{p,v} < C_2 \varepsilon, \end{aligned}$$

y como esto es posible para cada  $\varepsilon > 0$ , el teorema queda probado.

**Observación 1.3**

La situación natural en que se verifica la hipótesis (1.8), que exigíamos en (i) del teorema anterior, es cuando las medidas  $u$  y  $v$  son, como en (1.7), de la forma  $du = U(x)^p d\mu$ ,  $dv = V(x)^p d\mu$  y además se cumple

$$(1.11) \quad \phi_n \in L^p(V(x)^p d\mu) \cap L^q(U(x)^{-q} d\mu) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nótese en primer lugar que decir  $P_n \rightarrow f$  en  $L^p(U(x)^p d\mu)$  es lo mismo que decir  $P_n U \rightarrow fU$  en  $L^p(d\mu)$ . Además,  $\phi_n \in L^q(U(x)^{-q} d\mu)$  es equivalente a  $\phi_n U^{-1} \in L^q(d\mu)$ . Con esto, y como por dualidad se cumple

$$P_n U \xrightarrow{n \rightarrow \infty} fU \text{ en } L^p(d\mu) \implies \langle P_n U, \phi_j U^{-1} \rangle_\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle fU, \phi_j U^{-1} \rangle_\mu,$$

es inmediato deducir que (1.8) es cierto ya que  $\langle P_n U, \phi_j U^{-1} \rangle_\mu = \langle P_n, \phi_j \rangle_\mu$  y  $\langle fU, \phi_j U^{-1} \rangle_\mu = \langle f, \phi_j \rangle_\mu$ .

Por otra parte, la condición

$$(1.12) \quad \phi_n \in L^p(U(x)^p d\mu) \cap L^q(V(x)^{-q} d\mu) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es suficiente para que exista  $c_n(f) \forall f \in L^p(V(x)^p d\mu)$  y  $\forall n \in \mathbb{N}$  y además para que  $S_n f \in L^p(U(x)^p d\mu)$ . En efecto, por la desigualdad de Hölder,

$$|c_n(f)| = \left| \int_\Omega \phi_n f d\mu \right| \leq \left( \int_\Omega |fV|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_\Omega |\phi_n/V|^q d\mu \right)^{1/q},$$

luego basta con  $\phi_n \in L^q(V(x)^{-q} d\mu)$  para que exista  $c_n(f)$ . Además, las condiciones (1.12) también garantizan que cada operador  $S_n$  tal como los tomábamos en (ii) del Teorema 1.2 es acotado (aunque no necesariamente que sean uniformemente acotados). Por último, notar que, por dualidad, si tiene sentido  $\langle \phi_n, f \rangle_\mu \forall f \in L^p(V(x)^p d\mu)$ , esto implica  $\phi_n \in L^q(V(x)^{-q} d\mu)$ . Y por otra parte, por inducción, es equivalente que  $S_n f \in L^p(U(x)^p d\mu) \forall n$  a que  $\phi_n \in L^p(U(x)^p d\mu) \forall n$ .

Obsérvese que la condición (1.11) implica la (1.12) siempre que tengamos, como en el teorema anterior,  $U \leq CV$ .

Vamos ahora a ver como se puede con estos pesos reproducir la relación que teníamos entre (1.2) y (1.3), así como generalizar el correspondiente resultado de interpolación análogo a (ii) del Teorema 1.1.

**Teorema 1.4**

Sea  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$  sistema ortonormal en  $L^2(\Omega, d\mu)$  y  $1 < p < \infty$ . Si

$$S_n : L^p(\Omega, V(x)^p d\mu) \longrightarrow L^p(\Omega, U(x)^p d\mu)$$

está acotado uniformemente, entonces también

$$S_n : L^q(\Omega, U(x)^{-q} d\mu) \longrightarrow L^q(\Omega, V(x)^{-q} d\mu)$$

está acotado uniformemente con la misma constante. Además, si para cada  $r \in [\min\{p, q\}, \max\{p, q\}]$  denotamos  $r = r_\theta$  tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_\theta} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}, \quad \theta \in [0, 1],$$

(con lo cual  $r_0 = p$  y  $r_1 = q$ ) entonces

$$(1.13) \quad \|(S_n f)U^{1-\theta}V^{-\theta}\|_{r_\theta, \mu} \leq C_\theta \|fV^{1-\theta}U^{-\theta}\|_{r_\theta, \mu}$$

uniformemente.

Demostración:

Por hipótesis se tiene  $\|(S_n f)U\|_{p, \mu} \leq C \|fV\|_{p, \mu}$  uniformemente, y queremos probar  $\|(S_n g)V^{-1}\|_{q, \mu} \leq C \|gU^{-1}\|_{q, \mu}$ .

En primer lugar, observemos que

$$\begin{aligned} f \in L^p(V^p d\mu) &\iff f = \bar{f}V^{-1}, \bar{f} \in L^p(d\mu), \\ g \in L^q(U^{-q} d\mu) &\iff g = \bar{g}U, \bar{g} \in L^q(d\mu). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \langle [S_n(\bar{g}U)]V^{-1}, \bar{f} \rangle_\mu &= \sum_{k=0}^n \int_\Omega \left( \int_\Omega \bar{g}U \phi_k d\mu \right) \phi_k \bar{f}V^{-1} d\mu \\ &= \sum_{k=0}^n c_k(\bar{g}U) c_k(\bar{f}V^{-1}) = \sum_{k=0}^n c_k(\bar{f}V^{-1}) c_k(\bar{g}U) \\ &= \sum_{k=0}^n \int_\Omega \left( \int_\Omega \bar{f}V^{-1} \phi_k d\mu \right) \phi_k \bar{g}U d\mu = \langle [S_n(\bar{f}V^{-1})]U, \bar{g} \rangle_\mu. \end{aligned}$$

Con esto, usando dualidad y la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} \|(S_n g)V^{-1}\|_{q, \mu} &= \sup\{|\langle [S_n(\bar{g}U)]V^{-1}, \bar{f} \rangle_\mu| : \|\bar{f}\|_{p, \mu} \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle [S_n(\bar{f}V^{-1})]U, \bar{g} \rangle_\mu| : \|\bar{f}\|_{p, \mu} \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|[S_n(\bar{f}V^{-1})]U\|_{p, \mu} \|\bar{g}\|_{q, \mu} : \|\bar{f}\|_{p, \mu} \leq 1\} \\ &= \sup\{\|(S_n f)U\|_{p, \mu} \|gU^{-1}\|_{q, \mu} : \|fV\|_{p, \mu} \leq 1\} \leq C \|gU^{-1}\|_{q, \mu}, \end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la primera parte del teorema.

Definamos ahora los operadores

$$T_{n,0}(h) = US_n(hV^{-1}) \quad \text{y} \quad T_{n,1}(h) = V^{-1}S_n(hU),$$



que por hipótesis y por lo que ya hemos demostrado son uniformemente acotados de  $L^p(d\mu)$  en  $L^p(d\mu)$  y de  $L^q(d\mu)$  en  $L^q(d\mu)$  respectivamente. Además, sea la banda  $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$  y definamos

$$T_{n,z}(h) = V^{-z}U^{1-z}S_n(hV^{z-1}U^z), \quad z = x + iy \in S.$$

Entonces, se verifica

$$(1.14) \quad \|T_{n,iy}(h)\|_{p,\mu} \leq C\|h\|_{p,\mu} \quad y \quad \|T_{n,1+iy}(h)\|_{q,\mu} \leq C\|h\|_{q,\mu}$$

ya que, por la acotación de  $T_{n,0}$ ,

$$\begin{aligned} \|T_{n,iy}(h)\|_{p,\mu} &= \|V^{-iy}U^{-iy}US_n(hV^{-1}V^{iy}U^{iy})\|_{p,\mu} \\ &= \|US_n(hV^{-1}V^{iy}U^{iy})\|_{p,\mu} \leq C\|hV^{iy}U^{iy}\|_{p,\mu} = C\|h\|_{p,\mu} \end{aligned}$$

y análogamente para  $T_{n,1+iy}(h)$  por la acotación de  $T_{n,1}$ .

Entonces, por cumplirse (1.14), estamos en condiciones de emplear interpolación compleja (ver Stein-Weiss [1, pág. 205]), lo cual nos permite asegurar que para cada  $\theta \in [0, 1]$  existirá  $C_\theta$  tal que

$$\|T_{n,\theta}(h)\|_{r_\theta,\mu} = \|V^{-\theta}U^{1-\theta}S_n(hV^{\theta-1}U^\theta)\|_{r_\theta,\mu} \leq C_\theta\|h\|_{r_\theta,\mu}.$$

Así, basta tomar  $f = hV^{\theta-1}U^\theta$  en la expresión anterior y se sigue (1.13).

### Observación 1.5

Decíamos en la Observación 1.3 que la situación natural en la que nos movíamos era (1.11). Si denotamos  $u_\theta = U^{1-\theta}V^{-\theta}$  y  $v_\theta = V^{1-\theta}U^{-\theta}$ , lo correspondiente a (1.11) para los operadores

$$S_n : L^{r_\theta}(v^{r_\theta} d\mu) \longrightarrow L^{r_\theta}(u^{r_\theta} d\mu)$$

que aparecen en el teorema anterior es (notar  $1/r_\theta + 1/r_{1-\theta} = 1$ )

$$\begin{aligned} \phi_n &\in L^{r_\theta}(v^{r_\theta} d\mu) \cap L^{r_{1-\theta}}(v^{-r_{1-\theta}} d\mu) \\ &= L^{r_\theta}(V^{r_\theta(1-\theta)}U^{-r_\theta\theta} d\mu) \cap L^{r_{1-\theta}}(U^{-r_{1-\theta}(1-\theta)}V^{r_{1-\theta}\theta} d\mu). \end{aligned}$$

Pero esto es inmediato de deducir a partir de (1.11) ya que utilizando la desigualdad de Hölder con  $1/a + 1/b = 1$ ,  $a = p/((1-\theta)r_\theta)$ ,  $b = q/(\theta r_\theta)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left| \frac{\phi_n V^{1-\theta}}{U^\theta} \right|^{r_\theta} d\mu &= \int_\Omega |\phi_n V|^{(1-\theta)r_\theta} \left| \frac{\phi_n}{U} \right|^{\theta r_\theta} d\mu \\ &\leq \left( \int_\Omega |\phi_n V|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_\Omega |\phi_n U^{-1}|^q d\mu \right)^{1/q} \end{aligned}$$

para cualquier  $\theta \in [0, 1]$  (luego también para  $1 - \theta$ ).

Dado un sistema ortonormal, no suele ser fácil en general demostrar que se verifican las acotaciones uniformes del tipo (1.7) —en este trabajo nos preocuparemos de estudiar estas acotaciones para distintos sistemas ortonormales— pero sí que es sencillo encontrar condiciones necesarias para que esas acotaciones sean posibles. En realidad, estas condiciones, debidas esencialmente a Newman-Rudin [1], no sólo son necesarias para la acotación uniforme de las sumas parciales de la serie de Fourier sino también de su término general, como se observa en la demostración del siguiente resultado:

**Teorema 1.6**

Sea  $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  sistema ortonormal en  $L^2(\Omega, \mu)$ ,  $1 < p < \infty$ , y dos funciones no negativas  $U$  y  $V$ . Si para cada  $f \in L^p(\Omega, V(x)^p d\mu)$  existe su serie de Fourier  $S_n f$  respecto al sistema  $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  y se cumple

$$\|S_n(f, x)U(x)\|_{p,\mu} \leq C\|f(x)V(x)\|_{p,\mu}$$

entonces

$$\left(\int_{\Omega} |\phi_n(x)|^p U(x)^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |\phi_n(x)|^q V(x)^{-q} d\mu\right)^{1/q} \leq C.$$

Demostración:

Por simplicidad, denotemos  $du = U(x)^p d\mu$  y  $dv = V(x)^p d\mu$ . Definamos los operadores

$$\begin{aligned} T_n : L^p(v) &\longrightarrow L^p(u) \\ f &\longmapsto c_n(f)\phi_n = \phi_n \int_{\Omega} \phi_n f d\mu. \end{aligned}$$

Como  $T_n = S_n - S_{n-1}$  (con  $S_{-1} = 0$ ), los operadores  $T_n$  estarán uniformemente acotados por estarlo los  $S_n$ . Por tanto, se cumplirá

$$\|c_n(f)\phi_n\|_{p,u} = \left|\int_{\Omega} \phi_n f d\mu\right| \|\phi_n\|_{p,u} \leq C\|f\|_{p,v},$$

con lo que

$$\left|\int_{\Omega} \phi_n f d\mu\right| \leq C(\|\phi_n\|_{p,u})^{-1} \|f\|_{p,v} = R(n)\|f\|_{p,v}.$$

Es decir, cada operador

$$\begin{aligned} \phi_n/V^p : L^p(v) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_{\Omega} (\phi_n/V^p) f dv = \int_{\Omega} \phi_n f d\mu \end{aligned}$$

es continuo y su norma es  $\leq R(n)$ . Pero por dualidad su norma como operador coincide con la norma de la función  $\phi_n/V^p$  en  $L^q(v)$ , luego

$$\left(\int_{\Omega} |\phi_n(x)/V(x)^p|^q dv\right)^{1/q} \leq R(n) = C(\|\phi_n\|_{p,u})^{-1},$$

y cambiando  $(\|\phi_n\|_{p,u})^{-1}$  de miembro se sigue el teorema.

## PARTE 2.<sup>a</sup>: Sistemas de polinomios ortogonales

Sea  $d\mu$  una medida de Borel sobre la recta real  $\mathbb{R}$  finita y positiva cuyo soporte es un conjunto infinito, y tal que para cada  $n \in \mathbb{N}$  existen los momentos

$$\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu \in \mathbb{R}.$$

En estas condiciones, es bien conocido que existe una sola familia  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  de polinomios con coeficiente director positivo y tal que el grado de cada  $p_n(x)$  es  $n$  cumpliendo

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x) d\mu = \delta_{nm}.$$

Además, si el soporte de  $\mu$  es acotado, el teorema de Weierstrass demuestra que la familia  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  es completa en  $L^2(\mu)$ .

Muchas veces, en lugar de exigir que una familia de polinomios  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  sea ortonormal nos preocuparemos simplemente de su ortogonalidad, es decir de que se cumpla

$$(1.15) \quad \int_{\mathbb{R}} P_n(x)P_m(x) d\mu = h_n \delta_{nm}.$$

Denotaremos a los polinomios con letras mayúsculas cuando sean ortogonales y con minúsculas cuando además estén normalizados. Así,

$$p_n(x) = h_n^{-1/2} P_n(x).$$

Por último, llamaremos  $k_n$  al coeficiente director de cada  $P_n(x)$ .

Vamos ahora a ver, prácticamente sin demostraciones, un resumen general de la teoría de polinomios ortogonales. Para estudiar todo esto con más detalle puede consultarse el libro de Szegő [1].

Veamos en primer lugar una forma clásica de construir una familia de polinomios ortogonales respecto a  $d\mu$ . Si, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , llamamos  $\Delta_n$  al determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix},$$

se demuestra que, por ser  $\mu_n$  los momentos correspondientes a  $d\mu$ , entonces  $\Delta_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . (También es cierto el recíproco: si para una sucesión  $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$  todos los  $\Delta_n$  son positivos, entonces existe algún  $d\mu$  tal que  $\mu_n$  son sus correspondiente

momentos. Ver Freud [1, pág. 60].) De aquí que si definimos los polinomios

$$(1.16) \quad P_n(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1,$$

y  $P_0(x) = 1$ , es claro que

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(x)x^k d\mu = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

ya que, al utilizar (1.16), la integral se convierte en un determinante con dos filas iguales. Además, el coeficiente director de cada  $P_n(x)$  es  $k_n = \Delta_{n-1}$  ( $\Delta_{-1} = 1$ ), luego en particular son polinomios no nulos. Por lo tanto la familia  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  definida según (1.16) es ortogonal respecto a  $d\mu$ . Por último, no es difícil demostrar que  $h_n = \Delta_n \Delta_{n-1}$ , con lo que a partir de  $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$  ya podríamos encontrar incluso los polinomios normalizados.

Una importante propiedad que verifican las familias de polinomios ortogonales es la siguiente relación de recurrencia a tres términos

$$(1.17) \quad P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde  $P_{-1}(x) = 0$ ,  $P_0(x) = k_0$ ,  $C_0 = 0$ ,

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}, \quad C_n = \frac{A_n h_n}{A_{n-1} h_{n-1}} = \frac{k_{n+1} k_{n-1} h_n}{k_n^2 h_{n-1}}$$

y

$$B_n = -\frac{A_n}{h_n} \int_{\mathbb{R}} x P_n(x)^2 d\mu = A_n \left( \frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n} \right)$$

con  $k'_n$  el coeficiente de  $x^{n-1}$  en  $P_n(x)$ . De hecho, el teorema de Favard (ver Freud [1, pág. 60]) asegura que cualquier sistema de polinomios generado por (1.17) donde  $A_n, C_n > 0$  y  $B_n \in \mathbb{R}$  constituye un sistema de polinomios ortogonales respecto a alguna medida  $d\mu$ .

Por otra parte, es inmediato que la serie de Fourier de una función  $f$  puede escribirse como

$$(1.18) \quad S_n(f, x) = \int_{\mathbb{R}} K_n(x, y) f(y) d\mu(y),$$

donde los

$$(1.19) \quad K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k} P_k(x) P_k(y)$$

se denominan núcleos.

A partir de (1.17), es fácil demostrar por inducción que los núcleos verifican

$$(1.20) \quad K_n(x, y) = \frac{k_n}{h_n k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x - y},$$

expresión que se denomina fórmula de Christoffel-Darboux.

Una primera consecuencia de esta propiedad se obtiene igualando  $K_n(x, y)$  en (1.19) y (1.20) y tomando límites cuando  $y$  tiende a  $x$ , con lo cual, tras utilizar la regla de L'Hôpital, obtenemos

$$(1.21) \quad K_n(x, x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k} P_k(x)^2 = \frac{k_n}{h_n k_{n+1}} (P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)).$$

En particular,  $P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  y  $\forall n \in \mathbb{N}$ , de lo que se deduce que  $P_n(x)$  y  $P_{n+1}(x)$  nunca pueden tener raíces comunes.

Otra propiedad que cumplen las raíces de cada  $P_n(x)$ ,  $n > 0$ , es que son todas simples y reales, y además, si  $\text{sop}(d\mu) \subseteq [a, b]$ , todas ellas están en el intervalo  $(a, b)$ . Por otra parte, si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos raíces consecutivas de  $P_n(x)$ , es fácil demostrar que en el intervalo  $(\alpha, \beta)$  existe exactamente una raíz de  $P_{n+1}(x)$ . También es cierto que entre dos raíces de  $P_n(x)$  siempre hay al menos una de  $P_m(x)$  para cada  $m > n$ .

Cuando  $d\mu$  puede ponerse  $d\mu = w(x) dx$ , siendo  $w(x)$  una función peso par, es inmediato comprobar que si  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  son polinomios ortogonales respecto a  $d\mu$ , entonces  $\{(-1)^n P_n(-x)\}_{n=0}^{\infty}$  también lo son. Por lo tanto,  $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x) \forall n \in \mathbb{N}$ , luego los polinomios  $P_n(x)$  serán pares o impares según sea  $n$ , y  $B_n$  en la fórmula de recurrencia (1.17) es siempre  $B_n = 0$ .

Vamos ahora a ver una serie de resultados que permiten relacionar diversos sistemas de polinomios ortogonales al modificar  $d\mu$  por alguna función u obtener nuevos sistemas a partir de algunos ya dados.

### Teorema 1.7

Si  $\text{sop}(d\mu) \subseteq [a, b]$  con  $a > -\infty$  y con  $K_n(x, y)$  denotamos sus correspondientes núcleos, entonces para cada  $x_0 \leq a$ ,  $\{K_n(x_0, x)\}_{n=0}^{\infty}$  forman un sistema de polinomios ortogonales respecto a  $(x - x_0) d\mu$ .

#### Demostración:

Para cualquier polinomio  $\pi(y)$  de grado  $n$  a lo más se verifica

$$\int_a^b K_n(x, y) \pi(y) d\mu(x) = \pi(x),$$

luego en particular, tomando  $\pi(y) = K_m(x_0, y)(y - x_0)$  y haciendo  $x = x_0$ ,

$$\int_a^b K_n(x_0, y) K_m(x_0, y) (y - x_0) d\mu(x) = \pi(x_0) = 0 \quad \forall m < n,$$

de donde se sigue el enunciado.

Obviamente, si  $b < \infty$  y  $x_0 \geq b$ , entonces  $\{K_n(x, x_0)\}_{n=0}^{\infty}$  es un sistema de polinomios ortogonales respecto a  $(x_0 - x) d\mu$ .

**Teorema 1.8**

Sean  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  polinomios ortogonales asociados a  $d\mu$  en un intervalo  $[a, b]$ , y  $\pi(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)$ ,  $c \neq 0$ , un polinomio no negativo en el mismo intervalo  $(x_1 < x_2 < \cdots < x_k)$ . Entonces, los polinomios  $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  representados en términos de los  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  mediante

$$(1.22) \quad \pi(x)Q_n(x) = \begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+1}(x) & \cdots & P_{n+k}(x) \\ P_n(x_1) & P_{n+1}(x_1) & \cdots & P_{n+k}(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_n(x_k) & P_{n+1}(x_k) & \cdots & P_{n+k}(x_k) \end{vmatrix}$$

son ortogonales respecto a  $\pi(x) d\mu$ .

Demostración:

Ver Szegő [1, pág. 30].

En el caso de que no exigiéramos que los ceros de  $\pi(x)$  fueran simples, si por ejemplo  $x_r$  es cero de multiplicidad  $m$ , el teorema sigue siendo cierto si reemplazamos las correspondientes filas del determinante por las derivadas de orden  $0, 1, 2, \dots, m - 1$  de los polinomios  $P_n(x), P_{n+1}(x), \dots, P_{n+k}(x)$  en  $x_r$ .

Por otra parte, en las mismas condiciones del Teorema 1.8, si además se cumple  $a = -b$ ,  $d\mu = w(x) dx$ ,  $w(x)$  y  $\pi(x)$  son pares y denotamos  $\{\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_{k/2}\}$  el conjunto de ceros de  $\pi(x)$ , todos ellos simples, hay una representación mucho más sencilla:

$$(1.23) \quad \pi(x)Q_n(x) = \begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+2}(x) & \cdots & P_{n+k}(x) \\ P_n(x_1) & P_{n+2}(x_1) & \cdots & P_{n+k}(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_n(x_{k/2}) & P_{n+2}(x_{k/2}) & \cdots & P_{n+k}(x_{k/2}) \end{vmatrix}.$$

Multitud de representaciones de este tipo para distintas modificaciones de la medida pueden encontrarse en Paszkowski [1] y en la tesis de Godoy [1].

Para estudiar muchos problemas de convergencia se necesita dar cotas uniformes (independientes de  $n$ ) para los polinomios ortonormales. Vamos ahora a ver una serie de resultados que permiten, a partir de cotas para unos polinomios con un determinado peso, calcular cotas para otros cuyo peso tiene alguna relación con el anterior.

**Teorema 1.9**

Sean  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  polinomios ortonormales respecto a un peso  $w(x)$  en un intervalo  $[a, b]$  acotado. Supongamos que existe una función  $t(x)$  tal que  $|p_n(x)| \leq t(x) \forall x \in$

$A$ , siendo  $A$  un determinado subconjunto de  $[a, b]$ . Y sea  $\pi(x)$  un polinomio de grado  $m$ ,  $\pi(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ , que estará acotado por  $M = \max\{\pi(x) : a \leq x \leq b\}$ .

Entonces:

(i) Si llamamos  $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  a los polinomios ortonormales respecto al nuevo peso  $w(x)\pi(x)$ , se verifica  $|q_n(x)| \leq (m+1)M^{1/2}t(x)/\pi(x) \forall x \in A$ .

(ii) Si  $w(x)/\pi(x) \in L^1([a, b], dx)$  y  $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  son sus correspondientes polinomios ortonormales, se tiene  $|q_n(x)| \leq (m+1)M^{1/2}t(x) \forall x \in A$ .

Demostración:

(i) Es claro que

$$(1.24) \quad q_n \pi = \sum_{k=0}^{n+m} c_{nk} p_k, \quad c_{nk} = \int_a^b q_n p_k w \pi dx.$$

Además, por ser los  $\{q_n(x)\}$  ortonormales respecto a  $w\pi$ ,  $c_{nk} = 0$  para  $k < n$ , luego el número de sumandos no nulos en (1.24) no crece con  $n$ , sino que es  $m+1$  a lo más. Por otra parte, aplicando la desigualdad de Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned} |c_{nk}|^2 &\leq \left( \int_a^b \pi^2 q_n^2 w dx \right) \left( \int_a^b p_k^2 w dx \right) \\ &= \int_a^b \pi^2 q_n^2 w dx \leq M \int_a^b q_n^2 w \pi dx = M, \end{aligned}$$

luego  $|c_{nk}| \leq M^{1/2}$  y se sigue el enunciado.

(ii) Análogamente

$$q_n = \sum_{k=0}^n c_{nk} p_k, \quad c_{nk} = \int_a^b q_n p_k \pi (w/\pi) dx$$

y se continúa como antes.

**Teorema 1.10** (Teorema de Korovus)

Sean  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  polinomios ortonormales respecto a  $d\mu$  en un intervalo  $[a, b]$  acotado tales que  $|p_n(x)| \leq t(x)$  en  $(a, b)$  para alguna función  $t(x)$ . Sea otra función  $r(x) \geq 0$  en  $(a, b)$  y lipschitziana, cumpliendo además  $p_n(x)^2/r(x) \in L^1(\mu)$  uniformemente (lo cual siempre es cierto si  $r(x) > 0$  en  $[a, b]$ ). Entonces, si llamamos  $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  a los polinomios ortonormales respecto a  $r(x)d\mu$  se verifica  $|q_n(x)| \leq Ct(x)/r(x)$  para alguna constante  $C$  independiente de  $n$ .

Demostración:

Ver Alexits, [1, pág. 41] o Szegő [1, Teorema 7.1.3, pág. 162], con ligeras modificaciones.

### PARTE 3.<sup>a</sup>: Sistemas clásicos de polinomios

En este apartado daremos una serie de caracterizaciones, expresiones explícitas, propiedades, relaciones, acotaciones y estimaciones asintóticas de los polinomios ortogonales más usuales: los polinomios ortogonales clásicos. Notar que los polinomios que manejemos estarán sin normalizar. En primer lugar, he aquí un cuadro de los polinomios ortogonales clásicos:

<u>Peso</u>	<u>Soporte</u>	<u>Denominación</u>	<u>Notación</u>
$(1 - x^2)^{-1/2}$	$[-1, 1]$	Chebyshev (de 1. <sup>a</sup> clase)	$T_n(x)$
$(1 - x^2)^{1/2}$	$[-1, 1]$	Chebyshev de 2. <sup>a</sup> clase	$U_n(x)$
1	$[-1, 1]$	Legendre	$P_n(x)$
$(1 - x^2)^{\lambda-1/2}$ , $\lambda > -1/2$	$[-1, 1]$	Gegenbauer o ultrasféricos	$P_n^{(\lambda)}(x)$
$(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$ , $\alpha, \beta > -1$	$[-1, 1]$	Jacobi	$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$
$e^{-x}x^\alpha$ , $\alpha > -1$ ,	$[0, \infty)$	Laguerre	$L_n^{(\alpha)}(x)$
$e^{-x^2}$	$\mathbb{R}$	Hermite	$H_n(x)$

El que precisamente a estas familias de polinomios ortogonales se les llame clásicos es porque son las únicas, salvo cambios de variable, que verifican una serie de propiedades como son: Sus derivadas (y sus derivadas  $r$ -ésimas para cualquier  $r \geq 1$ ) siguen formando un sistema de polinomios ortogonales. Verifican una ecuación diferencial de la forma  $A(x)y'' + B(x)y' + \lambda_n y = 0$ , donde  $A(x)$  y  $B(x)$  son polinomios independientes de  $n$ , y  $\lambda_n$  independiente de  $x$ . Pueden expresarse mediante una fórmula de tipo Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{E_n(x)w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [w(x)\rho(x)^n],$$

donde  $w(x)$  es el peso,  $\rho(x)$  un polinomio independiente de  $n$  y  $E_n(x)$  independiente de  $x$ . Una explicación más detallada de estas caracterizaciones puede verse en Chihara [1, pág. 150].

Como los polinomios de Chebyshev de 1.<sup>a</sup> y 2.<sup>a</sup> clase, los de Legendre y los ultrasféricos son casos particulares de los de Jacobi, nos dedicaremos aquí a estudiar simplemente los polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite. Veremos además algunas de sus generalizaciones. Para la demostración de las propiedades que aquí enunciemos, además de muchas otras, puede consultarse Szegő [1].

Comencemos con los de Jacobi. Su definición mediante la fórmula de Rodrigues es la siguiente:

$$(1.25) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{(-2)^n n! (1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}].$$



Utilizando la fórmula de Leibniz para la derivada  $n$ -ésima del producto de funciones obtenemos la siguiente expresión explícita de los polinomios de Jacobi:

$$(1.26) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{n} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k}.$$

A partir de la expresión (1.25) y empleando partes reiteradamente es fácil demostrar que para cada  $\alpha, \beta > -1$  se cumple

$$(1.27) \quad \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = h_n^{(\alpha, \beta)} \delta_{nm},$$

donde

$$(1.28) \quad h_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

Por tanto,  $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n=0}^\infty$  constituye un sistema completo de polinomios ortogonales en  $[-1, 1]$  con peso  $w(x) = w^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ . Además, por la fórmula de Stirling,

$$(1.29) \quad h_n^{(\alpha, \beta)} \approx \frac{2^{\alpha+\beta}}{n} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

El coeficiente director de cada  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  es

$$(1.30) \quad k_n^{(\alpha, \beta)} = 2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} = 2^{-n} \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

y de nuevo por Stirling

$$(1.31) \quad k_n^{(\alpha, \beta)} \approx \frac{2^{n+\alpha+\beta}}{\pi^{1/2} n^{1/2}} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Usando (1.26), es inmediato que

$$(1.32) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x)$$

y

$$(1.33) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}, \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}.$$

Los polinomios de Jacobi pueden obtenerse a partir de la siguiente relación de recurrencia:

$$P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1, \quad P_1^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha+\beta+2)x}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$$

y para  $n \geq 2$ ,

$$(1.34) \quad \begin{aligned} & 2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \\ &= (2n + \alpha + \beta - 1)\{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)x + \alpha^2 - \beta^2\}P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) \\ & \quad - 2(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(x). \end{aligned}$$

La fórmula de Christoffel-Darboux consiste en

$$(1.35) \quad \begin{aligned} K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k^{(\alpha, \beta)}} P_k^{(\alpha, \beta)}(x) P_k^{(\alpha, \beta)}(y) \\ &= \frac{2^{-\alpha-\beta}}{2n + \alpha + \beta + 2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n + \alpha + \beta + 2)}{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)} \\ & \quad \times \frac{P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x)P_n^{(\alpha, \beta)}(y) - P_n^{(\alpha, \beta)}(x)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(y)}{x - y}. \end{aligned}$$

Las derivadas de los polinomios de Jacobi cumplen

$$(1.36) \quad \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x).$$

Dos fórmulas que relacionan polinomios de Jacobi de distinto rango son las siguientes:

$$(1.37) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2n + \alpha + \beta + 1} P_n^{(\alpha+1, \beta)}(x) - \frac{n + \beta}{2n + \alpha + \beta + 1} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta)}(x),$$

$$(1.38) \quad P_n^{(\alpha, \beta+1)}(x) = \frac{2}{2n + \alpha + \beta + 2} \frac{(n + \beta + 1)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + (n + 1)P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x)}{1 + x}.$$

La primera de las dos puede demostrarse a partir de la idea de (ii) del Teorema 1.9 y la segunda con la idea de (i) o utilizando (1.22).

Vamos ahora a dar una serie de estimaciones asintóticas y acotaciones de los polinomios de Jacobi que serán útiles cuando estudiemos la convergencia de la serie de Fourier.

**Teorema 1.11** (Fórmula de tipo Hilb)

Sean  $\alpha, \beta > -1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^\alpha \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) &= D_n^{-\alpha} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \left(\frac{\theta}{\sin \theta}\right)^{1/2} J_\alpha(D_n \theta) \\ & \quad + \begin{cases} \theta^{1/2} O(n^{-3/2}), & \text{si } C/n \leq \theta \leq \pi - \varepsilon, \\ \theta^{\alpha+2} O(n^\alpha), & \text{si } 0 < \theta \leq C/n, \end{cases} \end{aligned}$$

donde

$$J_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\alpha+2k}}{k! \Gamma(\alpha + k + 1)}$$

es la función de Bessel de orden  $\alpha$ ,  $D_n = n + (\alpha + \beta + 1)/2$  y  $C, \varepsilon$  son constantes positivas fijas.

Demostración:

Puede verse en Szegő [1, Teorema 8.21.12, pág. 197, y 8.63.(1), pág. 214]. Para hacerla se utiliza el método de Liouville-Steklov.

Notar que, sin más que utilizar (1.32) podemos deducir una fórmula similar en los intervalos  $\varepsilon \leq \theta \leq \pi - C/n$  y  $\pi - C/n \leq \theta < \pi$ .

Vamos ahora a utilizar la fórmula anterior para encontrar acotaciones de los polinomios de Jacobi en el intervalo  $[-1, 1]$ . Para ello, nos serviremos de las siguientes estimaciones de las funciones de Bessel, que pueden verse en Watson [1] o en Szegő [1, pág. 15]:

$$(1.39) \quad J_\alpha(z) = O(z^\alpha), \quad z \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad J_\alpha(z) = O(z^{-1/2}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Con esto,

### **Teorema 1.12**

Existe  $C$  independiente de  $x \in [-1, 1]$  y  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$n^{1/2} |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| \leq C \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-(\alpha/2+1/4)} \left(1 + x + \frac{1}{n^2}\right)^{-(\beta/2+1/4)}$$

(recordar que  $(h_n^{(\alpha, \beta)})^{-1/2} \sim n^{1/2}$  luego la cota anterior es precisamente la que corresponde a los polinomios normalizados).

Demostración:

Si en el teorema anterior tomamos  $\varepsilon = \pi/2$  y empleamos

$$J_\alpha(D_n \theta) = O((D_n \theta)^{-1/2}) \quad \text{cuando } D_n \theta \rightarrow \infty,$$

$$J_\alpha(D_n \theta) = O((D_n \theta)^\alpha) \quad \text{cuando } D_n \theta \rightarrow 0,$$

$$(\cos(\theta/2))^{-\beta} = O(1), \quad (\sin(\theta/2))^{-\alpha} = O(\theta^{-\alpha}), \quad (\theta/\sin \theta)^{1/2} = O(1)$$

y la fórmula de Stirling, obtenemos

$$(1.40) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = \begin{cases} \theta^{-\alpha-1/2} O(n^{-1/2}), & \text{en } C/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ O(n^\alpha), & \text{en } 0 < \theta \leq C/n. \end{cases}$$

Haciendo ahora el cambio de variable  $x = \cos \theta$ , con lo cual  $x \approx 1 - \theta^2/2$ , de (1.40) se sigue

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \begin{cases} (1-x)^{-(\alpha/2+1/4)} O(n^{-1/2}), & \text{en } 0 \leq x \leq 1 - 1/n^2, \\ O(n^\alpha), & \text{en } 1 - 1/n^2 \leq x < 1. \end{cases}$$

De aquí, distinguiendo los casos en que exponente  $-(\alpha/2 + 1/4)$  es positivo y negativo, es fácil llegar a

$$(1.41) \quad n^{1/2} |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| \leq C(1-x+n^{-2})^{-(\alpha/2+1/4)} \quad \text{en } 0 \leq x \leq 1.$$

Por otra parte, utilizando (1.32), es claro que (1.41) implica

$$n^{1/2} |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| \leq C(1+x+n^{-2})^{-(\beta/2+1/4)} \quad \text{en } -1 \leq x \leq 0.$$

Combinando ahora estas dos últimas fórmulas se sigue el teorema.

### Corolario 1.13

Si  $\alpha, \beta \geq -1/2$ , existe  $C$  independiente de  $x \in [-1, 1]$  y  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$n^{1/2} |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| \leq C(1-x)^{-(\alpha/2+1/4)}(1+x)^{-(\beta/2+1/4)}.$$

#### Demostración:

Si  $\alpha \geq -1/2$ , entonces  $-(\alpha/2 + 1/4) \leq 0$ , y como  $1-x+n^{-2} \geq 1-x$ , tendremos que  $(1-x+n^{-2})^{-(\alpha/2+1/4)} \leq (1-x)^{-(\alpha/2+1/4)}$ . Análogamente ocurre con  $\beta$ . Por tanto, la demostración es inmediata sin más que utilizar el teorema.

Notar que lo que obtenemos en el corolario anterior es que, cuando  $\alpha, \beta \geq -1/2$ , los polinomios normalizados están acotados salvo constante por  $(1-x^2)^{-1/4} w^{(\alpha, \beta)}(x)^{-1/2}$  en  $[-1, 1]$ . Como luego veremos en el Capítulo III, estas acotaciones son las idóneas para estudiar la convergencia en media. Si modificamos el peso  $w^{(\alpha, \beta)}(x)$  multiplicándolo por una función  $r(x)$  lipschitziana y tal que  $r(x) > C > 0$ , el teorema de Korovos nos asegura que las cotas de los polinomios  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  ortonormales respecto al nuevo peso  $w(x) = r(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  en  $[-1, 1]$  siguen siendo salvo constante de la forma  $(1-x^2)^{-1/4} w(x)^{-1/2}$ . Pero esto ya no lo garantiza el teorema de Korovos si  $r(x)$  se anula en  $[-1, 1]$ . Análogamente ocurre con el Teorema 1.9 de modificación del peso por un polinomio. Solamente proporciona las cotas adecuadas cuando, en el conjunto  $A$  que estudiemos, el polinomio que modifica está acotado inferiormente por una constante positiva. Basta pensar que partiendo del Corolario 1.13 y modificando el peso multiplicándolo por  $(1-x^2)$ , las cotas que obtenemos ya no son las que se deducen del corolario para los polinomios correspondientes a  $w^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)$ , sino mucho peores.

Sin embargo, sí que se conocen estimaciones de diversos sistemas de polinomios ortonormales en  $[-1, 1]$  y que no tienen los problemas que acabamos de explicar. En la misma línea que el Teorema 1.12, aunque más generalizado, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 1.14**

Sea el peso

$$w(x) = r(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \prod_{k=1}^m |x-x_k|^{\gamma_k},$$

donde  $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1$ ,  $\alpha, \beta, \gamma_k > -1$ ,  $0 < C_1 < r(x) < C_2$  y el módulo de continuidad de  $r(x)$ ,

$$m(r, t) = \sup\{|r(x) - r(y)| : x, y \in (-1, 1), |x - y| \leq t\},$$

cumple  $m(r, t)t^{-1} \in L^1(0, 2)$ . Entonces, existe  $C$  independiente de  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in [-1, 1]$  tal que los polinomios ortonormales respecto a  $w(x)$  cumplen

$$|p_n(x)| \leq C \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-(\alpha/2+1/4)} \left(1 + x + \frac{1}{n^2}\right)^{-(\beta/2+1/4)} \prod_{k=1}^m \left(|x - x_k| + \frac{1}{n}\right)^{-\gamma_k/2}.$$

Demostración:

Ver Badkov [3, pág. 227].

Vamos ahora a dar una serie de resultados sobre los polinomios de Laguerre. En primer lugar, su definición, que en términos de la fórmula de Rodrigues es

$$(1.42) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{\alpha+n}], \quad \alpha > -1.$$

Utilizando la fórmula de Leibniz para la derivada  $n$ -ésima del producto de funciones es fácil obtener la siguiente expresión explícita:

$$(1.43) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

De aquí, es evidente que

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n},$$

y que el coeficiente director de  $L_n^{(\alpha)}(x)$  es  $k_n^{(\alpha)} = (-1)^n/n!$ .

Por otra parte, a partir de (1.42) y empleando partes reiteradamente es fácil demostrar que para cada  $\alpha > -1$  se cumple

$$(1.44) \quad \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) e^{-x} x^\alpha dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{nm}.$$

Por tanto,  $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^\infty$  forman un sistema de polinomios ortogonales en  $(0, \infty)$  con peso  $w(x) = w^{(\alpha)}(x) = e^{-x} x^\alpha$ .

Para ver que es completo, en los de Jacobi utilizábamos el teorema de Weierstrass que requiere que el soporte sea acotado. Aquí debemos utilizar el teorema

que dice las combinaciones lineales de las funciones  $\{e^{-x/2}x^{\alpha/2}x^n\}_{n=0}^{\infty}$  son densas en  $L^2(0, \infty)$  para cada  $\alpha > -1$ . (Ver este resultado, por ejemplo, en Szegő [1, Teorema 5.7.1, pág. 108].)

La fórmula de recurrencia que verifican los polinomios de Laguerre es

$$(1.45) \quad (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

siendo  $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ ,  $L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1$ .

Y la fórmula de Christoffel-Darboux es

$$(1.46) \quad \begin{aligned} K_n^{(\alpha)}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)} L_k^{(\alpha)}(x)L_k^{(\alpha)}(y) \\ &= \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)L_{n+1}^{(\alpha)}(y) - L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(y)}{x-y}. \end{aligned}$$

La expresión para las derivadas de los polinomios de Laguerre es muy sencilla:

$$(1.47) \quad \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x),$$

así como la siguientes fórmulas que relacionan polinomios de distinto rango:

$$(1.48) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x),$$

$$(1.49) \quad nL_n^{(\alpha)}(x) = -xL_{n-2}^{(\alpha+2)}(x) - (\alpha+1-x)L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

Los polinomios de Hermite, definidos mediante la siguiente fórmula de tipo Rodrigues

$$(1.50) \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}),$$

verifican

$$(1.51) \quad \int_{\mathbb{R}} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx = \pi^{1/2}2^n n! \delta_{nm},$$

luego forman un sistema ortogonal en  $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$ . Además, este sistema es completo pues las combinaciones lineales de las funciones  $\{e^{-x^2/2}x^n\}_{n=0}^{\infty}$  son densas en  $L^2(\mathbb{R})$  (ver Szegő [1, Teorema 5.7.1, pág. 108]). Una expresión explícita de los polinomios de Hermite es

$$(1.52) \quad H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{k! (n-2k)!},$$

siendo  $[n/2]$  la parte entera de  $n/2$ .

A partir de (1.52) es inmediato comprobar que el coeficiente director de cada  $H_n(x)$  es  $2^n$  y los valores que toman en cero son

$$H_{2m+1}(0) = 0 \quad \text{y} \quad H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!}.$$

Sus derivadas cumplen la relación  $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ .

La fórmula de recurrencia que verifican los polinomios de Hermite es la siguiente:

$$(1.53) \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad \text{siendo } H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

Por último, he aquí la correspondiente fórmula de Christoffel-Darboux para sus núcleos:

$$(1.54) \quad \begin{aligned} K_n(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\pi^{1/2} 2^k k!} H_k(x) H_k(y) \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2} 2^{n+1} n!} \frac{H_{n+1}(x) H_n(y) - H_n(x) H_{n+1}(y)}{x - y}. \end{aligned}$$

Suele ser muy usual utilizar en lugar de los polinomios las funciones de Laguerre y Hermite, que se definen como

$$(1.55) \quad \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) = \left( \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \right)^{-1/2} x^{\alpha/2} e^{-x/2} L_n^{(\alpha)}(x), \quad \alpha > -1,$$

$$(1.56) \quad \mathcal{H}_n(x) = (\pi^{1/2} 2^n n!)^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x),$$

y que, evidentemente a partir de lo que ya sabemos para polinomios, forman un sistema ortonormal completo en  $L^2([0, \infty), dx)$  y  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  respectivamente.

Sin más que utilizar (1.46) y (1.54) es inmediato comprobar que sus núcleos verifican las siguientes fórmulas de Christoffel-Darboux:

$$(1.57) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}_n^{(\alpha)}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \mathcal{L}_k^{(\alpha)}(x) \mathcal{L}_k^{(\alpha)}(y) \\ &= (n + 1)^{1/2} (n + \alpha + 1)^{1/2} \frac{\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x) \mathcal{L}_{n+1}^{(\alpha)}(y) - \mathcal{L}_{n+1}^{(\alpha)}(x) \mathcal{L}_n^{(\alpha)}(y)}{x - y}, \end{aligned}$$

$$(1.58) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}_n(x, y) &= \sum_{k=0}^n \mathcal{H}_k(x) \mathcal{H}_k(y) \\ &= \left( \frac{n + 1}{2} \right)^{1/2} \frac{\mathcal{H}_{n+1}(x) \mathcal{H}_n(y) - \mathcal{H}_n(x) \mathcal{H}_{n+1}(y)}{x - y}. \end{aligned}$$

Para estudiar el comportamiento de las series de Fourier se necesita conocer estimaciones de las funciones  $\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(x)$  y  $\mathcal{H}_n(x)$ . Como en este trabajo no las vamos a utilizar, simplemente citaremos dónde pueden consultarse. Las primeras acotaciones destinadas al estudio de la convergencia en media de series de Hermite y de Laguerre con  $\alpha \geq 0$  pueden verse en Askey-Wainger [1]. Más adelante Muckenhoupt [3] las simplifica y utilizando (1.48) y (1.49) las extiende hasta  $\alpha > -1$ . De todas formas sus expresiones no son tan satisfactorias por su sencillez como las que hemos visto para polinomios de Jacobi.

Por último, vamos a ver una clase de polinomios ortogonales que incluye como caso particular a los de Hermite y que son los polinomios de Hermite generalizados. Tales polinomios, que denotaremos  $H_n^{(\mu)}(x)$  ( $\mu > -1/2$ ), se definen como los polinomios ortogonales en  $\mathbb{R}$  respecto al peso  $w(x) = w^{(\mu)}(x) = |x|^{2\mu} e^{-x^2}$  y cuyo coeficiente director es  $2^n$ . Así como la convergencia de las series de Fourier de polinomios o funciones de Laguerre y Hermite ya está estudiada por Askey-Wainger [1] y Muckenhoupt [3], las series de Hermite generalizadas permanecen sin estudiar. Nos ocuparemos de ello en el Capítulo VI, donde veremos todo esto con más detenimiento. Por el momento únicamente citaremos la siguientes relaciones entre polinomios de Hermite generalizados y polinomios de Laguerre:

$$(1.59) \quad H_{2m}^{(\mu)}(x) = (-1)^m 2^{2m} m! L_m^{(\mu-1/2)}(x^2),$$

$$(1.60) \quad H_{2m+1}^{(\mu)}(x) = (-1)^m 2^{2m+1} m! x L_m^{(\mu+1/2)}(x^2).$$

Para más información sobre los polinomios de Hermite generalizados puede verse el libro de Chihara [1, pág. 156].



## CAPÍTULO II

### Acotación de la transformada de Hilbert para cierto tipo de pesos $A_p$

En este capítulo veremos, fundamentalmente, condiciones sobre  $p$  y sobre  $w : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$  peso, para que diversos operadores

$$T : L^p(\mathbb{R}, w(x)) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}, w(x))$$

estén acotados. Estudiaremos esto también con dos pesos  $u(x), v(x)$ ; es decir, cuándo

$$T : L^p(\mathbb{R}, v(x)) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}, u(x))$$

es acotado.

Cuando no se satisfaga esta condición podremos debilitarla un poco de la siguiente forma:

Para cada  $\lambda > 0$  y  $1 \leq p < \infty$  es claro que

$$\int_{|T(f,x)| > \lambda} u(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} |T(f,x)/\lambda|^p u(x) dx;$$

por tanto, puede ocurrir que no llegue a verificarse

$$\int_{\mathbb{R}} |T(f,x)|^p u(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x) dx,$$

que caracteriza la acotación de  $T$ , pero sí

$$\int_{|T(f,x)| > \lambda} u(x) dx \leq C \lambda^{-p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x) dx$$

para alguna constante  $C$  independiente de  $\lambda > 0$  y  $f$ .

En el primer caso diremos que el operador  $T$  es de tipo  $(p, p)$  ó  $(p, p)$  fuerte y en el segundo que es de tipo  $(p, p)$  débil o que

$$T : L^p(\mathbb{R}, v(x)) \longrightarrow L_*^p(\mathbb{R}, u(x))$$

está acotado.

Posteriormente, estudiaremos este tipo de acotaciones para familias de pesos  $u_n$  y  $v_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ .

Todo esto es análogo cuando el soporte de los pesos es un intervalo  $(a, b)$  en vez de toda la recta real. En el resto del capítulo denotaremos únicamente  $L^p(w)$  o  $L_*^p(w)$ .  $C$  será una constante posiblemente distinta en cada situación.

Los operadores que trataremos serán los siguientes:

**Definición 2.1**

- (i) Llamaremos transformada de Hilbert al operador  $H$  que a cada función  $f$  asocia

$$H(f, x) = \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x - y} dy.$$

A partir de ahora prescindiremos de escribir v. p. en su notación.

- (ii) Si para cada intervalo  $I$  real acotado denotamos  $|I|$  su medida de Lebesgue, llamaremos operador maximal de Hardy-Littlewood a

$$M(f, x) = \sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)| dy : x \in I \right\}.$$

Análogamente se define la transformada de Hilbert integrando únicamente sobre  $(a, b)$  en lugar de  $\mathbb{R}$  y el operador maximal exigiendo  $I \subset (a, b)$ . Emplearemos a partir de ahora la notación  $I$  para denominar un intervalo. Además, usaremos el convenio  $0 \cdot \infty = 0$ , luego aquí y en lo sucesivo no hará falta exigir que  $I$  sea acotado.

Para estudiar las acotaciones de estos operadores utilizaremos la teoría  $A_p$  de pesos, desarrollada principalmente por Muckenhoupt. Veamos en primer lugar la definición:

**Definición 2.2**

Dado un intervalo  $(a, b)$  fijo ( $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ), diremos que un peso  $w(x)$  está en  $A_p(a, b)$  ( $1 < p < \infty$ ) si cumple

$$\left( \frac{1}{|I|} \int_I w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|I|} \int_I w(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq C$$

para todo  $I \subseteq (a, b)$ , siendo  $C$  independiente de  $I$ .

Obviamente, si  $a = -b$  y el peso  $w$  es par, basta comprobarlo para  $I \subseteq (0, b)$ .

Vamos ahora a ver un breve resumen de la teoría  $A_p$  de pesos. Veamos en primer lugar una serie de propiedades que cumplen las clases  $A_p$ . Puede consultarse todo esto con más detalle en García Cuerva-Rubio de Francia [1, Cap. IV].

Por definición, es obvio

$$(2.1) \quad w \in A_p(a, b) \Rightarrow w, w^{-1/(p-1)} \text{ localmente integrables.}$$

Y es inmediato comprobar

$$(2.2) \quad w \in A_p(a, b) \Rightarrow w^{-1/(p-1)} \in A_q(a, b) \quad (1/p + 1/q = 1).$$

Además, utilizando la desigualdad de Hölder se demuestra

$$(2.3) \quad r < p \Rightarrow A_r(a, b) \subseteq A_p(a, b),$$

$$(2.4) \quad w \in A_p(a, b), 0 < \tau < 1 \Rightarrow w^\tau \in A_p(a, b).$$

Una propiedad importante es la desigualdad de Hölder inversa, que afirma que si  $w \in A_p(a, b)$ , existe  $\delta > 1$  tal que

$$(2.5) \quad \left( \frac{1}{|I|} \int_I w(x)^\delta dx \right)^{1/\delta} \leq C \left( \frac{1}{|I|} \int_I w(x) dx \right)$$

para alguna constante  $C$  independiente de  $I \subseteq (a, b)$ . El nombre de desigualdad de Hölder inversa se debe a que la desigualdad contraria a (2.5) con  $C = 1$  es inmediata usando la desigualdad de Hölder.

Y empleando la desigualdad de Hölder inversa es fácil demostrar

$$(2.6) \quad w \in A_p(a, b) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } w \in A_{p-\varepsilon}(a, b),$$

$$(2.7) \quad w \in A_p(a, b) \Rightarrow \exists \delta > 1 \text{ tal que } w^\delta \in A_p(a, b).$$

Combinando (2.3) y (2.6) es claro que  $A_p(a, b) = \cup \{A_r(a, b) : r < p\}$ .

Las clases  $A_p$  son importantes debido al siguiente resultado:

### **Teorema 2.3**

Sea  $T$  el operador  $H$  o  $M$  y  $1 < p < \infty$ . Son equivalentes:

(i)  $w \in A_p(a, b)$ .

(ii)  $T : L^p((a, b), w) \longrightarrow L^p((a, b), w)$  acotado.

(iii)  $T : L^p((a, b), w) \longrightarrow L^p_*((a, b), w)$  acotado.

Además, las constantes de la definición de  $A_p$  y de la norma de  $T$  como operador dependen únicamente unas de otras.

Demostración:

Cuando  $T = M$  fue probado por Muckenhoupt [4] y para  $T = H$  por Hunt-Muckenhoupt-Wheeden [1].

El teorema anterior resulta de gran importancia pues encuentra condiciones necesarias y suficientes para que los operadores  $H$  y  $M$  sean acotados. Antes de llegar a su demostración ya había algunos precedentes, como son los siguientes: Cuando  $T = H$  y  $w = 1$ , que  $T$  es acotado para  $1 < p < \infty$  es el teorema de M. Riesz [1] (su demostración original se refería a la circunferencia unidad). Además, cuando  $p = 1$ , Kolmogorov [1] demostró que  $H$  es  $(1, 1)$  débil. La acotación del operador  $M$  con  $w = 1$  y  $1 < p < \infty$  se debe a Hardy-Littlewood [1]. Por último, cuando  $w(x) = |x|^r$ ,  $-1 < r < p - 1$ , que  $H$  es acotado fue probado por Hardy-Littlewood [2] y que  $M$  también lo es por Stein [1].

Si en la definición de peso en  $A_p(a, b)$ , hacemos tender  $p$  a 1 queda

$$\left( \frac{1}{|I|} \int_I w(x) dx \right) \sup \text{ess} \{w(x)^{-1} : x \in I\} \leq C,$$

o sea

$$(2.8) \quad \left( \frac{1}{|I|} \int_I w(x) dx \right) \leq C \inf \text{ess} \{w(x) : x \in I\}.$$

Pero esta condición es equivalente a

$$(2.9) \quad M(w, x) \leq Cw(x) \text{ a.e.},$$

que se toma como definición de peso en  $A_1(a, b)$ .

Es inmediato comprobar que cualquier peso que satisface (2.8) satisface también la definición de  $A_p(a, b)$ , luego  $A_1(a, b) \subset A_p(a, b) \forall p > 1$  (en particular, cualquier peso en  $A_1(a, b)$  debe verificar (2.1)  $\forall p > 1$ ). Sin embargo, no es cierto el recíproco: existen pesos que están en  $A_p(a, b) \forall p > 1$  pero no están en  $A_1(a, b)$ . Veamos un ejemplo. Sea  $w(x) = (-\log x)^r$  con  $r < 0$  y vamos a demostrar que  $w(x)$  está en  $A_p(0, 1/2) \forall p > 1$  pero no está en  $A_1(0, 1/2)$ . Que no está en  $A_1(0, 1/2)$  es inmediato ya que la desigualdad

$$M((-\log y)^r, x) = \sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I (-\log y)^r dy : x \in I \right\} \leq C(-\log x)^r.$$

es imposible que se verifique para  $x$  cercano a 0, pues  $(-\log 0)^r = 0$ . Por otra parte, dado  $p > 1$  veamos que sí que existe  $C$  tal que

$$G(c, d) = \left( \frac{1}{d-c} \int_c^d (-\log x)^r dx \right) \left( \frac{1}{d-c} \int_c^d (-\log x)^{-r/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq C$$

para  $0 \leq c < d \leq 1/2$ .

En primer lugar, supongamos  $0 \leq c \leq d/2$ . Por ser  $(-\log x)^r$  creciente, es claro que el primer factor de  $G(c, d)$  está acotado por  $(-\log d)^r$ . Y para acotar el

segundo factor por  $(-\log d)^{-r}$ , salvo constante, basta hacer el cambio de variable  $y = -\log x$  y utilizar la siguiente estimación de la función gamma incompleta, válida para  $a > 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$  (ver Erdélyi y otros [1, Vol. II, pág. 135])

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty e^{-y} y^{a-1} dy \approx z^{a-1} e^{-z}.$$

Por último, si  $d/2 \leq c \leq d$ , la comprobación de que  $G(c, d) \leq C$  es inmediata sin más que utilizar que  $(-\log x)^r$  es creciente y  $(-\log x)^{-r/(p-1)}$  decreciente.

Es fácil demostrar utilizando (2.8) que si  $w_1$  y  $w_2$  son pesos en  $A_1(a, b)$ , entonces  $w(x) = w_1(x)w_2(x)^{1-p}$  está en  $A_p(a, b)$ . Pero el teorema de factorización de P. Jones nos asegura que también es cierto el recíproco, es decir

$$w \in A_p(a, b) \iff \exists w_1, w_2 \in A_1(a, b) \text{ tales que } w = w_1 \cdot w_2^{1-p}.$$

La demostración original se debe a P. Jones [1], pero otra más sencilla, análoga a la del Lema 2.10, se encuentra en Coifman-Jones-Rubio de Francia [1].

Un resultado que permite encontrar pesos en  $A_1(a, b)$  de forma sencilla es el que sigue: Si dada  $\mu$  medida de Borel positiva denotamos

$$M(\mu, x) = \sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I d\mu : x \in I \right\},$$

se demuestra (ver García Cuerva-Rubio de Francia [1, Cap. II, Teorema 3.4]) que el peso  $w(x) = M(\mu, x)^r$  con  $0 \leq r < 1$  está en  $A_1(a, b)$ .

Apliquémoslo a la medida  $\mu = \delta_0$  (delta de Dirac en cero). Si suponemos que  $0 \in [a, b]$ , tendremos

$$M(\mu, x) = \sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I d\delta_0 : x \in I \right\} = \sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} : 0, x \in I \right\} = \frac{1}{|x|}.$$

Por lo tanto, valiéndonos de este resultado y de (2.1) obtenemos

$$(2.10) \quad |x|^r \in A_1(a, b) \iff -1 < r \leq 0.$$

(Si  $0 \notin [a, b]$  pero  $a = -\infty$  o  $b = \infty$ , utilizando que  $|x|^r$  debe estar en  $A_p(a, b)$   $\forall p > 1$  y tomando  $I$  de la forma  $[-n, b]$  o  $[a, n]$ , llegamos de nuevo a la conclusión (2.10). Pero cuando  $0 \notin [a, b]$  y  $(a, b)$  acotado entonces  $|x|^r \in A_1(a, b) \forall r \in \mathbb{R}$ , ya que en este caso  $|x|^r \sim 1$  en  $(a, b)$ ).

A partir de (2.10) y del teorema de factorización es inmediato demostrar que:

$$(2.11) \quad |x|^r \in A_p(\mathbb{R}) \iff -1 < r < p - 1.$$

En efecto, si  $-1 < r \leq 0$ , podemos descomponer  $|x|^r = |x|^r \cdot 1^{1-p}$  (o usar  $A_1(\mathbb{R}) \subset A_p(\mathbb{R})$ ) y si  $0 \leq r < p - 1$  basta tomar  $|x|^r = 1 \cdot (|x|^{-r/(p-1)})^{1-p}$ . Por otra parte, la integrabilidad de  $x^r$  en  $(0, 1)$  implica  $r > -1$  y la de  $x^{-r/(p-1)}$  implica  $r < p - 1$ .

De todas formas, es fácil dar una demostración directa de (2.11). Basta comprobar que para  $I = (c, d)$  con  $0 \leq c < d$  se cumple

$$\begin{aligned} \int_c^d |x|^r dx \left( \int_c^d |x|^{-r/(p-1)} dx \right)^{p-1} \\ = C(d^{r+1} - c^{r+1})(d^{(-r+p-1)/(p-1)} - c^{(-r+p-1)/(p-1)})^{p-1} \leq C_1(d-c)^p \end{aligned}$$

con  $C_1$  independiente de  $c, d$ .

Para ello, sea  $d$  fijo,  $z = d - c$  y definamos

$$g_d(z) = z^{-p}[d^{r+1} - (d-z)^{r+1}][d^{(-r+p-1)/(p-1)} - (d-z)^{(-r+p-1)/(p-1)}]^{p-1}, \quad z \in (0, d).$$

Bastará ver que existe  $C$  tal que

$$|g_d(z)| \leq C \quad \forall z \in (0, d) \quad \text{y} \quad \forall d \in (0, \infty).$$

Pero es inmediato que  $g_d(z) = g_1(z/d)$  y por tanto es suficiente comprobar  $|g_1(z)| \leq C \quad \forall z \in (0, 1)$ . Además,  $g_1(z)$  es continua en  $(0, 1)$ , luego para demostrar que está acotada sólo hay que ver que lo está al tender a 0 y a 1. Que  $\lim_{z \rightarrow 1} g_1(z) = 1$  es evidente, y para hallar  $\lim_{z \rightarrow 0} g_1(z)$  basta con que utilicemos la equivalencia  $(1+z)^m - 1 \approx mz$ .

Vamos ahora a ver cuándo un peso del tipo  $w(x) = |x|^r(1+|x|)^{s-r}$  está en  $A_p(\mathbb{R})$ . Intuitivamente es claro que para  $x$  cercano a 0 la parte  $(1+|x|)^{s-r}$  es despreciable, luego ahí el peso es aproximadamente  $|x|^r$ , y cuando  $x \rightarrow \infty$  tenemos  $1+|x| \approx |x|$  luego el peso se comporta aquí como  $|x|^r|x|^{s-r} = |x|^s$ . Podemos pues suponer que  $w(x) \in A_p(\mathbb{R})$  si y sólo si  $|x|^r$  y  $|x|^s$  lo están. Todos estos argumentos los rigorezaremos en el siguiente lema:

#### Lema 2.4

Sean dos pesos  $u, v$  definidos en un intervalo  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , y supongamos que existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$0 < \lambda_1 < v(x) < \lambda_2 \quad \forall x \in (a, c) \quad \text{y} \quad 0 < \lambda_3 < u(x) < \lambda_4 \quad \forall x \in (c, b).$$

Supongamos que existen otros dos pesos  $\omega \in A_p(a, b)$  y  $\nu \in A_p(a, b)$  ( $1 < p < \infty$ ) y constantes positivas  $\lambda_i$  cumpliendo

$$\lambda_5 \omega(x) \leq u(x) \leq \lambda_6 \omega(x) \quad \forall x \in (a, c) \quad \text{y} \quad \lambda_7 \nu(x) \leq v(x) \leq \lambda_8 \nu(x) \quad \forall x \in (c, b).$$

En estas condiciones, si se verifica

$$(1) \quad \omega(x) \leq \lambda_9 \nu(x) \quad \forall x \in (a, c) \quad \text{y} \quad \nu(x) \leq \lambda_{10} \omega(x) \quad \forall x \in (c, b)$$

o

$$(2) \quad \nu(x) \leq \lambda_{11} \omega(x) \quad \forall x \in (a, c) \quad \text{y} \quad \omega(x) \leq \lambda_{12} \nu(x) \quad \forall x \in (c, b)$$

entonces  $uv \in A_p(a, b)$ .

Demostración:

Tenemos que probar que existe  $C$  independiente de  $I \subseteq (a, b)$  tal que

$$\int_I uv \, dx \left( \int_I (uv)^{-1/(p-1)} \, dx \right)^{p-1} \leq C|I|^p.$$

Si  $I \subseteq (a, c)$  es obvio por  $\omega \in A_p(a, b)$  y si  $I \subseteq (c, b)$  por  $\nu \in A_p(a, b)$ .

En general, sea  $I_1 = I \cap (a, c)$  e  $I_2 = I \cap (c, b)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} & \int_I uv \, dx \left( \int_I (uv)^{-1/(p-1)} \, dx \right)^{p-1} \\ & \leq C \left( \int_{I_1} u \, dx + \int_{I_2} v \, dx \right) \left( \int_{I_1} u^{-1/(p-1)} \, dx + \int_{I_2} v^{-1/(p-1)} \, dx \right)^{p-1} \\ & \leq C \left( \int_{I_1} \omega \, dx + \int_{I_2} \nu \, dx \right) \left( \int_{I_1} \omega^{-1/(p-1)} \, dx + \int_{I_2} \nu^{-1/(p-1)} \, dx \right)^{p-1} = G(I). \end{aligned}$$

Supongamos (1). Entonces,

$$\int_{I_1} \omega \, dx + \int_{I_2} \nu \, dx \leq \lambda_9 \int_{I_1} \nu \, dx + \int_{I_2} \nu \, dx \leq C \int_I \nu \, dx$$

y

$$\int_{I_1} \omega \, dx + \int_{I_2} \nu \, dx \leq \int_{I_1} \omega \, dx + \lambda_{10} \int_{I_2} \omega \, dx \leq C \int_I \omega \, dx.$$

Así,

$$\begin{aligned} G(I) & \leq C \min \left\{ \int_I \omega \, dx, \int_I \nu \, dx \right\} \\ & \quad \times \max \left\{ \left( \int_I \omega^{-1/(p-1)} \, dx \right)^{p-1}, \left( \int_I \nu^{-1/(p-1)} \, dx \right)^{p-1} \right\}. \end{aligned}$$

Acotando el mínimo por la integral sobre  $I$  de  $\omega$  o  $\nu$  según cual de los dos dé el máximo, y como, sea cual sea, estará en  $A_p(a, b)$ , se obtiene la cota  $G(I) \leq C|I|^p$ . Análogamente se hace cuando se cumple (2).

A partir de ahora,  $0 < \lambda_1 < v(x) < \lambda_2 \forall x \in (a, c)$  lo denotaremos simplemente  $v(x) \sim \text{cte.}$  en  $(a, c)$ , y  $\lambda_1 \omega(x) \leq u(x) \leq \lambda_2 \omega(x) \forall x \in (a, c)$  ( $\lambda_i > 0$ ) lo pondremos  $w(x) \sim u(x)$  en  $(a, c)$ . Por otra parte, por razones de comodidad los pesos los tomaremos de la forma  $w(x) = |x|^{\alpha p} (1 + |x|)^{(\beta - \alpha)p}$ , con  $p$  en el exponente, ya que así

$$\left[ |x|^{\alpha p} (1 + |x|)^{(\beta - \alpha)p} \right]^{-1/(p-1)} = |x|^{-\alpha q} (1 + |x|)^{-(\beta - \alpha)q},$$

que es más sencillo de escribir.

Utilizando el lema,

**Teorema 2.5**

Se verifica

$$|x|^{\alpha p}(1+|x|)^{(\beta-\alpha)p} \in A_p(\mathbb{R}) \iff \frac{-1}{p} < \alpha, \beta < \frac{1}{q}.$$

Demostración:

Con la notación del lema anterior, sean los pesos

$$u(x) = \left( \frac{|x|}{1+|x|} \right)^{\alpha p}, \quad v(x) = (1+|x|)^{\beta p}, \quad \omega(x) = |x|^{\alpha p}, \quad \nu(x) = |x|^{\beta p},$$

todos ellos definidos en  $(0, \infty)$  y tomemos  $c = 1$ . Es claro que  $\omega(x) \sim u(x)$  en  $(0, 1)$  y  $\nu(x) \sim u(x)$  en  $(1, \infty)$ . Además, según hemos visto en (2.11),  $\omega \in A_p(0, \infty)$  para  $-1/p < \alpha < 1/q$  y  $\nu \in A_p(0, \infty)$  para  $-1/p < \beta < 1/q$ . Y se cumple (1) o (2) del lema según sea  $\beta \leq \alpha$  o  $\alpha \leq \beta$  respectivamente. Por tanto,

$$u(x)v(x) = |x|^{\alpha p}(1+|x|)^{(\beta-\alpha)p} \in A_p(0, \infty) \quad \text{para} \quad \frac{-1}{p} < \alpha, \beta < \frac{1}{q},$$

y lo mismo para  $A_p(\mathbb{R})$  por ser  $uv$  un peso par.

Falta comprobar que las condiciones  $-1/p < \alpha, \beta < 1/q$  son necesarias. Tomando  $I = [0, 1]$ , como aquí la parte  $(1+|x|)^{(\beta-\alpha)p}$  es despreciable, utilizando (2.1) obtenemos  $\alpha > -1/p$  y  $\alpha < 1/q$ .

Y tomando  $I = [1, n]$ ,  $n \geq 2$ , como  $|x| < 1 + |x| \leq 2|x|$ , la condición  $A_p$  sobre este intervalo es equivalente a

$$(n-1)^{-p} \left( \int_I x^{\alpha p} dx \right) \left( \int_I x^{-\beta q} dx \right)^{p-1} \leq C.$$

De aquí, sin más que efectuar las integrales y exigir la acotación cuando  $n \rightarrow \infty$  de la expresión que aparece, obtenemos las condiciones  $\beta > -1/p$  y  $\beta < 1/q$ .

Hemos visto que la teoría  $A_p$  es muy útil a la hora de estudiar la acotación de los operadores  $H$  o  $M$  con un solo peso ya que la caracterizan totalmente. Sin embargo, los resultados que se obtienen para dos pesos son diferentes de los conocidos para uno solo y bastante más difíciles. Una primera idea para abordar este problema es definir las clases  $A_p$ .

**Definición 2.6**

Dados dos pesos  $u, v : (a, b) \rightarrow [0, \infty]$ , definimos

$1 < p < \infty$ :  $(u, v) \in A_p(a, b)$  si

$$\left( \frac{1}{|I|} \int_I u(x) dx \right) \left( \frac{1}{|I|} \int_I v(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq C, \quad I \subseteq (a, b).$$

$p = 1$ :  $(u, v) \in A_p(a, b)$  si  $M(u, x) \leq Cv(x)$  a.e.



Para evitar trivialidades supondremos que  $u$  no es la función constante nula y  $v$  no es la función constante infinito. Además, salvo que indiquemos expresamente lo contrario, utilizaremos siempre  $A_p(\mathbb{R})$  y lo denotaremos únicamente  $A_p$ . Esto no supone ninguna pérdida de generalidad pues si quisiéramos tomar  $(u, v)$  par de pesos en un intervalo  $(a, b) \neq \mathbb{R}$ , bastaría hacer  $u = 0$  fuera de  $[a, b]$  y  $v = \infty$  fuera de  $[a, b]$ . Por último, consideraremos siempre  $1 < p < \infty$  y cuando queramos referirnos a  $A_1$  lo escribiremos expresamente.

Veamos a continuación una serie de propiedades que cumplen las clases  $A_p$ :

Exactamente igual que para un solo peso se demuestra

$$(2.12) \quad (u, v) \in A_p \Rightarrow u, v^{-1/(p-1)} \text{ localmente integrables}$$

(en particular  $v > 0$  a.e.),

$$(2.13) \quad 1 < p < r < \infty \Rightarrow A_1 \subset A_p \subset A_r,$$

$$(2.14) \quad (u, v) \in A_p \iff (v^{-1/(p-1)}, u^{-1/(p-1)}) \in A_q.$$

Además, es fácil comprobar, utilizando la desigualdad de Hölder,

$$(2.15) \quad (u, v) \in A_p, 0 < \tau < 1 \Rightarrow (u^\tau, v^\tau) \in A_{\tau(p-1)+1}.$$

La propiedad anterior para  $p = 1$  se reduce a que  $(u^\tau, v^\tau) \in A_1$  cuando  $(u, v) \in A_1$  y  $0 < \tau < 1$ , que también es inmediato utilizando la desigualdad de Hölder.

A la vista de (2.11), la primera búsqueda que puede ocurrirnos para encontrar pares de pesos en  $A_p$  es ver cuándo  $(|x|^r, |x|^R) \in A_p$ . Pero para que esto ocurra es inmediato comprobar que debe ser  $r = R$ , con lo cual la condición necesaria y suficiente es  $-1 < r = R < p - 1$ . En efecto, que  $r > -1$  y  $R < p - 1$  es claro por integrabilidad local, y con esto:

Si  $I = [1, n]$ ,

$$\begin{aligned} \int_I x^r dx \left( \int_I x^{-R/(p-1)} dx \right)^{p-1} &\sim n^{r+1} n^{[-R/(p-1)+1](p-1)} \\ &= n^{r-R+p} \leq C(n-1)^p \iff R \geq r. \end{aligned}$$

Y si  $I = [0, 1/n]$ ,

$$\begin{aligned} \int_I x^r dx \left( \int_I x^{-R/(p-1)} dx \right)^{p-1} &\sim n^{-(r+1)} n^{[-R/(p-1)+1](p-1)} \\ &= n^{-r+R-p} \leq Cn^{-p} \iff R \leq r. \end{aligned}$$

Sin embargo, para  $A_p(0, 1)$  lo que se cumple es

$$(2.16) \quad (x^r, x^R) \in A_p(0, 1) \iff r > -1, R < p - 1, R \leq r.$$

La comprobación es inmediata sin más que tomar  $\alpha$  tal que  $R \leq \alpha \leq r$ ,  $\alpha > -1$  y  $\alpha < p - 1$ .

Podemos preguntarnos también si la condición  $(u, v) \in A_p$  es, como ocurría con un solo peso, necesaria y suficiente para que los operadores  $H$  o  $M$  sean acotados. Es fácil comprobar que esto no es cierto. Para ello, tomemos  $p = 2$  y el par de pesos

$$(2.17) \quad u(x) = (1 + |x|)^{-2}, \quad v(x) = (1 + |x|)^{-1}$$

y veamos que  $(u, v) \in A_2$ . Para ello, basta encontrar  $C$  independiente de  $c$  y  $d$  ( $0 \leq c < d < \infty$ ) tal que

$$W(c, d) = \left( \int_c^d (1 + x)^{-2} dx \right) \left( \int_c^d (1 + x) dx \right) \leq C(d - c)^2.$$

Haciendo el cambio  $1 + x = t$  y denotando  $A = 1 + c$ ,  $B = 1 + d$  resulta

$$W(c, d) = 2^{-1}(1/A - 1/B)(B^2 - A^2) = 2^{-1}[(A + B)/(AB)](d - c)^2$$

y es claro  $2^{-1}[(A + B)/(AB)] = 2^{-1}(1/A + 1/B) \leq 1$  pues  $A, B \geq 1$ .

Sin embargo, no sólo no es cierto que

$$T : L^2(v) \longrightarrow L^2(u)$$

sea acotado, sino que tampoco es cierta la acotación

$$T : L^2(v) \longrightarrow L_*^2(u).$$

Para comprobarlo, tomemos la función  $f = \chi_{[1, d]}$ ,  $d > 1$ , para la cual

$$H(f, x) = \log \left| \frac{x - 1}{x - d} \right|.$$

Es claro que  $f \in L^2(v)$ . Veamos que sin embargo no es posible

$$\int_{|H(f, x)| > \lambda} u(x) dx \leq C\lambda^{-2} \int_1^d v(x) dx.$$

Cuando  $x \in (0, 1)$ ,  $(d - x)/(1 - x) > d$  y por tanto

$$|H(f, x)| = \left| \log |(x - 1)/(x - d)| \right| = \left| \log(d - x)/(1 - x) \right| > \log d.$$

En consecuencia, si tomamos  $d = e^\lambda$  siempre será cierto  $|H(f, x)| > \lambda$  para  $x \in (0, 1)$  y por tanto, si existiera acotación débil, debería cumplirse

$$\int_0^1 (1 + |x|)^{-2} dx \leq C\lambda^{-2} \int_1^{e^\lambda} (1 + |x|)^{-1} dx = C\lambda^{-2} [\log(1 + e^\lambda) - \log 2].$$

Pero  $\lambda^{-2}[\log(1 + e^\lambda) - \log 2]$  es del orden de  $\lambda^{-1}$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ , luego no es posible la existencia de  $C$ .

Tampoco se verifica en general que  $M : L^p(v) \longrightarrow L^p(u)$  acotado cuando  $(u, v) \in A_p$ . Un contraejemplo debido a Muckenhoupt-Wheeden [1] es el siguiente:

$$p = 2, \quad u(x) = -x(\log x)\chi_{(0,1/2]}(x), \quad v(x) = x(\log x)^2 \text{ en } (0, 1/2] \text{ e } \infty \text{ fuera.}$$

De todas formas, con el operador maximal de Hardy-Littlewood la condición  $A_p$  se comporta algo mejor que con la transformada de Hilbert, como vemos a continuación:

**Teorema 2.7**

(i)  $(u, v) \in A_p \iff M : L^p(v) \longrightarrow L^p_*(u)$  acotado.

(ii)  $(u, v) \in A_p \implies M : L^r(v) \longrightarrow L^r(u)$  acotado  $\forall r > p$ .

(iii)  $(u, v) \in A_p, 0 < \tau < 1 \implies M : L^p(v^\tau) \longrightarrow L^p(u^\tau)$  acotado.

(iv)  $M : L^p(v) \longrightarrow L^p(u)$  acotado  $\iff (u, v) \in S_1$  clase de Sawyer caracterizada por

$$\int_I [M(\chi_I v^{-1/(p-1)}, x)]^p u(x) dx \leq C \int_I v(x)^{-1/(p-1)} dx < \infty.$$

Demostración:

(i) Puede verse en Muckenhoupt [4].

(ii) Por (i),  $M : L^p(v) \longrightarrow L^p_*(u)$  acotado. Por otra parte, como consecuencia de la cadena de desigualdades

$$\|Mf\|_{\infty, u} \leq \|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|_{\infty, v},$$

todas ellas de comprobación inmediata, obtenemos que

$$M : L^\infty(v) \longrightarrow L^\infty(u) \text{ acotado.}$$

Usando ahora el teorema de interpolación de Marcinkiewicz (ver Stein-Weiss [1, pág. 184]) queda probado (ii).

(iii) Por (2.15),  $(u^\tau, v^\tau) \in A_r$  con  $r = \delta(p-1)+1$ . Y por (ii) se sigue (iii) pues  $r < p$ .

(iv) Ver Sawyer [1].

Tras esto, vamos a dedicarnos a estudiar la transformada de Hilbert con dos pesos. Primero, basándonos de nuevo en Muckenhoupt-Wheeden [1], veamos condiciones necesarias para que esté acotada.

**Teorema 2.8**

Si  $H : L^p(v) \longrightarrow L^p_*(u)$  acotada y para cada intervalo  $I$  denotamos  $x_I$  su centro, existe  $C$  independiente de  $I$  tal que

$$(2.18) \quad \left( \int_I u(x) dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{v(x)^{-1/(p-1)}}{(|I| + |x - x_I|)^q} dx \right)^{p-1} \leq C.$$

En particular,  $(u, v) \in A_p$ .

Demostración:

En primer lugar, observar que  $(u, v) \in A_p$  es inmediato a partir de (2.18) sin más que efectuar la segunda integral sobre  $I$  en lugar de sobre  $\mathbb{R}$  y aplicar  $|I| \leq (|I| + |x - x_I|) \leq 3|I|/2$  cuando  $x \in I$ .

Vamos pues con (2.18). Para cada intervalo  $I$  definamos

$$k(x) = v(x)^{-1/(p-1)}(|I| + |x - x_I|)^{-q}, \quad Q = \int_{\mathbb{R}} k(x) dx.$$

Si  $Q = 0$  el teorema está probado por  $0 \cdot \infty = 0$ .

Si  $0 < Q < \infty$ , elegimos  $r$  tal que  $\int_{-\infty}^r k(x) dx = Q/2$  y definimos

$$f(x) = [v(x)(|I| + |x - x_I|)]^{-1/(p-1)} \text{ en } [r, \infty) \text{ y cero en otra parte.}$$

Ahora bien, si  $x \in I \cap (-\infty, r]$  e  $y \in [r, \infty)$  se tiene

$$0 \leq y - x \leq |y - x_I| + |x_I - x| < |y - x_I| + |I|.$$

En consecuencia, si  $x \in I \cap (-\infty, r] = I_1$ ,

$$|H(f, x)| = \int_r^\infty \frac{f(y)}{y - x} dy > \int_r^\infty k(y) dy = Q/2,$$

o sea  $\{x : |H(f, x)| > Q/2\} \supseteq I \cap (-\infty, r]$ .

Además, por hipótesis,

$$\int_{|H(f, x)| > \lambda} u(x) dx \leq B\lambda^{-p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x) dx$$

luego si tomamos  $\lambda = Q/2$ ,

$$\begin{aligned} \int_{I_1} u(x) dx &\leq B(Q/2)^{-p} \int_r^\infty [v(x)(|I| + |x - x_I|)]^{-p/(p-1)} v(x) dx \\ &= B(Q/2)^{-p} \int_r^\infty v(x)^{-1/(p-1)} (|I| + |x - x_I|)^{-q} dx = B(Q/2)^{1-p}. \end{aligned}$$

Un argumento similar prueba que  $\int_{I_2} u(x) dx \leq B(Q/2)^{1-p}$  si  $I_2 = I \cap [r, \infty)$ . Por tanto,

$$\int_I u(x) dx \leq 2B(Q/2)^{1-p} = 2^p B \left( \int_{\mathbb{R}} v(x)^{-1/(p-1)} (|I| + |x - x_I|)^{-q} dx \right)^{1-p}$$

y el teorema está probado para  $0 < Q < \infty$ .

Si  $Q = \infty$ , sea  $v_n(x) = v(x) + 1/n$ . Entonces la acotación débil de  $H$  se verifica también y con la misma constante  $B$  si  $v$  es reemplazado por  $v_n$ . Por otra parte,

$$\int_{\mathbb{R}} v_n(x)^{-1/(p-1)} (|I| + |x - x_I|)^{-q} dx \leq (1/n)^{-1/(p-1)} \int_{\mathbb{R}} (|I| + |x - x_I|)^{-q} dx < \infty.$$

Aplicando lo anterior se tiene que el teorema se verifica para  $v_n$  con constante independiente de  $n$ . Tomando ahora límites cuando  $n$  tiende a infinito y aplicando el teorema de la convergencia dominada queda demostrado el teorema.

### Corolario 2.9

Si  $H : L^p(v) \longrightarrow L^p(u)$  acotada, entonces  $(u, v) \in A_p$  y además

$$(2.19) \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{v(x)^{-1/(p-1)}}{(1 + |x|)^q} dx < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x)}{(1 + |x|)^p} dx < \infty.$$

#### Demostración:

Como  $u$  no es la función nula, existe  $c > 0$  tal que  $\int_{-c}^c u(x) dx > 0$ .

Por tanto, tomando  $I = (-c, c)$  en (2.18) tendremos

$$\int_{\mathbb{R}} v(x)^{-1/(p-1)} (2c + |x|)^{-q} dx < \infty.$$

Pero esta integral tiene el mismo carácter sea cual sea  $c > 0$ , luego deberá ser convergente con  $c = 1/2$ .

Por otra parte, la transformada de Hilbert es un operador autoadjunto, es decir, cualquiera de los dos operadores

$$H : L^p(v) \longrightarrow L^p(u) \quad \text{y} \quad H : L^q(u^{-1/(p-1)}) \longrightarrow L^q(v^{-1/(p-1)})$$

es acotado si y sólo si lo es el otro (para más detalles ver Rubio de Francia [1]). Entonces, procediendo como antes se obtiene la integrabilidad de  $u(x)(1 + |x|)^{-p}$ .

Las condiciones  $(u, v) \in A_p$  y (2.19) siguen sin ser suficientes para la acotación de  $H : L^p(v) \longrightarrow L^p(u)$ . Para comprobarlo, sea  $p = 2$  y los pesos

$$\begin{aligned} u(x) &= x^{-1} |\log x|^{-5/2} \text{ si } x \in (0, 1/2] \text{ y } u(x) = 0 \text{ en otro caso,} \\ v(x) &= x^{-1} |\log x|^{-3/2} \text{ si } x \in (0, 1/2] \text{ y } v(x) = \infty \text{ en otro caso.} \end{aligned}$$

Es inmediato que estos pesos verifican (2.19), y que  $(u, v) \in A_p$  puede demostrarse de forma parecida a como veíamos que  $(-\log x)^r$  estaba en  $A_p(0, 1/2) \forall p > 1, \forall r < 0$ . Tomando ahora  $f = \chi_{(0,1/2]}$  es claro que no se verifica

$$\int_{\mathbb{R}} |H(f, x)|^2 u(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 v(x) dx$$

ya que por una parte

$$\int_{\mathbb{R}} |H(f, x)|^2 u(x) dx = \int_0^{1/2} \left| \log |x/(x - 1/2)| \right|^2 x^{-1} |\log x|^{-5/2} dx = \infty$$

y por otra

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 v(x) dx = \int_0^{1/2} x^{-1} |\log x|^{-3/2} dx = 2(\log 2)^{-1/2} < \infty.$$

También puede comprobarse que tampoco se verifica la correspondiente acotación débil.

Ahora, siguiendo esencialmente a Neugebauer [1], vamos a ver condiciones suficientes para la acotación de la transformada de Hilbert con dos pesos. No se conocen condiciones necesarias y suficientes. En primer lugar, un lema cuya demostración se basa en el algoritmo de Rubio de Francia [3] (ver también Bloom [1]).

**Lema 2.10**

*Supongamos que*

$$\|Mf\|_{p,u} \leq C \|f\|_{p,v} \quad \text{y} \quad \|Mf\|_{q,v^{1-q}} \leq C \|f\|_{q,u^{1-q}}.$$

*Entonces existen funciones  $w_j \geq 0$  y constantes  $C_j$  ( $j = 1, 2$ ) tales que*

$$u^{1/p} M w_j \leq C_j w_j v^{1/p} \quad (j = 1, 2) \quad \text{y} \quad u^{1/p} v^{1/q} = w_1 w_2^{1-p}.$$

*En particular, cuando  $u = v$  se tiene el teorema de factorización.*

Demostración:

Sea el operador

$$S : L^{pq}(dx) \longrightarrow L^{pq}(dx)$$

$$f \longmapsto Sf = \left( u^{1/p} M(f^q v^{-1/p}) \right)^{1/q} + \left( v^{-1/p} M(f^p u^{1/p}) \right)^{1/p}.$$

Es una simple comprobación ver que  $S$  es sublineal y acotado.

Escojamos ahora  $K > \|S\|$ ,  $u_0 \in L^{pq}(dx)$ ,  $u_0 > 0$ , cualesquiera y tomemos

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{K^n} S^n(u_0),$$

donde  $S^n(u_0) = S(S^{n-1}(u_0))$ .

Como  $\|S^n(u_0)\|_{pq} \leq \|S\|^n \|u_0\|_{pq} < K^n \|u_0\|_{pq}$ , es inmediato que  $U \in L^{pq}(dx)$ . Por otra parte, por la sublinealidad de  $S$ , se tiene

$$S(U) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{K^n} S^{n+1}(u_0) = K(U - u_0) \leq KU.$$

Y como los dos sumandos que forman el operador  $S$  son no negativos

$$\begin{aligned} u^{1/p} M(U^q v^{-1/p}) &\leq S(U)^q \leq K^q u^q, \\ v^{-1/p} M(U^p u^{1/p}) &\leq S(U)^p \leq K^p u^p. \end{aligned}$$

Ahora, basta tomar  $w_2 = U^q v^{-1/p}$  y  $w_1 = U^p u^{1/p}$ .

### Lema 2.11

Sea  $(u, v) \in A_p$ ,  $0 < \tau < 1 \Rightarrow \exists w = w_\tau \in A_p$  tal que  $C_1 u^\tau \leq w \leq C_2 v^\tau$ .

#### Demostración:

Elegimos  $0 < \varepsilon, \eta < 1$  tales que  $\tau = \varepsilon \cdot \eta$ . De (2.14) y del Teorema 2.7 (iii) se sigue

$$\|Mf\|_{p, u^\varepsilon} \leq C \|f\|_{p, v^\varepsilon} \quad \text{y} \quad \|Mf\|_{q, v^{\varepsilon(1-q)}} \leq C \|f\|_{q, u^{\varepsilon(1-q)}}.$$

Entonces, aplicando el Lema 2.10 tenemos

$$u^{\varepsilon/p} v^{\varepsilon/q} = w_1 w_2^{1-p} \quad \text{donde} \quad Mw_j \leq C_j w_j (v/u)^{\varepsilon/p} \quad (j = 1, 2).$$

Además, por el teorema de diferenciación de Lebesgue,  $Mw_j \geq w_j$ .

Entonces, empleando sucesivamente

$$w_1 (v/u)^{\varepsilon/p} \geq K_1 Mw_1, \quad (w_2)^{1-p} \geq (Mw_2)^{1-p}$$

y

$$Mw_1 \geq w_1, \quad (Mw_2)^{1-p} \geq K_2 (w_2)^{1-p} (v/u)^{\varepsilon(1-p)/p}$$

se cumplirá

$$\begin{aligned} v^\varepsilon &= w_1 (v/u)^{\varepsilon/p} (w_2)^{1-p} \geq C (Mw_1) (Mw_2)^{1-p} \\ &\geq K w_1 (w_2)^{1-p} (v/u)^{\varepsilon(1-p)/p} = K u^\varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$C_1 u^\tau \leq (Mw_1)^\eta (Mw_2)^{\eta(1-p)} \leq C_2 v^\tau.$$

Tomando  $w = (Mw_1)^\eta (Mw_2)^{\eta(1-p)}$  y utilizando  $M(\mu, x)^\gamma \in A_1$ ,  $0 < \gamma < 1$ , y el teorema de factorización resulta  $w \in A_p$ .

**Teorema 2.12**

Si existe  $\delta > 1$  tal que  $(u^\delta, v^\delta) \in A_p$  entonces la transformada de Hilbert  $H : L^p(v) \longrightarrow L^p(u)$  está acotada.

Demostración:

Aplicando el Lema 2.11 con  $\tau = 1/\delta$ , existe  $w \in A_p$  tal que  $C_1 u \leq w \leq C_2 v$ . Y como  $H : L^p(w) \longrightarrow L^p(w)$  acotada,

$$\|Hf\|_{p,u} \leq C_1 \|Hf\|_{p,w} \leq C_2 \|f\|_{p,w} \leq C_3 \|f\|_{p,v}$$

y el teorema queda probado.

En la demostración del teorema anterior acabamos de ver que si  $(u^\delta, v^\delta) \in A_p$  ( $\delta > 1$ ) entonces existe  $w \in A_p$  tal que  $C_1 u \leq w \leq C_2 v$ . Pero también es cierto el inverso, ya que si  $u \leq w \leq v$  con  $w \in A_p$ , por (2.7) se tiene  $w^\delta \in A_p$  para algún  $\delta > 1$ , y como además  $u^\delta \leq w^\delta \leq v^\delta$ , es inmediato que entonces  $(u^\delta, v^\delta) \in A_p$ . Por tanto, hemos probado

$$\exists w \in A_p \text{ tal que } C_1 u \leq w \leq C_2 v \iff \exists \delta > 1 \text{ tal que } (u^\delta, v^\delta) \in A_p.$$

Por abreviar, si  $(u^\delta, v^\delta) \in A_p$ , se dice simplemente  $(u, v) \in A_p^\delta$ .

A continuación, veamos un ejemplo concreto de pesos en  $A_p^\delta$ :

**Teorema 2.13**

Sean los pesos  $u(x) = |x|^{pr}(1 + |x|)^{p(s-r)}$ ,  $v(x) = |x|^{pR}(1 + |x|)^{p(S-R)}$ , con

$$(2.20) \quad pr > -1, \quad qR < 1, \quad r \geq R, \quad s \leq S, \quad pS > -1 \quad \text{y} \quad qs < 1.$$

Entonces,  $(u, v) \in A_p$  y  $(u, v) \in A_p^\delta$  para algún  $\delta > 1$ .

Demostración:

Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tal que  $-1/p < \alpha, \beta < 1/q$ ,  $R \leq \alpha \leq r, s \leq \beta \leq S$ , luego  $\alpha$  y  $\beta$  están en las condiciones del Teorema 2.5. Si llamamos

$$\Phi(x) = |x|^{r-\alpha}(1 + |x|)^{s-r-(\beta-\alpha)} \text{ y } \Psi(x) = |x|^{\alpha-R}(1 + |x|)^{R-S-(\alpha-\beta)},$$

que son funciones acotadas superiormente en  $\mathbb{R}$ , es inmediato comprobar

$$u(x) = |x|^{\alpha p}(1 + |x|)^{(\beta-\alpha)p}\Phi(x)^p, \quad v(x)^{-1/(p-1)} = |x|^{-\alpha q}(1 + |x|)^{-(\beta-\alpha)q}\Psi(x)^q.$$

Entonces,  $(u, v) \in A_p$  se deduce fácilmente del Teorema 2.5 y de ser  $\Phi(x)$  y  $\Psi(x)$  acotadas superiormente. Que  $(u, v) \in A_p^\delta$  para algún  $\delta > 1$  es ahora inmediato por ser las condiciones  $pr > -1$ ,  $qR < 1$ ,  $pS > -1$  y  $qs < 1$  para que  $(u, v) \in A_p$  desigualdades estrictas, con lo cual existe  $\delta > 1$  tal que las desigualdades anteriores siguen manteniéndose cuando  $r, R, s, S$  son multiplicados por  $\delta$ .



Las hipótesis (2.20) no son en realidad necesarias para que  $(u, v) \in A_p$ . Un contraejemplo sencillo es el de (2.17), en el que  $p = q = 2$ ,  $s = -1$ ,  $S = -1/2$ ,  $r = R = 0$ . En Varona [1, Cap. V] pueden verse condiciones necesarias y suficientes para que  $(u, v) \in A_p$ . Pero (2.20) sí es necesario para que exista  $\delta > 1$  tal que  $(u, v) \in A_p^\delta$  y también para que se cumpla  $(u, v) \in A_p$  y (2.19). Por lo tanto, (2.20) es necesario y suficiente para que la transformada de Hilbert como operador de  $L^p(v)$  en  $L^p(u)$  sea acotada.

El propósito principal de este trabajo es el estudio de la convergencia de series de Fourier. Tal como veremos en el capítulo siguiente, este estudio se relaciona con la acotación de la transformada de Hilbert con pesos que dependen de las cotas de los polinomios ortonormales. Pero las acotaciones de los polinomios ortonormales no siempre son independientes de  $n$ . Por tanto, para que la teoría  $A_p$  de pesos sea útil para nuestros propósitos deberemos estudiar lo que ocurre cuando tenemos pares de pesos  $(u_n, v_n)$  dependientes de  $n$ . En primer lugar, una definición:

**Definición 2.14**

Sea una familia de pares de pesos  $\{(u_n, v_n)\}_{n=0}^\infty$  y  $1 < p < \infty$ . Diremos que  $\{(u_n, v_n)\}_{n=0}^\infty \in A_p$  uniformemente si existe  $C$  tal que

$$\left( \int_I u_n(x) dx \right) \left( \int_I v_n(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq C|I|^p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Y, dado  $\delta > 1$ , diremos que  $\{(u_n, v_n)\}_{n=0}^\infty \in A_p^\delta$  uniformemente si  $\{(u_n^\delta, v_n^\delta)\}_{n=0}^\infty \in A_p$  uniformemente.

Como las constantes de la definición de  $A_p$  y de la norma de  $H$  en los Teoremas 2.3, 2.8 y 2.12 dependen únicamente unas de otras, para que los operadores

$$\begin{aligned} H : L^p(v_n) &\longrightarrow L^p(u_n) \\ g &\longmapsto Hg \end{aligned}$$

estén uniformemente acotados es condición necesaria que  $\{(u_n, v_n)\}_{n=0}^\infty \in A_p$  uniformemente y condición suficiente que exista  $\delta > 1$  tal que  $\{(u_n, v_n)\}_{n=0}^\infty \in A_p^\delta$  uniformemente.

Vamos ahora a buscar familias concretas que satisfagan las condiciones  $A_p$  y  $A_p^\delta$  uniformes.

**Teorema 2.15**

Sea  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  sucesión acotada superiormente,  $x_n > 0 \forall n$ . Entonces,

$$\{(|x|^{pr}(|x| + x_n)^{ps}, |x|^{pR}(|x| + x_n)^{pS})\}_{n=0}^\infty \in A_p$$

(y a  $A_p^\delta$  para algún  $\delta > 1$ ) uniformemente si

$$pr > -1, \quad qR < 1, \quad R \leq r, \quad r + s = R + S, \quad p(R + S) > -1 \quad \text{y} \quad q(r + s) < 1.$$

Demostración:

Sea  $I = (c, d) \subset (0, \infty)$ . Entonces, haciendo el cambio de variable  $x = yx_n$  y utilizando el Teorema 2.13 tenemos

$$\begin{aligned} & \left( \int_c^d x^{pr} (x + x_n)^{ps} dx \right) \left( \int_c^d x^{-qR} (x + x_n)^{-qS} dx \right)^{p-1} \\ &= \left( \int_{c/x_n}^{d/x_n} (yx_n)^{pr} (yx_n + x_n)^{ps} x_n dy \right) \left( \int_{c/x_n}^{d/x_n} (yx_n)^{-qR} (yx_n + x_n)^{-qS} x_n dy \right)^{p-1} \\ &= x_n^{pr+ps+1-pR-ps+p-1} \left( \int_{c/x_n}^{d/x_n} y^{pr} (1+y)^{ps} dy \right) \left( \int_{c/x_n}^{d/x_n} y^{-qR} (1+y)^{-qS} dy \right)^{p-1} \\ &\leq C x_n^{pr+ps+1-pR-ps+p-1} \left| \frac{d}{x_n} - \frac{c}{x_n} \right|^p = C x_n^{p(r+s-R-S)} |d-c|^p \leq C_1 |d-c|^p, \end{aligned}$$

como queríamos comprobar (la condición  $r + s \geq R + S$  que no hace falta en el Teorema 2.13 se utiliza aquí en la última desigualdad).

Por último, la pertenencia a  $A_p^\delta$  para algún  $\delta > 1$  es ahora clara por ser las desigualdades  $pr > -1$ ,  $qR < 1$ ,  $p(R + S) > -1$  y  $q(r + s) < 1$  estrictas.

Muchas veces, nos interesará únicamente la pertenencia uniforme a  $A_p(0, 1)$  y  $A_p^\delta(0, 1)$ . Además las sucesiones  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  que nos aparecerán serán convergentes a cero. Pero, a partir del teorema anterior y para familias de pesos de la misma forma que allí, es fácil encontrar condiciones necesarias y suficientes para ello. Veámoslo a continuación:

**Teorema 2.16**

Sea  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  sucesión que tiende a cero,  $x_n > 0 \forall n$ . Entonces,

$$\{(x^{pr}(x + x_n)^{ps}, x^{pR}(x + x_n)^{pS})\}_{n=0}^\infty \in A_p(0, 1)$$

(y a  $A_p^\delta(0, 1)$  para algún  $\delta > 1$ ) uniformemente si y sólo si

- |                          |                       |                      |
|--------------------------|-----------------------|----------------------|
| (1) $pr > -1$ ,          | (2) $qR < 1$ ,        | (3) $R \leq r$ ,     |
| (4) $R + S \leq r + s$ , | (5) $p(r + s) > -1$ , | (6) $q(R + S) < 1$ . |

Demostración:

Veamos en primer lugar que las condiciones (1) a (6) son necesarias.

Tomando  $n$  fijo,

$$\begin{aligned} x^{pr}(x + x_n)^{ps} \text{ integrable} &\Rightarrow pr > -1, \\ (x^{pR}(x + x_n)^{pS})^{-1/(p-1)} \text{ integrable} &\Rightarrow qR < 1. \end{aligned}$$

Tomando  $n$  fijo e  $I = (0, \varepsilon)$ ,

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^\varepsilon x^{pr} (x + x_n)^{ps} dx \right) \left( \int_0^\varepsilon x^{-qR} (x + x_n)^{-qS} dx \right)^{p-1} \\ & \sim \left( \int_0^\varepsilon x^{pr} dx \right) \left( \int_0^\varepsilon x^{-qR} dx \right)^{p-1} \sim \varepsilon^{pr+1} (\varepsilon^{-qR+1})^{p-1} \\ & = \varepsilon^{p(r-R)+p} \leq \varepsilon^p \iff R \leq r. \end{aligned}$$

Tomando  $n$  variable e  $I = (x_n, 2x_n)$  queda

$$\begin{aligned} & \left( \int_{x_n}^{2x_n} x^{pr} (x + x_n)^{ps} dx \right) \left( \int_{x_n}^{2x_n} x^{-qR} (x + x_n)^{-qS} dx \right)^{p-1} \\ & \sim x_n x_n^{pr} x_n^{ps} (x_n x_n^{-qR} x_n^{-qS})^{p-1} = x_n^p x_n^{p(r+s-R-S)} \leq C x_n^p \iff R + S \leq r + s. \end{aligned}$$

Tomando  $I = (0, 1)$  y utilizando el lema de Fatou,

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \int_0^1 x^{pr} (x + x_n)^{ps} dx \right) \left( \int_0^1 x^{-qR} (x + x_n)^{-qS} dx \right)^{p-1} \right] \\ & \geq \left( \int_0^1 \liminf_{n \rightarrow \infty} [x^{pr} (x + x_n)^{ps}] dx \right) \left( \int_0^1 \liminf_{n \rightarrow \infty} [x^{-qR} (x + x_n)^{-qS}] dx \right)^{p-1} \\ & = \left( \int_0^1 x^{p(r+s)} dx \right) \left( \int_0^1 x^{-q(R+S)} dx \right)^{p-1}, \end{aligned}$$

y para que esto sea finito tiene que ser  $p(r+s) > -1$  y  $q(R+S) < 1$ .

Vamos ahora a demostrar que son suficientes.

Supongamos  $a, b, A, B$  cumpliendo

$$(2.21) \quad R \leq A \leq a \leq r \quad \text{y} \quad R + S \leq A + B \leq a + b \leq r + s$$

y que además satisfagan las hipótesis del teorema anterior, o sea que

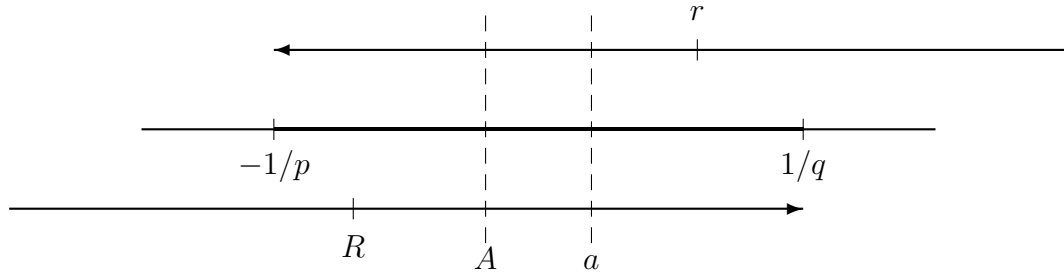
$$(2.22) \quad pa > -1, \quad qA < 1, \quad A \leq a, \quad a+b = A+B, \quad p(A+B) > -1 \quad \text{y} \quad q(a+b) < 1.$$

Entonces,

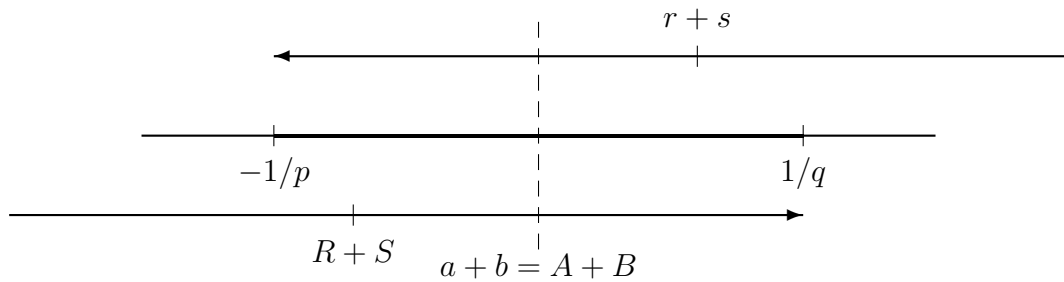
$$\begin{aligned} & \left( \int_I x^{pr} (x + x_n)^{ps} dx \right) \left( \int_I x^{-qR} (x + x_n)^{-qS} dx \right)^{p-1} \\ & = \left( \int_I x^{pa} (x + x_n)^{pb} x^{p(r-a)} (x + x_n)^{p(s-b)} dx \right) \\ & \times \left( \int_I x^{-qA} (x + x_n)^{-qB} x^{q(A-R)} (x + x_n)^{q(B-S)} dx \right)^{p-1} \\ & \leq \left( \int_I x^{pa} (x + x_n)^{pb} dx \right) \left( \int_I x^{-qA} (x + x_n)^{-qB} dx \right)^{p-1} \leq C|I|^p \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos empleado  $I \subseteq (0, 1)$  y (2.21), y en la segunda el teorema anterior.

La mejor forma de ver que efectivamente existen los  $a, b, A, B$  verificando a la vez (2.21) y (2.22) es ilustrarlo mediante gráficos. Primero elegimos  $a$  y  $A$  del modo que muestra el gráfico siguiente:



Y después elegimos  $b$  y  $B$  como se indica a continuación:



Por tanto, el teorema queda probado.

Aunque en este capítulo hemos considerado ventajoso incluir  $p$  en el exponente de los pesos que utilizábamos, pues así se hacían más sencillas de escritura muchas de las integrales que aparecían, para muchas aplicaciones más que una ventaja nos resultará un inconveniente, y el teorema anterior nos será más fácil de utilizar si disponemos de una nueva versión suya:

### Corolario 2.17

Sea  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión que tiende a cero,  $x_n > 0 \forall n$ . Entonces,

$$\{(x^r(x+x_n)^s x^R(x+x_n)^S)\}_{n=0}^{\infty} \in A_p(0, 1)$$

(y a  $A_p^{\delta}(0, 1)$  para algún  $\delta > 1$ ) uniformemente si y sólo si

- |                          |                    |                       |
|--------------------------|--------------------|-----------------------|
| (1) $r > -1$ ,           | (2) $R < p - 1$ ,  | (3) $R \leq r$ ,      |
| (4) $R + S \leq r + s$ , | (5) $r + s > -1$ , | (6) $R + S < p - 1$ . |

### Demostración:

Es un simple cambio de notación a partir del teorema anterior.

Si tenemos pesos de la forma  $x^{a_0}(x+x_n)^{b_0}(1-x)^{a_1}(1-x+x_n)^{b_1}$ , cerca de 0 sólo es importante la parte  $x^{a_0}(x+x_n)^{b_0}$  y cerca de 1 el resto. Entonces, es lógico pensar que podremos estudiar la pertenencia uniforme a  $A_p(0,1)$  por factores. Vamos ahora a ver un teorema que demuestra que, efectivamente, estas combinaciones de pesos son posibles.

**Teorema 2.18**

Sean  $\{u_n(x)\}_{n=0}^\infty, \{v_n(x)\}_{n=0}^\infty, \{U_n(x)\}_{n=0}^\infty, \{V_n(x)\}_{n=0}^\infty$  familias de pesos en  $(a, b)$  finito,  $c \in (a, b)$  y  $\varepsilon > 0$  fijos e independientes de  $n$ , así como  $\lambda_i > 0$  tales que  $\lambda_1 \leq U_n(x), V_n(x) \leq \lambda_2$  en  $(a, c + \varepsilon)$ ,  $\lambda_3 \leq u_n(x), v_n(x) \leq \lambda_4$  en  $(c - \varepsilon, b)$ ,  $\{(u_n, v_n)\}_{n=0}^\infty \in A_p(a, c)$  uniformemente y  $\{(U_n, V_n)\}_{n=0}^\infty \in A_p(c, b)$  uniformemente. Entonces,  $\{(u_n U_n, v_n V_n)\}_{n=0}^\infty \in A_p(a, b)$  uniformemente.

Demostración:

Tenemos que demostrar

$$\left( \int_I u_n U_n dx \right) \left( \int_I (v_n V_n)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq C|I|^p$$

con  $C$  independiente de  $I \subseteq (a, c)$  y de  $n$ .

Si  $I \subseteq (a, c)$  es obvio por  $\{(u_n, v_n)\}_{n=0}^\infty \in A_p(a, c)$  unif., y si  $I \subseteq (c, b)$  por  $\{(U_n, V_n)\}_{n=0}^\infty \in A_p(c, b)$  unif. Supongamos pues  $I = (d, e)$  con  $a \leq d < c < e \leq b$  Entonces,

$$\begin{aligned} & \left( \int_d^e u_n U_n dx \right) \left( \int_d^e (v_n V_n)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \\ & \leq C \left( \int_d^c u_n dx + \int_c^e U_n dx \right) \left( \int_d^c v_n^{-1/(p-1)} dx + \int_c^e V_n^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} = G(I). \end{aligned}$$

Sea  $t(x)$  la transformación lineal que lleva el intervalo  $(c, b)$  al  $(a, c)$  invirtiendo el orden, es decir

$$t(x) = \frac{(c-a)(b-x)}{b-c} + a.$$

Si efectuamos el cambio de variable dado por  $y = t^{-1}(x)$  en las integrales en que aparece  $u_n$  y  $v_n^{-1/(p-1)}$  y si tomamos  $h = \max\{e, t^{-1}(d)\}$ , tendremos

$$\begin{aligned} G(I) & \leq C \left( \int_c^{t^{-1}(d)} u_n \circ t dx + \int_c^e U_n dx \right) \\ & \quad \times \left( \int_c^{t^{-1}(d)} (v_n \circ t)^{-1/(p-1)} dx + \int_c^e V_n^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \\ & \leq C \left( \int_c^h u_n \circ t dx + \int_c^h U_n dx \right) \left( \int_c^h (v_n \circ t)^{-1/(p-1)} dx + \int_c^h V_n^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \\ & = C(\varphi_n(h) + \Phi_n(h))(\psi_n(h) + \Psi_n(h))^{p-1} \\ & \leq C_1 \max\{\varphi_n(h), \Phi_n(h)\} \max\{\psi_n(h)^{p-1}, \Psi_n(h)^{p-1}\}. \end{aligned}$$

Si logramos probar que la expresión anterior está acotada, salvo constante, por  $|h - c|^p$ , entonces, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} h - c &= [\text{si } h = e] = e - c \leq e - d, \\ h - c &= [\text{si } h = t^{-1}(d)] = t^{-1}(d) - c = t^{-1}(d) - t^{-1}(c) = C(c - d) \leq C(e - d), \end{aligned}$$

ya tendríamos demostrado el teorema.

A partir de  $\{(u_n, v_n)\}_{n=0}^\infty \in A_p(a, c)$  unif., por el cambio de variable dado por  $t^{-1}(x)$  es claro que  $\{(u_n \circ t, v_n \circ t)\}_{n=0}^\infty \in A_p(c, b)$  unif., y por lo tanto  $\varphi_n(h)\psi_n(h)^{p-1} \leq C|h - c|^p$ . Además, la desigualdad  $\Phi_n(h)\Psi_n(h)^{p-1} \leq C|h - c|^p$  es obvia por ser  $\{(U_n, V_n)\}_{n=0}^\infty \in A_p(c, b)$  unif. Entonces, sólo hay que demostrar

$$(2.23) \quad \varphi_n(h)\Psi_n(h)^{p-1} \leq C|h - c|^p \quad \text{y} \quad \Phi_n(h)\psi_n(h)^{p-1} \leq C|h - c|^p.$$

Pero

$$\begin{aligned} \varphi_n(h)\psi_n(h)^{p-1} \leq C|h - c|^p &\Rightarrow \psi_n(h)^{p-1} \leq C\varphi_n(h)^{-1}|h - c|^p, \\ \Phi_n(h)\Psi_n(h)^{p-1} \leq C|h - c|^p &\Rightarrow \Psi_n(h)^{p-1} \leq C\Phi_n(h)^{-1}|h - c|^p. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\varphi_n(h)\Psi_n(h)^{p-1} \leq C\varphi_n(h)\Phi_n(h)^{-1}|h - c|^p$  y para que esto esté acotado por  $C|h - c|^p$ , basta con  $\varphi_n(h)\Phi_n(h)^{-1} \leq C$ . Análogamente, para que se verifique la otra desigualdad de (2.23) basta probar  $\Phi_n(h)\varphi_n(h)^{-1} \leq C$ .

Empecemos demostrando  $\varphi_n(h)\Phi_n(h)^{-1} \leq C$  ( $h \in (c, b]$ ):

Para  $h \in (c, c + \varepsilon)$ , es evidente  $\varphi_n(h)\Phi_n(h)^{-1} \leq C$  pues  $u_n \circ t \sim \text{cte.} \sim U_n$  en  $(c, c + \varepsilon)$  (este  $\varepsilon$  puede ser más pequeño que el del enunciado del teorema por el cambio de variable).

Para  $h \in [c + \varepsilon, b]$ , como  $\varphi_n(h)$  es creciente y  $\Phi_n(h) \geq \Phi_n(c + \varepsilon) \sim \varepsilon$ , luego acotada inferiormente, tendremos  $\varphi_n(h)\Phi_n(h)^{-1} \leq C\varphi_n(b)/\varepsilon$ . Por tanto, basta ver que  $\varphi_n(b) \leq C$ . Pero sabemos que  $\varphi_n(b)\psi_n(b)^{p-1} \leq C|b - c|^p$ , luego  $\varphi_n(b) \leq C|b - c|^p\psi_n(b)^{1-p} = C_1\psi_n(b)^{1-p}$ . Y es claro que

$$\psi_n(b)^{1-p} = \left( \int_c^b (v_n \circ t)^{-1/(p-1)} dx \right)^{1-p} \leq \left( \int_c^{c+\varepsilon} (v_n \circ t)^{-1/(p-1)} dx \right)^{1-p} \leq C$$

pues  $v_n \circ t \sim \text{cte.}$  en  $(c, c + \varepsilon)$ .

Por último, que  $\Phi_n(h)\varphi_n(h)^{-1} \leq C$  ( $h \in (c, b]$ ) se demuestra de manera análoga, con lo que queda probado el teorema.

La exigencia de  $\varepsilon > 0$  en el teorema anterior no se puede rebajar. Para probarlo, baste observar que el peso  $w(x) = |x|^\alpha$ ,  $x > 0$ ,  $w(x) = |x|^\beta$ ,  $x < 0$ , no está en ningún  $A_p(-1, 1)$  si  $\alpha \neq \beta$  (tomar  $I = (-\delta, \delta)$  y hacer  $\delta \rightarrow 0$ ).

**Corolario 2.19**

Sea un intervalo  $(a, b)$  finito y  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_{m+1} = b$ .  
 Dados  $\{a_k\}_{k=0}^{m+1}$  y  $\{b_k\}_{k=0}^{m+1}$  y las sucesiones  $\{x_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m+1$ , tales que  
 $x_{k,n} \rightarrow 0 \forall k$  y  $x_{k,n} > 0 \forall k, n$ , denotamos

$$w_n(\{a_k\}, \{b_k\}, \{x_{k,n}\}) \\
 = (x-a)^{a_0} (x-a+x_{0,n})^{b_0} (b-x)^{a_{m+1}} (b-x+x_{m+1,n})^{b_{m+1}} \prod_{k=1}^m |x-x_k|^{a_k} (|x-x_k|+x_{k,n})^{b_k}.$$

Entonces,

$$\{(w_n(\{r_k\}, \{s_k\}, \{x_{k,n}\}), w_n(\{R_k\}, \{S_k\}, \{x_{k,n}\}))\}_{n=0}^{\infty} \in A_p(a, b)$$

uniformemente si y sólo si se cumple

$$r_k > -1, R_k < p-1, R_k \leq r_k, R_k + S_k \leq r_k + s_k, r_k + s_k > -1 \quad y \quad R_k + S_k < p-1$$

para  $k = 0, 1, \dots, m+1$ .

Bajo estas mismas condiciones también es cierta la pertenencia uniforme a  $A_p^\delta(a, b)$  para algún  $\delta > 1$ .

Demostración:

Elijamos  $m+1$  puntos  $y_k$  cumpliendo

$$a = x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < y_{m-1} < x_m < y_m < x_{m+1} = b.$$

Entonces, tomando sucesivamente como  $c$  del teorema anterior los puntos  $y_0, y_1, \dots$  hasta  $y_m$  vamos a aplicar este reiteradamente. Para ello necesitamos demostrar las condiciones de pertenencia uniforme a  $A_p$  de todos los factores implicados. Pero, por un cambio de variable, es claro que basta ver

$$\left\{ \left( x^{r_k} (x + x_{k,n})^{s_k}, x^{R_k} (x + x_{k,n})^{S_k} \right) \right\}_{n=0}^{\infty} \in A_p(0, 1) \text{ uniformemente,}$$

lo cual es cierto según el Corolario 2.17.

La pertenencia uniforme a  $A_p^\delta(a, b)$  para algún  $\delta > 1$  es ahora inmediata por ser  $r_k > -1$ ,  $R_k < p-1$ ,  $R_k + S_k > -1$  y  $r_k + s_k < p-1$  desigualdades estrictas.

Por otra parte, que las condiciones son necesarias es obvio pues la pertenencia uniforme a  $A_p(a, b)$  implica la pertenencia uniforme a cada  $A_p(y_k, y_{k+1})$  y ahora basta aplicar el Corolario 2.17.





## CAPÍTULO III

### Convergencia de la serie de Fourier respecto de pesos en el intervalo $[-1, 1]$

En este capítulo consideraremos  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  polinomios ortonormales respecto a un peso  $w(x)$  en  $[-1, 1]$ ,  $w \in L^1(dx)$ ,  $w(x) > 0$  a.e. Para cada  $f \in L^1(w)$  denotamos  $S_n f$  la  $n$ -ésima suma parcial del desarrollo ortogonal de  $f$  respecto a  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ , es decir,

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^n c_k p_k(x), \quad c_k = c_k(f) = \int_{-1}^1 f(x) p_k(x) w(x) dx.$$

Tal como comentábamos en el Capítulo I, estudiaremos aquí la convergencia de  $S_n f$  a  $f$  en distintos espacios de tipo  $L^p$ ,  $1 < p < \infty$ , lo cual se traduce en acotaciones uniformes de la forma

$$(3.1) \quad \int_{-1}^1 |S_n(f, x) U(x)|^p w(x) dx \leq C \int_{-1}^1 |f(x) V(x)|^p w(x) dx$$

donde  $C$  es, aquí y en lo sucesivo, alguna constante independiente de  $n$  que puede no ser la misma en cada ocasión que aparezca. Exactamente, y tal como vimos en el Capítulo I, con la simple condición de que  $U \leq CV$ , la acotación (3.1) es equivalente a que  $S_n f$  converja a  $f$  en  $L^p([-1, 1], U(x)^p w(x))$  para cada  $f \in L^p([-1, 1], V(x)^p w(x))$ . Asumiremos a partir de ahora  $U \leq CV$  sin ningún problema siempre que lo necesitemos. Además, para evitar trivialidades, consideraremos que  $U$  y  $V$  no son constantemente iguales a 0 o a  $\infty$  a.e. Todos los espacios  $L^p$  que empleemos estarán referidos al intervalo  $[-1, 1]$  aunque no lo indiquemos, y usaremos siempre  $q$  para denotar al conjugado de  $p$ , es decir,  $p$  y  $q$  deben cumplir la relación  $1/p + 1/q = 1$ .

Este tipo de acotaciones están estudiadas para diversos pesos y sistemas de polinomios. Por ejemplo en Pollard [2-4], Muckenhoupt [1] y Badkov [1-4] podemos encontrar condiciones necesarias y suficientes para la convergencia en  $L^p(U^p w)$  cuando  $U = V$  y  $w$  y  $U$  son pesos de Jacobi o pesos de Jacobi generalizados. Pretendemos aquí analizar cómo puede aplicarse la teoría  $A_p$  de pesos al estudio de las acotaciones uniformes del tipo (3.1). Veremos que el uso de esta técnica permite simplificar muchas de las demostraciones antes citadas de Pollard, Muckenhoupt y Badkov y, además, generalizarlas en parte.

Como iremos viendo a través del capítulo, el hecho de utilizar pesos en el intervalo  $[-1, 1]$  en vez de en un intervalo no acotado radica en que la teoría de polinomios ortogonales sobre un intervalo acotado está mucho más desarrollada

y se conocen muchas más propiedades que para sistemas de polinomios generales. Por el momento, y para tener una mayor generalidad que podamos aprovechar en el capítulo siguiente, consideraremos simplemente que  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  forman un sistema de polinomios ortonormales respecto a una medida  $d\mu$  con soporte en  $[-1, 1]$  y cumpliendo  $\mu' > 0$  a.e., donde  $\mu'$  es la parte absolutamente continua de la medida (si  $d\mu = w(x) dx$  entonces  $\mu' = w$ ).

Como

$$(3.2) \quad S_n(f, x) = \int_{-1}^1 K_n(x, y) d\mu(y), \quad K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n p_k(x)p_k(y),$$

lo primero que tenemos que hacer es conocer expresiones adecuadas para los núcleos  $K_n(x, y)$ . Vamos pues a continuación a establecer una descomposición de  $K_n(x, y)$  debida esencialmente a Pollard [3].

Denotemos  $k_n$  al coeficiente director de  $p_n(x)$ ,  $p_n = p_n(1)$  y  $\bar{p}_n = p_n(-1)$ . Entonces, si llamamos  $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  a los polinomios ortonormales respecto a  $(1 - x^2) d\mu$ , por (1.22) se tiene

$$(3.3) \quad (1 - x^2)q_n(x) = A_n p_n(x) + B_n p_{n+1}(x) + C_n p_{n+2}(x)$$

siendo

$$\begin{aligned} A_n &= K(n)(p_{n+2}\bar{p}_{n+1} - p_{n+1}\bar{p}_{n+2}), \\ B_n &= K(n)(p_n\bar{p}_{n+2} - p_{n+2}\bar{p}_n), \\ C_n &= K(n)(p_{n+1}\bar{p}_n - p_n\bar{p}_{n+1}). \end{aligned}$$

Es evidente que el coeficiente director de  $q_n(x)$  es  $-C_n k_{n+2}$ . Además,  $q_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$ , luego  $q_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k p_k(x)$  e igualando coeficientes deberá ser  $\lambda_n = -C_n k_{n+2}/k_n$ .

Por otra parte,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-1}^1 q_n(x)^2 (1 - x^2) d\mu = A_n \int_{-1}^1 q_n(x) p_n(x) d\mu + B_n \int_{-1}^1 q_n(x) p_{n+1}(x) d\mu \\ &\quad + C_n \int_{-1}^1 q_n(x) p_{n+2}(x) d\mu = A_n \int_{-1}^1 q_n(x) p_n(x) d\mu \\ &= A_n \sum_{k=0}^n \lambda_k \int_{-1}^1 p_k(x) p_n(x) d\mu = A_n \lambda_n = -A_n C_n k_{n+2}/k_n, \end{aligned}$$

luego substituyendo  $A_n$  y  $C_n$  por su valor obtenemos

$$1 = -(K(n))^2 (k_{n+2}/k_n) (p_{n+2}\bar{p}_{n+1} - p_{n+1}\bar{p}_{n+2}) (p_{n+1}\bar{p}_n - p_n\bar{p}_{n+1}).$$

Por tanto

$$K(n) = \varepsilon_n (k_n/k_{n+2})^{1/2} [(p_n \bar{p}_{n+1} - p_{n+1} \bar{p}_n)(p_{n+2} \bar{p}_{n+1} - p_{n+1} \bar{p}_{n+2})]^{-1/2}$$

con  $\varepsilon_n = \pm 1$  escogido de tal modo que el coeficiente director de  $q_n(x)$  sea positivo, es decir,  $C_n$  negativo. Para saber cuál escoger, basta observar que como  $p_n(x)$  tiene todos sus ceros en  $(-1, 1)$  y  $k_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$(3.4) \quad p_n(1) > 0 \quad \text{y} \quad \text{sgn}\{p_n(-1)\} = (-1)^n,$$

con lo cual,  $p_{n+1} \bar{p}_n - p_n \bar{p}_{n+1}$  es positivo cuando  $n$  par y negativo cuando  $n$  impar. Así, basta tomar  $\varepsilon_n = (-1)^{n+1}$ .

Ahora, si en (3.3) despejamos  $p_n(x)$  y  $p_n(y)$  y los sustituimos en la fórmula de Christoffel-Darboux

$$K_n(x, y) = u_n \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x - y},$$

donde  $u_n = k_n/k_{n+1}$ , obtenemos

$$K_n(x, y) = \frac{u_n p_{n+1}(x)(1 - y^2)q_n(y) - (1 - x^2)q_n(x)p_{n+1}(y)}{A_n} + \frac{u_n C_n}{A_n u_{n+1}} K_{n+1}(x, y)$$

luego

$$\begin{aligned} K_n(x, y) - \frac{u_n C_n}{A_n u_{n+1}} [K_n(x, y) + p_{n+1}(x)p_{n+1}(y)] \\ = \frac{u_n p_{n+1}(x)(1 - y^2)q_n(y) - (1 - x^2)q_n(x)p_{n+1}(y)}{A_n}. \end{aligned}$$

Entonces, sin más que despejar  $K_n(x, y)$  y si por simplicidad denotamos

$$D_n = \left[ 1 - \frac{u_n C_n}{u_{n+1} A_n} \right]^{-1},$$

se obtiene

$$(3.5) \quad \begin{aligned} K_n(x, y) = \frac{u_n D_n}{A_n} p_{n+1}(x) \frac{(1 - y^2)q_n(y)}{x - y} \\ - \frac{u_n D_n}{A_n} (1 - x^2)q_n(x) \frac{p_{n+1}(y)}{x - y} + D_n \frac{u_n C_n}{u_{n+1} A_n} p_{n+1}(x)p_{n+1}(y). \end{aligned}$$

Con todo esto:

**Lema 3.1**

Sean  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  los polinomios ortonormales respecto a  $d\mu$  en  $[-1, 1]$ ,  $\mu' > 0$  a.e.,  $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  los polinomios ortonormales respecto  $(1-x^2)d\mu$  y  $K_n(x, y)$  los núcleos de la serie de Fourier respecto a  $d\mu$ . Entonces,

$$K_n(x, y) = \alpha_n T_1(n, x, y) - \alpha_n T_2(n, x, y) + \beta_n T_3(n, x, y)$$

siendo

$$T_1(n, x, y) = p_{n+1}(x) \frac{(1-y^2)q_n(y)}{x-y},$$

$$T_2(n, x, y) = (1-x^2)q_n(x) \frac{p_{n+1}(y)}{x-y},$$

$$T_3(n, x, y) = p_{n+1}(x)p_{n+1}(y)$$

y  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$  dos sucesiones acotadas.

Demostración:

Vamos a ver que se verifica

$$(3.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1/2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1/2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = -1/2,$$

con lo cual, apoyándonos en (3.5), ya tendríamos demostrado el lema (observar que de (3.6) es inmediato deducir  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 1/2$ ).

La demostración de (3.6) se basará fundamentalmente en el siguiente resultado, debido a Rahmanov [2] (también puede verse, de forma más sencilla, en Máté-Nevai-Totik [1]): Si  $\mu' > 0$  a.e. y la ecuación de recurrencia a tres términos (1.17) la ponemos en la forma

$$(3.7) \quad xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde  $p_{-1}(x) = 0$ ,  $p_0(x) = k_0$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_n = k_{n-1}/k_n$  y

$$b_n = \int_{-1}^1 xp_n(x)^2 d\mu$$

entonces  $a_n \rightarrow 1/2$  y  $b_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Con la notación de (3.7), es claro que  $u_n = a_{n+1}$ , luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1/2$ .

Por otra parte, es inmediato sin más que sustituir la expresión que hemos encontrado para  $K(n)$  que

$$\begin{aligned} A_n &= K(n)(p_{n+2}\bar{p}_{n+1} - p_{n+1}\bar{p}_{n+2}) = \left(\frac{k_n}{k_{n+2}}\right)^{1/2} \left(\frac{p_{n+2}\bar{p}_{n+1} - p_{n+1}\bar{p}_{n+2}}{p_n\bar{p}_{n+1} - p_{n+1}\bar{p}_n}\right)^{1/2} \\ &= (u_n u_{n+1})^{1/2} \left(\frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} - \frac{\bar{p}_{n+2}}{\bar{p}_{n+1}}\right)^{1/2} \left(\frac{p_n}{p_{n+1}} - \frac{\bar{p}_n}{\bar{p}_{n+1}}\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} C_n &= K(n)(p_{n+1}\bar{p}_n - p_n\bar{p}_{n+1}) = - \left( \frac{k_n}{k_{n+2}} \right)^{1/2} \left( \frac{p_n\bar{p}_{n+1} - p_{n+1}\bar{p}_n}{p_{n+2}\bar{p}_{n+1} - p_{n+1}\bar{p}_{n+2}} \right)^{1/2} \\ &= -(u_n u_{n+1})^{1/2} \left( \frac{p_n}{p_{n+1}} - \frac{\bar{p}_n}{\bar{p}_{n+1}} \right)^{1/2} \left( \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} - \frac{\bar{p}_{n+2}}{\bar{p}_{n+1}} \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Por tanto, basta con que probemos que

$$(3.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{p}_{n+1}}{\bar{p}_n} = -1.$$

Notar en primer lugar que, a partir de (3.4), es claro deducir que

$$p_{n+1}/p_n > 0 \quad \text{y} \quad \bar{p}_{n+1}/\bar{p}_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para llegar a demostrar (3.8), y por simplicidad, pongamos la ecuación (3.7) en la forma

$$(3.9) \quad p_{n+1}(x) = (E_n x + F_n)p_n(x) - G_n p_{n-1}(x),$$

con lo cual, por el resultado de Rahmanov,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n = 0.$$

Ahora, si sustituimos  $x = 1$  en (3.9), llamando  $r_n = p_{n+1}/p_n$ , obtenemos  $r_n = E_n + F_n - G_n/r_{n-1}$  y queremos comprobar  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$ .

De la expresión anterior es claro que, al menos para  $n$  grande, se verifica  $0 < r_n < E_n + F_n$ , luego  $\{r_n\}$  acotada.

También,  $G_n = (E_n + F_n - 2)r_{n-1} + (2 - r_n)r_{n-1}$  y tomando límites aparece  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - r_n)r_{n-1} = 1$ . Entonces,  $2 - r_n$  es positivo para  $n$  grande.

Ahora, usamos que dadas dos sucesiones positivas  $\{s_n\}$  y  $\{t_n\}$  se verifica

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n t_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n \rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} t_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n t_n$$

luego, en nuestro caso,

$$1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (2 - r_n) \rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} r_{n-1} \leq 1 \quad \text{y}$$

$$1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (2 - r_n) \rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} r_{n-1} \leq 1.$$

De aquí

$$(2 - \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n) \rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n = 1 \quad \text{y}$$

$$(2 - \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n) \rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n = 1,$$

así que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$ .

Análogamente se procede sustituyendo  $x = -1$  en (3.9) para demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{p}_{n+1}/\bar{p}_n) = -1$ .

**Observación 3.2**

La demostración anterior sigue la de Pollard en [3]. Allí,  $d\mu(x) = w(x) dx$  satisface una condición más fuerte, a saber,

$$(3.10) \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} \log w(x) dx > -\infty.$$

Los pesos que verifican (3.10) se dice que están en la clase de Szegő, y si denotamos  $p_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \dots$  a los polinomios ortonormales respecto a  $w(x)$  entonces, cuando  $n \rightarrow \infty$ , cumplen

$$\begin{aligned} k_n &\approx \frac{2^n}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} \log w(x) dx \right\}, \\ k'_n &\approx \frac{-2^{n-1}}{\pi^{3/2}} \left\{ \int_{-1}^1 x(1-x^2)^{-1/2} \log w(x) dx \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} \log w(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

Con estas estimaciones para  $k_n$  y  $k'_n$  resulta fácil obtener los límites de  $u_n$  (y como consecuencia suya los de  $E_n$  y  $G_n$ ) y también el de  $F_n = k'_{n+1}/k_n - E_n k'_n/k_n$  (igualar el coeficiente de  $x^n$  en (3.9)). Entonces, se continúa como en la demostración del lema para llegar a comprobar (3.8).

Pero en realidad, en el caso de que  $w$  verifique (3.10), el lema puede probarse de forma más sencilla, como vemos a continuación:

Es claro que, si  $w(x)$  está en la clase de Szegő, también lo está  $(1-x^2)w(x)$ , luego el coeficiente director  $\bar{k}_n$  de  $q_n(x)$  verificará

$$\bar{k}_n \approx \frac{2^n}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} \log[(1-x^2)w(x)] dx \right\}.$$

Por otra parte, de la identidad (3.3) se sigue que  $-\bar{k}_n = C_n k_{n+2}$ , luego

$$C_n = \frac{-\bar{k}_n}{k_{n+2}} \approx \frac{-1}{4} \exp \left\{ \frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} \log(1-x^2) dx \right\} = \frac{-1}{2},$$

y de  $1 = -A_n C_n k_{n+2}/k_n$  se sigue la estimación de  $A_n$ .

A continuación, vamos a aplicar todo lo que hemos desarrollado hasta ahora al estudio de la acotación uniforme de la serie de Fourier. Para ello, el Lema 3.1 juega un papel fundamental, ya que si denotamos

$$(3.11) \quad W_{i,n}(f, x) = \int_{-1}^1 f(y) T_i(n, x, y) d\mu(y), \quad i = 1, 2, 3,$$

el lema demuestra que para que se verifique la acotación uniforme (3.1) basta con que se verifiquen estas otras:

$$(3.12) \quad \|(W_{i,n}f)U\|_{p,d\mu} \leq C\|fV\|_{p,d\mu}, \quad i = 1, 2, 3,$$

que serán las que en realidad nos preocuparán a partir de ahora.

En lo que sigue, vamos a volver a nuestra idea inicial de tomar pesos  $d\mu(x) = w(x) dx$  y nos dedicaremos a analizar cada una de las desigualdades anteriores.

$i = 1$ : Si llamamos  $g(y) = f(y)q_n(y)(1 - y^2)w(y)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \|(W_{1,n}f)U\|_{p,d\mu}^p &= \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 \frac{f(y)q_n(y)(1 - y^2)w(y)}{x - y} dy \right|^p |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p w(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 |H(g, x)|^p |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p w(x) dx. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que la transformada de Hilbert con pesos

$$H : L^p(v_n) \longrightarrow L^p(u_n),$$

es uniformemente acotada, donde

$$(u_n(x), v_n(x)) = (|p_{n+1}(x)|^p U(x)^p w(x), |q_n(x)|^{-p} (1 - x^2)^{-p} V(x)^p w(x)^{1-p}).$$

Para ello, según hemos visto en el capítulo anterior, es condición necesaria que

$$\{(u_n(x), v_n(x))\}_{n=0}^\infty \in A_p \quad \text{uniformemente}$$

y condición suficiente que exista  $\delta > 1$  tal que

$$\{(u_n(x), v_n(x))\}_{n=0}^\infty \in A_p^\delta \quad \text{uniformemente}$$

(todas las condiciones  $A_p$  que empleemos en este capítulo se entenderán, salvo que indiquemos lo contrario, restringidas al intervalo  $(-1, 1)$ ). Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |H(g, x)|^p |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p w(x) dx \\ \leq C \int_{-1}^1 |g(x)|^p |q_n(x)|^{-p} (1 - x^2)^{-p} V(x)^p w(x)^{1-p} dx \\ = C \int_{-1}^1 |f(x)|^p V(x)^p w(x) dx, \end{aligned}$$

con lo que se obtendría la acotación uniforme (3.12) para el primer sumando.

$i = 2$ : El comportamiento es análogo pero esta vez aparece la transformada de Hilbert con la familia de pesos

$$(\bar{u}_n(x), \bar{v}_n(x)) = (|q_n(x)|^p (1 - x^2)^p U(x)^p w(x), |p_{n+1}(x)|^{-p} V(x)^p w(x)^{1-p}).$$

$i = 3$ : Para este tercer sumando, continuando con la notación introducida al tratar los casos  $i = 1$  e  $i = 2$ , tenemos

$$\begin{aligned} \|(W_{3,n}f)U\|_{p,d\mu}^p &= \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 f(y)p_{n+1}(x)p_{n+1}(y)w(y) dy \right|^p U(x)^p w(x) dx \\ &= \left| \int_{-1}^1 f(y)p_{n+1}(y)w(y) dy \right|^p \int_{-1}^1 |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p w(x) dx \\ &= |c_{n+1}(f)|^p \int_{-1}^1 u_n(x) dx. \end{aligned}$$

Además, introduciendo el módulo dentro de la integral y utilizando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned} |c_{n+1}(f)| &\leq \int_{-1}^1 |f(y)V(y)| \left| \frac{p_{n+1}(y)}{V(y)} \right| w(y) dy \\ &\leq \left( \int_{-1}^1 |f(y)|^p V(y)^p w(y) dy \right)^{1/p} \left( \int_{-1}^1 |p_{n+1}(y)|^q V(y)^{-q} w(y) dy \right)^{1/q} \\ &= \left( \int_{-1}^1 |f(y)|^p V(y)^p w(y) dy \right)^{1/p} \left( \int_{-1}^1 \bar{v}_n(y)^{-1/(p-1)} dy \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Entonces, la condición suficiente que aparece para la acotación uniforme del tercer sumando es

$$(3.13) \quad \left( \int_{-1}^1 u_n(x) dx \right)^{1/p} \left( \int_{-1}^1 \bar{v}_n(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{1/q} \leq C.$$

Notar además que la integrabilidad para cada  $n$  de  $|p_n(y)|^q V(y)^{-q} w(y)$  es lo que garantiza la existencia de los coeficientes  $c_n(f)$  y que por tanto podamos hablar de las sumas parciales de la serie de Fourier para dada  $f \in L^p(V^p w)$ . Por otra parte, como, para cada  $n$ ,  $|p_n(y)|^q$  es acotado en  $[-1, 1]$ , basta con

$$(3.14) \quad \int_{-1}^1 V(x)^{-q} w(x) dx < \infty$$

para poder garantizar la existencia de la serie de Fourier. Por último, es claro que para que  $c_n(f)p_n(x)$  esté en  $L^p(U^p w)$  y tenga sentido hablar de  $\|(S_n f)U\|_{p,w}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , basta con

$$(3.15) \quad \int_{-1}^1 U(x)^p w(x) dx < \infty.$$

Estas tres últimas condiciones (3.13), (3.14) y (3.15) nos van a aparecer de nuevo un poco más adelante.



En cuanto a condiciones necesarias, por ser

$$W_{3,n-1}(f, x) = c_n(f)p_n(x) = S_n(f, x) - S_{n-1}(f, x)$$

el término general de la serie de Fourier, si las sumas parciales son uniformemente acotadas como operadores de  $L^p(V^p w)$  en  $L^p(U^p w)$ , también lo será este tercer sumando. Sin embargo, no podemos asegurar que si  $S_n f$  es uniformemente acotado también lo sean los sumandos  $W_{1,n} f$  y  $W_{2,n} f$ . Entonces, las condiciones necesarias que encontremos para la acotación uniforme del término general también lo serán para la serie de Fourier, no así las de  $W_{1,n} f$  y  $W_{2,n} f$ . Pese a todo, vamos a analizar las tres, ya que en la práctica lo que se suele hacer es descomponer la serie de Fourier en los tres sumandos y estudiar los tres.

Comencemos estudiando la acotación uniforme del término general. Según vimos en el Teorema 1.6, la condición necesaria para que esta acotación uniforme se verifique es

$$\left( \int_{-1}^1 |p_n(x)|^p U(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \left( \int_{-1}^1 |p_n(x)|^q V(x)^{-q} w(x) dx \right)^{1/q} \leq C,$$

que precisamente es la misma que obteníamos en (3.13) como condición suficiente en el análisis de  $i = 3$ , luego esta condición es en realidad necesaria y suficiente para la acotación uniforme del término general. Notar por último que tomando  $n = 0$  obtenemos de nuevo las condiciones  $U^p w, V^{-q} w \in L^1(dx)$ , que eran las que garantizaban que tenía sentido hablar de la serie de Fourier.

Antes de abordar  $i = 1$  e  $i = 2$  vamos a dar un resultado ya conocido que utilizaremos para nuestros propósitos.

**Teorema 3.3**

Sea  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  sistema de polinomios ortonormales respecto a  $d\mu$  en  $[-1, 1]$ ,  $\mu'(x) > 0$  a.e. en  $[-1, 1]$  y  $0 < r < \infty$ . Si  $g$  es una función medible Lebesgue en  $[-1, 1]$ , entonces

$$\int_{-1}^1 |g(x)|^r (1-x^2)^{-r/4} \mu'(x)^{-r/2} dx \leq \pi^{r/2} 2^{\max\{1-r/2, 0\}} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |g(x)p_n(x)|^r dx.$$

En particular, si el límite inferior anterior es 0 entonces  $g = 0$  a.e.

Demostración:

Ver Máté-Nevai-Totik [2, Teorema 2].

Una primera aplicación de este resultado, y tal como ya obtienen Máté-Nevai-Totik, es el teorema siguiente:

**Teorema 3.4**

En las condiciones del teorema anterior, para que el término general de la serie de Fourier sea acotado como operador entre  $L^p(V(x)^p d\mu)$  y  $L^p(U(x)^p d\mu)$  ( $1 < p < \infty$ ) es necesario

$$\begin{aligned} (i) \quad & \int_{-1}^1 U(x)^p d\mu < \infty, & (ii) \quad & \int_{-1}^1 V(x)^{-q} d\mu < \infty, \\ (iii) \quad & \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-p/4} U(x)^p \mu'(x)^{1-p/2} dx < \infty, \\ (iv) \quad & \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-q/4} V(x)^{-q} \mu'(x)^{1-q/2} dx < \infty. \end{aligned}$$

Demostración:

Por el Teorema 1.6 deberá cumplirse

$$(3.16) \quad \left( \int_{-1}^1 |p_n(x)|^p U(x)^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_{-1}^1 |p_n(x)|^q V(x)^{-q} d\mu \right)^{1/q} \leq C.$$

Entonces, (i) y (ii) son inmediatos tomando  $n = 0$ . Por otra parte, a partir de (3.16) es claro que también se deberá verificar

$$(3.17) \quad \left( \int_{-1}^1 |p_n(x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \right)^{1/p} \left( \int_{-1}^1 |p_n(x)|^q V(x)^{-q} \mu'(x) dx \right)^{1/q} \leq C.$$

Ahora, utilizando el teorema anterior con  $r = p$ ,  $g(x) = U(x)\mu'(x)^{1/p}$  en el primer factor y  $r = q$ ,  $g(x) = V(x)^{-1}\mu'(x)^{1/q}$  en el segundo, obtenemos que el límite inferior de (3.17) está acotado, salvo constante, por el producto de (iii) y (iv), de donde se sigue el teorema.

Notar que en particular hemos demostrado que las dos integrales que aparecen en (3.16) están acotadas cuando  $n \rightarrow \infty$ , ya que ninguna de las dos puede tener límite inferior nulo. Además, esto prueba sin más que tomar  $I = (-1, 1)$  que cuando se verifican las hipótesis  $(u_n(x), v_n(x)) \in A_p$  y  $(\bar{u}_n(x), \bar{v}_n(x)) \in A_p$  entonces podemos asegurar la acotación del tercer sumando, pues ambos factores de (3.13) son acotados superiormente.

Continuemos ahora analizando las condiciones necesarias para la acotación de los sumandos  $i = 1$  y  $2$ .

$i = 1$ : Para que el sumando  $W_{1,n}f$  sea uniformemente acotado se necesita que  $\{(u_n(x), v_n(x))\}_{n=0}^{\infty} \in A_p$  uniformemente, es decir,

$$\left( \int_I |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p w(x) dx \right) \left( \int_I |q_n(x)|^q (1-x^2)^q V(x)^{-q} w(x) dx \right)^{p-1} \leq C|I|^p.$$

A partir de esta condición, aplicando el Teorema 3.3 con

$$r = p, \quad g(x) = \chi_I(x)U(x)w(x)^{1/p} \quad \text{en el primer factor}$$

y

$r = q$ ,  $g(x) = \chi_I(x)V(x)^{-1}(1-x^2)w(x)^{1/q}$  en el segundo (recordar  $\{q_n(x)\}_{n=0}^\infty$  ortonormales respecto a  $(1-x^2)w(x)$ ), tenemos

$$\begin{aligned} & \left( \int_I (1-x^2)^{-p/4} U(x)^p w(x)^{1-p/2} dx \right) \left( \int_I (1-x^2)^{q/4} V(x)^{-q} w(x)^{1-q/2} dx \right)^{p-1} \\ & \leq C \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_I |p_n(x)U(x)|^p w(x) dx \right) \left( \int_I \left| \frac{q_n(x)(1-x^2)}{V(x)} \right|^q w(x) dx \right)^{p-1} \leq C_1 |I|^p. \end{aligned}$$

Por tanto, si  $W_{1,n}f$  es uniformemente acotado, entonces

$$(3.18) \quad \left( (1-x^2)^{-p/4} U(x)^p w(x)^{1-p/2}, (1-x^2)^{-p/4} V(x)^p w(x)^{1-p/2} \right) \in A_p.$$

$i = 2$ : Análogamente, para que  $W_{2,n}f$  sea uniformemente acotado se necesita  $\{(u_n(x), v_n(x))\}_{n=0}^\infty \in A_p$  uniformemente, y aplicando el Teorema 3.3 se llega a que la condición necesaria es

$$(3.19) \quad \left( (1-x^2)^{p/4} U(x)^p w(x)^{1-p/2}, (1-x^2)^{p/4} V(x)^p w(x)^{1-p/2} \right) \in A_p.$$

En resumen, si denotamos

$$h_\pm^U(x) = (1-x^2)^{\pm p/4} U(x)^p w(x)^{1-p/2}$$

y

$$h_\pm^V(x) = (1-x^2)^{\pm p/4} V(x)^p w(x)^{1-p/2},$$

lo que hemos demostrado es

$$W_{1,n}f \text{ acot. unif.} \Rightarrow (h_-^U, h_-^V) \in A_p,$$

$$W_{2,n}f \text{ acot. unif.} \Rightarrow (h_+^U, h_+^V) \in A_p.$$

Notar además que las dos condiciones necesarias (iii) y (iv) del Teorema 3.4 que aparecían para la acotación uniforme de  $W_{3,n}f$  pueden expresarse

$$\int_{-1}^1 h_-^U(x) dx < \infty \quad \text{y} \quad \int_{-1}^1 h_+^V(x)^{-1/(p-1)} dx < \infty.$$

Ambas se deducen de las condiciones  $A_p$  sin más que tomar  $I = [-1, 1]$ . Las otras dos propiedades de integrabilidad que se deducen de las condiciones  $A_p$ , y que serían

$$\int_{-1}^1 h_+^U(x) dx < \infty \quad \text{y} \quad \int_{-1}^1 h_-^V(x)^{-1/(p-1)} dx < \infty,$$

no aportan nada nuevo pues son inmediatas de deducir a partir de las primeras por ser  $(1-x^2) \leq (1-x^2)^{-1}$  en  $[-1, 1]$ .

Vamos ahora a estudiar qué condiciones son suficientes para poder asegurar la acotación uniforme de los tres sumandos. Abordemos en primer lugar este problema a partir de un ejemplo particularmente sencillo.

**Ejemplo 3.5**

Para estudiar la acotación de los tres sumandos, necesitaremos conocer el tamaño de los polinomios ortonormales. El caso más sencillo es cuando podemos conseguir cotas uniformes para los polinomios  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  y  $\{q_n(x)\}_{n=0}^\infty$ . Por ejemplo:

Diremos que un peso  $w$  en  $[-1, 1]$  está en la clase  $H$  si verifica

- (a)  $w(x) > 0$  a.e. en  $[-1, 1]$ ,
- (b)  $|p_n(x)| \leq C(1-x^2)^{-1/4}w(x)^{-1/2}$ ,
- (c)  $|q_n(x)| \leq C(1-x^2)^{-1/4}[w(x)(1-x^2)]^{-1/2} = C(1-x^2)^{-3/4}w(x)^{-1/2}$ .

Veamos qué ocurre con los tres sumandos bajo estas hipótesis.

$i = 1$ : Como

$$\begin{aligned} u_n(x) &= |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p w(x) \leq C(1-x^2)^{-p/4} U(x)^p w(x)^{1-p/2}, \\ v_n(x) &= |q_n(x)|^{-p} (1-x^2)^{-p} V(x)^p w(x)^{1-p} \geq C(1-x^2)^{-p/4} V(x)^p w(x)^{1-p/2}, \end{aligned}$$

para que  $\{(u_n, v_n)\}_{n=0}^\infty \in A_p^\delta$  uniformemente para algún  $\delta > 1$  basta con

$$(3.20) \quad (h_-^U, h_-^V) = \left( (1-x^2)^{-p/4} U(x)^p w(x)^{1-p/2}, (1-x^2)^{-p/4} V(x)^p w(x)^{1-p/2} \right) \in A_p^\delta$$

(si  $U = V$  incluso con  $\delta = 1$  ya que con un sólo peso la condición  $A_p$  es equivalente a que la transformada de Hilbert sea acotada).

$i = 2$ : Análogamente, para la acotación uniforme del segundo sumando obtenemos la condición suficiente

$$(3.21) \quad (h_+^U, h_+^V) = \left( (1-x^2)^{p/4} U(x)^p w(x)^{1-p/2} (1-x^2)^{p/4}, V(x)^p w(x)^{1-p/2} \right) \in A_p^\delta.$$

$i = 3$ : Si asumimos las dos condiciones (3.20) y (3.21) que acabamos de señalar al estudiar  $i = 1$  e  $i = 2$ , tendremos

$$\begin{aligned} & \left( \int_{-1}^1 |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p w(x) dx \right) \left( \int_{-1}^1 |p_{n+1}(x)|^q V(x)^{-q} w(x) dx \right)^{p/q} \\ &= \left( \int_{-1}^1 u_n(x) dx \right) \left( \int_{-1}^1 \bar{v}_n(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \\ &\leq C \left( \int_{-1}^1 h_-^U(x) dx \right) \left( \int_{-1}^1 h_+^V(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < \infty \end{aligned}$$

tal como deseábamos encontrar.

Por tanto, lo que hemos demostrado es que, para pesos en la clase  $H$ , las condiciones

$$(h_-^U, h_-^V) \in A_p^\delta \quad \text{y} \quad (h_+^U, h_+^V) \in A_p^\delta \quad (\delta > 1)$$

son suficientes para que se verifique la acotación uniforme (3.1) (basta  $\delta = 1$  si  $U = V$ ). Y, por otra parte, las mismas condiciones pero con  $\delta = 1$  son necesarias para la acotación de los tres operadores de (3.12) en que descomponíamos la serie de Fourier.

**Observación 3.6**

(i) Pollard, en su artículo [3] estudia la acotación de la serie de Fourier para pesos en la clase  $H$  del ejemplo anterior pero con  $U = V = 1$ . En este caso, las condiciones suficientes que acabamos de obtener para la acotación uniforme de la serie de Fourier pueden ponerse como

$$h_-(x) = (1 - x^2)^{-p/4}w(x)^{1-p/2} \in A_p$$

y

$$h_+(x) = (1 - x^2)^{p/4}w(x)^{1-p/2} \in A_p.$$

Pollard, en lugar de las condiciones  $h_{\pm}(x) \in A_p$ , emplea otras más complicadas expresadas en términos de acotación de ciertos operadores y que implican éstas. Además, en su artículo exige como hipótesis la integrabilidad en  $[-1, 1]$  de  $h_-(x)$  y de  $h_+(x)^{-1/(p-1)}$ , que en realidad no hacen falta pues se deducen  $h_{\pm}(x) \in A_p$ .

(ii) Una condición que hace que se verifiquen a la vez (3.20) y (3.21) es

$$(h_-^U, h_+^V) = \left( (1 - x^2)^{-p/4}U(x)^p w(x)^{1-p/2}, (1 - x^2)^{p/4}V(x)^p w(x)^{1-p/2} \right) \in A_p^\delta$$

(basta observar que si  $\sigma > 0$  y  $\rho < 0$  entonces  $(1 - x^2)^\sigma < C(1 - x^2)^\rho$  en  $[-1, 1]$ ). Condiciones como esa son las que maneja Osilenker [1, 2] para estudiar diversos tipos de sumabilidad. Pero es una condición en exceso exigente: por ejemplo, con ella no se logra demostrar ni siquiera la convergencia de las series de Legendre ( $w(x) = 1$ ) con  $U(x) = V(x) = 1$  y  $p = 2$ .

**Ejemplo 3.7**

Veamos un ejemplo concreto de peso en la clase  $H$ . Sea

$$(3.22) \quad w(x) = r(x)(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta \prod_{k=1}^m |x - x_k|^{\gamma_k},$$

donde  $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1$ ,  $\alpha, \beta, \gamma_k > -1$ ,  $0 < C_1 < r(x) < C_2$  y el módulo de continuidad de  $r(x)$ ,

$$m(r, t) = \sup\{|r(x) - r(y)| : x, y \in [-1, 1], |x - y| \leq t\},$$

cumple  $m(r, t)t^{-1} \in L^1(0, 2)$ .

Ya hemos visto en el Teorema 1.14 que, en esas condiciones, Badkov [3] demuestra que

$$|p_n(x)| \leq C \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-(\alpha/2+1/4)} \left(1 + x + \frac{1}{n^2}\right)^{-(\beta/2+1/4)} \times \prod_{k=1}^m \left(|x - x_k| + \frac{1}{n}\right)^{-\gamma_k/2}.$$

Por tanto, si  $\alpha \geq -1/2$ ,  $\beta \geq -1/2$ ,  $\gamma_k \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , es evidente que

$$\begin{aligned} |p_n(x)| &\leq C(1-x)^{-\alpha/2-1/4}(1+x)^{-\beta/2-1/4} \prod_{k=1}^m |x-x_k|^{-\gamma_k/2} \\ &\leq C_1(1-x^2)^{-1/4}w(x)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Con mayor razón se verificará una acotación uniforme para los  $q_n(x)$  ya que  $\alpha+1 > \alpha \geq -1/2$ ,  $\beta+1 > \beta \geq -1/2$ . De aquí que, si  $\alpha, \beta \geq -1/2$  y  $\gamma_k \geq 0$ , el peso  $w(x)$  está en la clase  $H$ .

Decíamos en el Ejemplo 3.5 que el caso más sencillo de analizar es cuando tenemos cotas uniformes para los polinomios ortonormales y exigíamos allí la cota  $|p_n(x)| \leq C(1-x^2)^{-1/4}w(x)^{-1/2}$ . Esta acotación no es cierta siempre, pero “casi” lo es. En efecto, Máté-Nevai-Totik [2] demuestran que si  $w(x) > 0$  a.e. en  $[-1, 1]$  y si llamamos

$$B_{c,n} = \{x \in [-1, 1] : p_n(x)^2 w(x)(1-x^2)^{1/2} \geq c\},$$

entonces para cada  $c > 2/\pi$  se cumple  $|B_{c,n}| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , donde  $|E|$  denota la medida de Lebesgue del conjunto  $E$ . Por tanto, la acotación deseada sólo falla para cada  $n$  en un conjunto cuya medida se va haciendo tan pequeña como queramos al crecer  $n$  (en el Ejemplo 3.5, para pesos en la clase  $H$ ,  $B_{c,n} = \emptyset \forall n$  para  $c$  suficientemente grande).

Vamos ahora a ver cómo podemos aplicar todas las herramientas de teoría  $A_p$  uniforme que hemos desarrollado en el capítulo anterior a la acotación uniforme de las series de Fourier. Para ello impondremos hipótesis para controlar la situación en  $[-1, 1]$  de los  $B_{c,n}$  y el tamaño de los polinomios en tales conjuntos.

### Ejemplo 3.8

Sea un peso  $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta w_1(x)$  en  $[-1, 1]$  y, como hasta ahora, denotemos  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  a los polinomios ortonormales respecto a  $w(x)$  y  $\{q_n(x)\}_{n=0}^\infty$  ortonormales respecto a  $(1-x^2)w(x)$ . Diremos que  $w(x)$  está en la clase  $H$  generalizada si existe una sucesión  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  que tiende a 0 tal que

- (a)  $w(x) > 0$  a.e. en  $[-1, 1]$ ,
- (b)  $|p_n(x)| \leq C(1-x+x_n)^{-\alpha/2-1/4}(1+x+x_n)^{-\beta/2-1/4}w_1(x)^{-1/2}$ ,
- (c)  $|q_n(x)| \leq C(1-x+x_{n+1})^{-\alpha/2-3/4}(1+x+x_{n+1})^{-\beta/2-3/4}w_1(x)^{-1/2}$ .

Un ejemplo de pesos en la clase  $H$  generalizada son los del tipo (3.22) con  $\alpha, \beta > -1$ ,  $\gamma_k \geq 0$ . En estas condiciones, estudiemos la acotación de los tres sumandos de siempre. Por simplicidad, denotemos

$$P_n(x) = (1-x+x_n)^{-\alpha/2-1/4}(1+x+x_n)^{-\beta/2-1/4}w_1(x)^{-1/2}$$

y

$$Q_n(x) = (1 - x + x_{n+1})^{-\alpha/2-3/4}(1 + x + x_{n+1})^{-\beta/2-3/4}w_1(x)^{-1/2}.$$

Entonces,

**Teorema 3.9**

Sea  $w(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta w_1(x)$  en la clase  $H$  generalizada,  $S_n f$  las sumas parciales de la serie de Fourier respecto de  $w$ , otros dos pesos  $U$  y  $V$  definidos en  $[-1, 1]$  y  $1 < p < \infty$ . Para que

$$\|(S_n f)U\|_{p,w dx} \leq C\|fV\|_{p,w dx}$$

uniformemente basta con

$$(3.23) \quad \left\{ \left( P_{n+1}(x)^p U(x)^p w(x), Q_n(x)^{-p} (1 - x^2)^{-p} V(x)^p w(x)^{1-p} \right) \right\}_{n=0}^\infty \in A_p^\delta \text{ unif.}$$

y

$$(3.24) \quad \left\{ \left( Q_n(x)^p (1 - x^2)^p U(x)^p w(x), P_{n+1}(x)^{-p} V(x)^p w(x)^{1-p} \right) \right\}_{n=0}^\infty \in A_p^\delta \text{ unif.}$$

para algún  $\delta > 1$ .

Demostración:

Para que se verifique la acotación del sumando  $i = 1$  basta aplicar (3.23) y para que se verifique la de  $i = 2$  utilizamos (3.24). Además, usándolas conjuntamente se sigue la acotación de  $i = 3$ .

**Corolario 3.10**

En las condiciones del teorema anterior sean  $w(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta w_1(x)$ ,  $U(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta U_1(x)$ ,  $V(x) = (1 - x)^A(1 + x)^B V_1(x)$ , con  $w_1, U_1$  y  $V_1 \sim \text{cte.}$  en  $(1 - \varepsilon, 1]$  y  $[-1, -1 + \varepsilon)$ . Entonces para que se verifique

$$\|(S_n f)U\|_{p,w dx} \leq C\|fV\|_{p,w dx}$$

uniformemente basta con  $A \leq a, B \leq b$ ,

$$(3.25) \quad \left| \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) (\alpha + 1) + \frac{a + A}{2} \right| < \frac{a - A}{2} + \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\alpha + 1}{2} \right\},$$

$$(3.26) \quad \left| \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) (\beta + 1) + \frac{b + B}{2} \right| < \frac{b - B}{2} + \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\beta + 1}{2} \right\},$$

y

$$(3.27) \quad \left( U_1(x)^p w_1(x)^{1-p/2}, V_1(x)^p w_1(x)^{1-p/2} \right) \in A_p^\delta$$

para algún  $\delta > 1$  (basta  $\delta = 1$  si  $U_1 = V_1$ ).

Demostración:

Elijamos  $c$  y  $c'$  tales que  $-1 < c < -1 + \varepsilon < c' < 1 - \varepsilon < 1$ . Entonces, de acuerdo al Teorema 2.18, para que se satisfagan (3.23) y (3.24) bastará con que se cumpla

$$(3.28) \quad \left\{ \left( (1-x+x_n)^{-p(\alpha/2+1/4)} (1-x)^{ap+\alpha}, \right. \right. \\ \left. \left. (1-x+x_n)^{p(\alpha/2+3/4)} (1-x)^{-p+Ap+\alpha(1-p)} \right) \right\} \in A_p^\delta(c', 1),$$

$$(3.29) \quad \left\{ \left( (1-x+x_n)^{-p(\alpha/2+3/4)} (1-x)^{p+ap+\alpha}, \right. \right. \\ \left. \left. (1-x+x_n)^{p(\alpha/2+1/4)} (1-x)^{Ap+\alpha(1-p)} \right) \right\} \in A_p^\delta(c', 1),$$

$$(3.30) \quad \left\{ \left( (1+x+x_n)^{-p(\beta/2+1/4)} (1+x)^{bp+\beta}, \right. \right. \\ \left. \left. (1+x+x_n)^{p(\beta/2+3/4)} (1+x)^{-p+Bp+\beta(1-p)} \right) \right\} \in A_p^\delta(-1, c),$$

$$(3.31) \quad \left\{ \left( (1+x+x_n)^{-p(\beta/2+3/4)} (1+x)^{p+bp+\beta}, \right. \right. \\ \left. \left. (1+x+x_n)^{p(\beta/2+1/4)} (1+x)^{Bp+\beta(1-p)} \right) \right\} \in A_p^\delta(-1, c)$$

para algún  $\delta > 1$ , todos ellos uniformemente, y también

$$\left( U_1(x)^p w_1(x)^{1-p/2}, V_1(x)^p w_1(x)^{1-p/2} \right) \in A_p^\delta(c, c') \text{ unif. } (\delta > 1).$$

Esta última condición es la misma que (3.27) (da igual decir  $A_p^\delta(c, c')$  que  $A_p^\delta$  ya que  $w_1, U_1$  y  $V_1 \sim \text{cte.}$  en  $(1-\varepsilon, 1]$  y  $[-1, -1+\varepsilon)$ ), luego estudiemos las otras cuatro. Veamos simplemente las dos primeras ya que las otras dos son análogas. Tomando  $1-x$  en vez de  $x$  en el Corolario 2.17 tenemos que (3.28) es equivalente a

$$(3.32) \quad \begin{aligned} (1) \quad & ap + \alpha > -1, & (2) \quad & -p + Ap + \alpha - \alpha p < p - 1, \\ (3 \text{ y } 4) \quad & A \leq a, \\ (5) \quad & ap + \alpha - \alpha p/2 - p/4 > -1, & (6) \quad & -p + Ap + \alpha - \alpha p + \alpha p/2 + 3p/4 < p - 1, \end{aligned}$$

y (3.29) es equivalente a

$$(3.33) \quad \begin{aligned} (1) \quad & p + ap + \alpha > -1, & (2) \quad & Ap + \alpha - \alpha p < p - 1, \\ (3 \text{ y } 4) \quad & A \leq a, \\ (5) \quad & p + ap + \alpha - \alpha p/2 - 3p/4 > -1, & (6) \quad & Ap + \alpha - \alpha p + \alpha p/2 + p/4 < p - 1. \end{aligned}$$



Notar que (1) de (3.33) es trivial frente a (1) de (3.32), (2) de (3.32) frente a (2) de (3.33), (5) de (3.33) frente a (5) de (3.32) y (6) de (3.32) frente a (6) de (3.33). Entonces, además de  $A \leq a$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 (3.32-1) &\iff a + \alpha/p > -1/p \\
 &\iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + a > -(\alpha + 1)/2 \\
 &\iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + (a + A)/2 > (A - a)/2 - (\alpha + 1)/2, \\
 (3.32-5) &\iff a + \alpha/p - \alpha/2 - 1/4 > -1/p \\
 &\iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + a > -1/4 \\
 &\iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + (a + A)/2 > (A - a)/2 - 1/4, \\
 (3.33-2) &\iff A + \alpha/p - \alpha < 1 - 1/p \\
 &\iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + A < (\alpha + 1)/2 \\
 &\iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + (a + A)/2 < (a - A)/2 + (\alpha + 1)/2, \\
 (3.33-6) &\iff A + \alpha/p - \alpha/2 + 1/4 < 1 - 1/p \\
 &\iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + A < 1/4 \\
 &\iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + (a + A)/2 < (a - A)/2 + 1/4,
 \end{aligned}$$

y las cuatro juntas se traducen en (3.25).

**Corolario 3.11**

Sea  $w(x)$  como en (3.22) con  $\alpha, \beta > -1$  y  $\gamma_k \geq 0$ ,  $1 < p < \infty$  y los pesos

$$\begin{aligned}
 (3.34) \quad U(x) &= (1 - x)^a (1 + x)^b \prod_{k=1}^m |x - x_k|^{d_k}, \\
 V(x) &= (1 - x)^A (1 + x)^B \prod_{k=1}^m |x - x_k|^{D_k}.
 \end{aligned}$$

Si se verifican las desigualdades  $A \leq a$ ,  $B \leq b$ ,  $D_k \leq d_k$ , (3.25), (3.26) y

$$(3.35) \quad \left| \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) (\gamma_k + 1) + \frac{d_k + D_k}{2} \right| < \frac{d_k - D_k}{2} + \frac{1}{2} \quad (1 \leq k \leq m),$$

entonces  $\|(S_n f)U\|_{p,w dx} \leq C \|fV\|_{p,w dx}$  uniformemente.

Demostración:

Según (3.27) del corolario anterior basta que

$$(3.36) \quad \left( \prod_{k=1}^m |x - x_k|^{d_k p + \gamma_k (1-p/2)}, \prod_{k=1}^m |x - x_k|^{D_k p + \gamma_k (1-p/2)} \right) \in A_p^\delta$$

para algún  $\delta > 1$ . Elijamos ahora  $y_k$  ( $0 \leq k \leq m$ ) tales que

$$-1 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < y_{m-1} < x_m < y_m < 1,$$

con lo cual, por el Teorema 2.18, podemos estudiar (3.36) por factores; es decir, tenemos que ver que se cumple

$$\left(|x - x_k|^{d_k p + \gamma_k(1-p/2)}, |x - x_k|^{D_k p + \gamma_k(1-p/2)}\right) \in A_p^\delta \quad (1 \leq k \leq m).$$

Un cambio de variable obvio a partir de (2.16) muestra que lo anterior es equivalente a

$$d_k p + \gamma_k - \gamma_k p/2 > -1, \quad D_k p + \gamma_k - \gamma_k p/2 < p - 1, \quad D_k \leq d_k.$$

Pero

$$\begin{aligned} d_k p + \gamma_k - \gamma_k p/2 > -1 &\iff d_k + \gamma_k/p - \gamma_k/2 > -1/p \\ &\iff (1/p - 1/2)(\gamma_k + 1) + d_k > -1/2 \\ &\iff (1/p - 1/2)(\gamma_k + 1) + (d_k + D_k)/2 > (D_k - d_k)/2 - 1/2 \end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned} D_k p + \gamma_k - \gamma_k p/2 < p - 1 \\ &\iff (1/p - 1/2)(\gamma_k + 1) + (d_k + D_k)/2 < (d_k - D_k)/2 + 1/2. \end{aligned}$$

Juntando ambos, se sigue (3.35).

### Observación 3.12

Badkov [1–4], siguiendo técnicas distintas, demuestra resultados del tipo de los del Corolario 3.11 pero con  $a = A$ ,  $b = B$  y  $d_k = D_k$ . Además, él no necesita exigir, como hemos hecho nosotros,  $\gamma_k \geq 0$ , sino que le basta con exigir  $\gamma_k > -1$ . La diferencia radica en que si se intenta emplear la teoría  $A_p$  uniforme con la cotas del Teorema 1.14 (es decir,  $|p_n(x)| \leq C(|x - x_k| + 1/n)^{-\gamma_k/2}$  cerca de  $x_k$ ), los sumandos correspondientes a  $i = 1$  e  $i = 2$  no están acotados cuando  $-1 < \gamma_k < 0$  (para más detalles, ver Observación 4.18). Lo previsible para que el corolario anterior pueda extenderse a  $\gamma_k > -1$  es que, en (3.35), en lugar del  $1/2$  de la derecha aparezca  $\min\{1/2, (\gamma_k + 1)/2\}$ , que es lo que obtiene Badkov en los casos que trata y lo que se requiere como condición necesaria (ver el corolario siguiente).

### Corolario 3.13

Sea  $w(x)$  como en (3.22) con  $\alpha, \beta, \gamma_k > -1$ ,  $1 < p < \infty$  y los pesos  $U(x)$  y  $V(x)$  como en (3.34). Para que se verifique  $\|(S_n f)U\|_{p,w} \leq C\|fV\|_{p,w}$  uniformemente son necesarias las condiciones (3.25), (3.26) y

$$(3.37) \quad \left| \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) (\gamma_k + 1) + \frac{d_k + D_k}{2} \right| < \frac{d_k - D_k}{2} + \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\gamma_k + 1}{2} \right\} \quad (1 \leq k \leq m).$$

Demostración:

Para hacerla nos apoyaremos en el Teorema 3.4 y emplearemos reiteradamente que  $x^r$  es integrable en  $(0,1)$  si y sólo si  $r > -1$ .

Veamos en primer lugar la integrabilidad de (i), (ii), (iii) y (iv) del Teorema 3.4 cerca de  $x = 1$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} & \iff ap + \alpha > -1 \iff a + \alpha/p > -1/p \\
 & \iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + a > -(\alpha + 1)/2 \\
 & \iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + (a + A)/2 > (A - a)/2 - (\alpha + 1)/2, \\
 \text{(ii)} & \iff -Aq + \alpha > -1 \iff -A + \alpha/q > -1/q \\
 & \iff -A + \alpha - \alpha/p > 1/p - 1 \\
 & \iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + A < (\alpha + 1)/2 \\
 & \iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + (a + A)/2 < (a - A)/2 + (\alpha + 1)/2, \\
 \text{(iii)} & \iff -p/4 + ap + \alpha(1 - p/2) > -1 \iff -1/4 + a + \alpha/p - \alpha/2 > -1/p \\
 & \iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + a > -1/4 \\
 & \iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + (a + A)/2 > (A - a)/2 - 1/4, \\
 \text{(iv)} & \iff -q/4 - Aq + \alpha(1 - q/2) > -1 \\
 & \iff -1/4 - A + \alpha(1/q - 1/2) > -1/q \\
 & \iff -1/4 - A + \alpha(1/2 - 1/p) > 1/p - 1 \\
 & \iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + A < 1/4 \\
 & \iff (1/p - 1/2)(\alpha + 1) + (a + A)/2 < (a - A)/2 + 1/4,
 \end{aligned}$$

y las cuatro juntas se traducen en (3.25).

El estudio de (i), (ii), (iii) y (iv) cerca de  $-1$  para obtener (3.26) es totalmente igual sin más que cambiar  $\alpha$ ,  $a$  y  $A$  por  $\beta$ ,  $b$  y  $B$  respectivamente. Por último, análogamente se demuestra que las condiciones de integrabilidad cerca de cada  $x_k$  son

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} & \iff d_k p + \gamma_k > -1 \\
 & \iff (1/p - 1/2)(\gamma_k + 1) + (d_k + D_k)/2 > (D_k - d_k)/2 - (\gamma_k + 1)/2, \\
 \text{(ii)} & \iff -D_k q + \gamma_k > -1 \\
 & \iff (1/p - 1/2)(\gamma_k + 1) + (d_k + D_k)/2 < (d_k - D_k)/2 + (\gamma_k + 1)/2, \\
 \text{(iii)} & \iff d_k p + \gamma_k(1 - p/2) > -1 \\
 & \iff (1/p - 1/2)(\gamma_k + 1) + (d_k + D_k)/2 > (D_k - d_k)/2 - 1/2, \\
 \text{(iv)} & \iff -D_k q + \gamma_k(1 - q/2) > -1 \\
 & \iff (1/p - 1/2)(\gamma_k + 1) + (d_k + D_k)/2 < (d_k - D_k)/2 + 1/2,
 \end{aligned}$$

y juntas dan (3.37).

Para concluir el capítulo, vamos a estudiar la convergencia en media de la serie de Fourier de diversas familias de polinomios ortogonales cuyo peso no verifica la condición de Szegő (3.10) y que son los llamados polinomios de Pollaczek.

Dados tres parámetros  $a$ ,  $b$  y  $\lambda$  cumpliendo  $a \geq |b|$  y  $\lambda > 0$ , consideraremos los polinomios de Pollaczek como los ortonormales en  $[-1, 1]$  respecto al peso

$$(3.38) \quad w^{(\lambda)}(x; a, b) = (\operatorname{sen} \theta)^{2\lambda-1} e^{(2\theta-\pi)h(\theta)} |\Gamma(\lambda + ih(\theta))|^2, \quad x = \cos \theta, \quad \theta \in [0, \pi],$$

donde

$$h(\theta) = \frac{a \cos \theta + b}{\operatorname{sen} \theta} = (ax + b)(1 - x^2)^{-1/2}.$$

Estos polinomios, que se reducen a los ultrasféricos (ortogonales respecto al peso  $w(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2}$  cuando  $a = b = 0$ , en realidad sólo fueron introducidos por Pollaczek [1] para el caso  $\lambda = 1/2$  y su formulación según (3.38) se debe a Szegő (ver también Pollaczek [2]). Más tarde, el mismo Pollaczek [4] los generalizó de nuevo introduciéndoles un cuarto parámetro, aunque nosotros no nos ocuparemos de ellos. Para consultar diversas propiedades generales de estos polinomios puede verse Chihara [1, pág. 184].

En el desarrollo que sigue a continuación será fundamental la siguiente expresión asintótica

$$(3.39) \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} |\Gamma(\lambda + it)| e^{\pi|t|/2} |t|^{1/2-\lambda} = (2\pi)^{1/2}, \quad \lambda, t \in \mathbb{R},$$

que puede verse en Erdélyi y otros [1, Vol. I, 1.18 (6), pág. 47].

Con esto,

### **Teorema 3.14**

*La serie de Fourier de polinomios ortogonales respecto al peso  $w^{(\lambda)}(x; a, b)$  con  $a \neq 0$  sólo converge en  $L^p(w^{(\lambda)}(x; a, b))$  cuando  $p = 2$ .*

Demostración:

La convergencia para  $p = 2$  está siempre asegurada. Entonces, vamos a aplicar las condiciones necesarias del Teorema 3.4 para ver que no hay convergencia si  $p \neq 2$ . Las condiciones (i) y (ii) son simplemente  $w^{(\lambda)}(x; a, b) \in L^1(dx)$ , lo cual siempre es cierto (de lo contrario ni siquiera tendría sentido hablar de los polinomios ortogonales). Lo que vamos a hacer es comprobar que, si  $p > 2$ , no se satisface (iii). Análogamente se demostraría que si  $p < 2$  no se satisface (iv).

Supongamos a  $\neq -b$  y vamos a estudiar el carácter de la integral

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-p/4} w^{(\lambda)}(x; a, b)^{1-p/2} dx$$

cerca de  $x = 1$ . Análogamente se haría cerca de  $x = -1$  si  $a \neq b$ .

Haciendo el cambio de variable  $x = \cos \theta$ , resulta

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x^2)^{-p/4} w^{(\lambda)}(x; a, b)^{1-p/2} dx \\ = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} \theta)^{2\lambda-\lambda p} (e^{(2\theta-\pi)h(\theta)})^{1-p/2} |\Gamma(\lambda + ih(\theta))|^{2-p} d\theta. \end{aligned}$$

Pero, cuando  $\theta \rightarrow 0^+$ , es claro

$$h(\theta) = \frac{a + b \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \sim \frac{a + b}{\theta} \longrightarrow \infty$$

pues  $a \geq |b|$  y  $a \neq -b$ , y por tanto se podrá aplicar (3.39) con  $t = h(\theta)$ . Así, la integral anterior tendrá el mismo carácter que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} \theta)^{2\lambda-\lambda p} (e^{(2\theta-\pi)h(\theta)})^{1-p/2} (e^{-\pi h(\theta)} h(\theta)^{2\lambda-1})^{1-p/2} d\theta \\ = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} \theta)^{2\lambda-\lambda p} (e^{(2\theta-2\pi)h(\theta)})^{1-p/2} h(\theta)^{(2\lambda-1)(1-p/2)} d\theta \\ \sim \int_0^{\pi/2} \theta^{2\lambda-\lambda p} e^{\frac{(2\theta-2\pi)(a+b)}{\theta}(1-p/2)} \left(\frac{a+b}{\theta}\right)^{(2\lambda-1)(1-p/2)} d\theta \\ \sim \int_0^{\pi/2} \theta^{1-p/2} e^{1-\pi/\theta}(a+b)(2-p) d\theta, \end{aligned}$$

y como  $(1 - \pi/\theta)(a + b)(2 - p) \rightarrow \infty$  cuando  $\theta \rightarrow 0^+$  pues  $a + b > 0$  y  $p > 2$ , la integral anterior es divergente, tal como queríamos comprobar.

### Observación 3.15

Nevai [1, pág. 80 y pág. 168] demuestra el resultado anterior pero únicamente en el caso  $\lambda = 1/2$ , con lo cual el peso admite la expresión

$$w^{(1/2)}(x; a, b) = \frac{2e^{\theta h(\theta)}}{1 + e^{\pi h(\theta)}},$$

mucho más sencilla que la de (3.38), y desde luego, en su demostración no se necesita utilizar (3.39).

Definamos ahora las funciones de Pollaczek mediante

$$\Psi_n(x) = p_n(x)w^{(\lambda)}(x; a, b)^{1/2}$$

que, obviamente, forman un sistema ortonormal en  $L^2(dx)$ . Entonces, para cada  $g \in L^p(dx)$ , denotemos  $\mathcal{S}_n(g, x)$  a las sumas parciales de su serie de Fourier respecto al sistema  $\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ . A continuación, vamos a estudiar la convergencia en  $L^p(dx)$ .

**Teorema 3.16**

Sea  $a \neq 0$ . Entonces, la acotación uniforme  $\|\mathcal{S}_n(g, x)\|_{p, dx} \leq C\|g(x)\|_{p, dx}$  sólo es posible si  $4/3 < p < 4$ .

Demostración:

Según vimos en (1.6), la acotación uniforme  $\|\mathcal{S}_n(g, x)\|_{p, dx} \leq C\|g(x)\|_{p, dx}$  es equivalente a

$$\|\mathcal{S}_n(f, x)w^{(\lambda)}(x; a, b)^{1/2-1/p}\|_{p, w} \leq C\|f(x)w^{(\lambda)}(x; a, b)^{1/2-1/p}\|_{p, w}.$$

Y vamos a ver qué condiciones impone el Teorema 3.4 a la acotación anterior. Sin más que tomar  $U(x) = V(x) = w^{(\lambda)}(x; a, b)^{1/2-1/p}$ , es claro que se traducen en

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \int_{-1}^1 w^{(\lambda)}(x; a, b)^{p/2} dx < \infty, & \text{(ii)} \quad & \int_{-1}^1 w^{(\lambda)}(x; a, b)^{q/2} dx < \infty, \\ \text{(iii)} \quad & \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-p/4} dx < \infty, & \text{(iv)} \quad & \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-q/4} dx < \infty. \end{aligned}$$

Pero, (iii)  $\Leftrightarrow p < 4$ , y (iv)  $\Leftrightarrow p > 4/3$ . Por tanto, basta que comprobemos lo que ocurre con (i) y (ii). Y lo haremos restringiendo el intervalo de integración a  $(0, 1)$ , ya que en  $(-1, 0)$  se puede proceder de manera análoga.

Supongamos en primer lugar  $a \neq -b$ . Entonces, como en el Teorema 3.14, para estimar (i) se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 w^{(\lambda)}(x; a, b)^{p/2} dx &= \int_0^{\pi/2} e^{(2\theta-\pi)h(\theta)p/2} |\Gamma(\lambda + ih(\theta))|^p (\sin \theta)^{(2\lambda-1)p/2+1} d\theta \\ &\sim \int_0^{\pi/2} e^{(\theta-\pi)h(\theta)p} |h(\theta)|^{(1/2-\lambda)p} (\sin \theta)^{\lambda p-p/2+1} d\theta \\ &\sim \int_0^{\pi/2} e^{\frac{(\theta-\pi)(a+b)p}{\theta}} \left(\frac{a+b}{\theta}\right)^{(1/2-\lambda)p} \theta^{\lambda p-p/2+1} d\theta \\ &\sim \int_0^{\pi/2} e^{(1-\pi/\theta)(a+b)p} \theta^{2\lambda p-p+1} d\theta. \end{aligned}$$

Como  $(1-\pi/\theta)(a+b)p \rightarrow -\infty$  cuando  $\theta \rightarrow 0^+$  pues  $a+b > 0$ , la integral anterior siempre es convergente y no aparece ninguna condición adicional. Lo mismo ocurre con (ii).

Veamos pues lo que sucede si  $a = -b$ . Entonces,

$$h(\theta) = \frac{a \cos \theta - a}{\sin \theta} \sim \frac{-a\theta^2/2}{\theta} = \frac{-a\theta}{2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \theta \rightarrow 0^+,$$

luego no se puede aplicar (3.39). Pero es claro que en este caso

$$e^{(2\pi-\theta)h(\theta)} \rightarrow 1 \quad \text{y} \quad |\Gamma(\lambda + ih(\theta))|^2 \rightarrow \Gamma(\lambda)^2 > 0,$$

con lo que, se deberá cumplir

$$\int_0^{\pi/2} (\text{sen } \theta)^{(2\lambda-1)p/2+1} d\theta < \infty.$$

Pero esto es equivalente a  $(2\lambda - 1)p/2 + 1 > -1$ , lo cual siempre es cierto cuando  $p < 4$  por ser  $\lambda > 0$ . Por último, al estudiar (ii) aparece la condición  $(2\lambda - 1)q/2 + 1 > -1$ , que de nuevo es cierta por ser  $q < 4$  y  $\lambda > 0$ .

**Observación 3.17**

Nótese que las dos condiciones (iii) y (iv) del teorema anterior no dependen para nada del peso. Es decir, que dado un peso cualquiera  $w(x)$  en  $[-1, 1]$  y  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  sus polinomios ortonormales, la serie de Fourier respecto al sistema  $\Psi_n(x) = p_n(x)w(x)^{1/2}$  nunca puede ser uniformemente acotada en  $L^p(dx)$  cuando  $p \notin (4/3, 4)$ . En realidad, lo único que hemos hecho en la demostración anterior ha sido comprobar que (i) y (ii) se verifican  $\forall p \in (4/3, 4)$  y que por tanto no aparecen más condiciones. Otras veces (i) y (ii) sí que imponen condiciones adicionales. Es sencillo comprobar que esto ocurre, por ejemplo, para pesos de Jacobi con  $\alpha$  o  $\beta$  menores que  $-1/2$ .

Más en general, dado  $r \in \mathbb{R}$ , definimos las funciones

$$(3.40) \quad \Psi_n(x) = p_n(x)w^{(\lambda)}(x; a, b)^{(1-r)/2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

que forman un sistema ortonormal en  $L^2(w^{(\lambda)}(x; a, b)^r dx)$  (ver (1.4)). Entonces, para cada  $g \in L^p(w^{(\lambda)}(x; a, b)^r dx)$  denotamos  $\mathcal{S}_n(g, x)$  a su correspondiente serie de Fourier y vamos a estudiar la posible convergencia en media en este caso.

**Teorema 3.18**

*La serie de Fourier  $\mathcal{S}_n(g, x)$  respecto al sistema (3.40) con  $a \neq 0$  y  $r \neq 0$  sólo es uniformemente acotada como operador de  $L^p(w^{(\lambda)}(x; a, b)^r dx)$  en  $L^p(w^{(\lambda)}(x; a, b)^r dx)$  cuando  $p = 2$ .*

Demostración:

Según vimos en (1.6), la acotación uniforme  $\|\mathcal{S}_n(g, x)\|_{p, w^r} \leq C\|g(x)\|_{p, w^r}$  es equivalente a

$$\|S_n(f, x)w^{(\lambda)}(x; a, b)^{(1-r)/2+r/p-1/p}\|_{p, w} \leq C\|f(x)w^{(\lambda)}(x; a, b)^{(1-r)/2+r/p-1/p}\|_{p, w}.$$

Pero, tomando  $U(x) = V(x) = w^{(\lambda)}(x; a, b)^{(1-r)/2+r/p-1/p}$ , es inmediato comprobar que las condiciones necesarias (iii) y (iv) del Teorema 3.4 son, respectivamente,

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-p/4} w^{(\lambda)}(x; a, b)^{r(1-p/2)} dx < \infty$$

y

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-q/4} w^{(\lambda)}(x; a, b)^{r(1-q/2)} dx < \infty.$$

Y por ser  $r \neq 0$ , análogamente a como hacíamos en el Teorema 3.14 se demuestra que las condiciones anteriores de integrabilidad sólo se satisfacen para  $p = 2$ .

### Observación 3.19

Existen aún otras familias de polinomios ortogonales en  $[-1, 1]$  relacionadas con las de Jacobi y cuyo descubrimiento también se debe a Pollaczek [3]. Su construcción depende de tres parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  y el peso respecto al cual son ortogonales es

$$w(x; a, b, c) = \frac{(\sin \theta)^{c+1} e^{(2\theta-\pi)h(\theta)}}{1 - 2\gamma x + \gamma^2} |\Gamma(1 + c/2 + ih(\theta))|^2,$$

$$h(\theta) = \frac{(2a-c)x + b}{2(1-x^2)^{1/2}}, \quad x = \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

y donde  $\gamma$  es una de las dos raíces de la ecuación  $a\gamma^2 + b\gamma + a - c = 0$ .

Cuando  $b = 0$  y  $c = 2a$  (de donde  $\gamma = \pm 1$ ), los polinomios que aparecen son, salvo constante multiplicativa, los de Jacobi  $P_n^{(a-\gamma/2, a+\gamma/2)}(x)$ . Para ver más detalles, puede consultarse Chihara [1, pág. 187].

Con estos polinomios puede efectuarse un tratamiento análogo al realizado para los polinomios definidos mediante el peso (3.38). De nuevo la estimación asintótica (3.39) resulta fundamental en el estudio de las condiciones necesarias para la convergencia de la serie de Fourier y los resultados que se obtienen son similares a los que ya conocemos para los polinomios definidos en (3.38).



## CAPÍTULO IV

### Series de Fourier respecto de pesos de Jacobi con deltas de Dirac

#### PARTE 1.<sup>a</sup>: Caso $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta_{-1}(x) + N\delta_1(x)$

En el capítulo anterior, entre otras cosas, hemos estudiado la convergencia en media de series de Fourier de polinomios de Jacobi, ortogonales respecto al peso  $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  en el intervalo  $[-1, 1]$ . Una cuestión que cabe plantearse es qué es lo que ocurre si a la medida dada por el peso  $w(x)$  le añadimos como parte singular varias deltas de Dirac, en particular deltas de Dirac en los extremos del intervalo. De la convergencia de los sistemas ortogonales que así aparecen será de lo que trate fundamentalmente este capítulo.

Dados  $\alpha, \beta > -1$  y  $M, N \geq 0$  denotaremos  $d\mu$  a la medida que para cada función  $f$  se comporta mediante

$$\int_{-1}^1 f(x) d\mu(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \int_{-1}^1 f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Mf(-1) + Nf(1),$$

es decir,

$$(4.1) \quad d\mu(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + M\delta_{-1}(x) + N\delta_1(x), \quad x \in [-1, 1].$$

La constante que multiplica a  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  en (4.1) sirve únicamente para que la contribución de la parte absolutamente continua de  $d\mu$  a la medida del intervalo  $[-1, 1]$  sea 1, es decir,

$$\int_{-1}^1 d\mu(x) = 1 + M + N.$$

Por otra parte, para cada  $a > -1$ , denotaremos

$$(4.2) \quad (a+1)_n = \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a+1)} = (a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)(a+n).$$

Cuando  $a+1 = 0$ , entenderemos  $(a+1)_n/(a+1)$  mediante continuidad en (4.2), es decir

$$(4.2) \quad \frac{(a+1)_n}{(a+1)} = (a+2)\cdots(a+n-1)(a+n) = (a+2)_{n-1}, \quad a = -1.$$

Dadas dos sucesiones  $\{r_n\}$  y  $\{s_n\}$  de términos no nulos emplearemos la notación  $r_n \approx s_n$  cuando  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n/s_n = 1$ , y diremos simplemente  $r_n \sim s_n$  para indicar que existen dos constantes positivas  $C_1$  y  $C_2$  tales que  $C_1 r_n \leq s_n \leq C_2 r_n$ . Entonces, sin más que utilizar la fórmula de Stirling es fácil llegar a

$$(4.4) \quad \frac{(a+1)_n}{n!} \approx \frac{n^a}{\Gamma(a+1)}, \quad \frac{(a+1)_n}{(b+1)_n} \approx \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+1)} n^{a-b}.$$

Utilizaremos también en este capítulo los polinomios de Jacobi  $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  ortogonales respecto a  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  tal como los definimos en (1.25). Recordemos alguna de sus propiedades que nos serán de gran utilidad en lo que sigue. Según vimos en (1.33), y sirviéndonos de (4.4), es claro que

$$(4.5) \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \approx \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

y la correspondiente estimación para  $P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)$  se obtiene por la relación de simetría  $P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$  (ver (1.32)). Además, el coeficiente director de  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  toma el valor

$$(4.6) \quad k_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} \frac{2^{-n} \Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \approx \frac{2^{n+\alpha+\beta}}{\pi^{1/2} n^{1/2}}$$

como vimos en (1.30) y (1.31). Y el cuadrado de la norma en  $L^2(w)$  de los  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  es (ver (1.27), (1.28) y (1.29))

$$(4.7) \quad \begin{aligned} h_n^{(\alpha,\beta)} &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x)^2 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \approx \frac{2^{\alpha+\beta}}{n}. \end{aligned}$$

Definamos ahora los polinomios

$$(4.8) \quad P_n^{\alpha,\beta,M,N}(x) = \left( \frac{(\alpha+\beta+1)_n}{n!} \right)^2 \left\{ \frac{n+\alpha+\beta+1}{2(\alpha+\beta+1)} [B_n M(1-x) - A_n N(1+x)] P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) + A_n B_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right\},$$

donde

$$A_n = \frac{(\alpha+1)_n n!}{(\beta+1)_n (\alpha+\beta+1)_n} + \frac{n(n+\alpha+\beta+1)M}{(\beta+1)(\alpha+\beta+1)}$$

y

$$B_n = \frac{(\beta + 1)_n n!}{(\alpha + 1)_n (\alpha + \beta + 1)_n} + \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)N}{(\alpha + 1)(\alpha + \beta + 1)}.$$

En la expresión anterior, cuando  $n = 0$ , considerar  $P_{-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) = 0$ , y en el caso  $\alpha + \beta + 1 = 0$ , usar (4.3).

Con esta notación, Koornwinder [1] prueba que los polinomios  $\{P_n^{\alpha, \beta, M, N}(x)\}_{n=0}^\infty$  son ortogonales respecto a la medida  $d\mu$ , cumpliéndose las propiedades

$$(4.9) \quad P_n^{\alpha, \beta, M, N}(1) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} + \frac{(\beta + 1)_n (\alpha + \beta + 2)_n nM}{n! n! (\beta + 1)}$$

y

$$(4.10) \quad P_n^{\alpha, \beta, M, N}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta, \alpha, N, M}(x),$$

y por tanto

$$(4.11) \quad (-1)^n P_n^{\alpha, \beta, M, N}(-1) = \frac{(\beta + 1)_n}{n!} + \frac{(\alpha + 1)_n (\alpha + \beta + 2)_n nN}{n! n! (\alpha + 1)}.$$

Llamaremos  $k_n^{\alpha, \beta, M, N}$  al coeficiente director de  $P_n^{\alpha, \beta, M, N}(x)$  y  $h_n^{\alpha, \beta, M, N}$  al cuadrado de su norma:

$$h_n^{\alpha, \beta, M, N} = \int_{-1}^1 P_n^{\alpha, \beta, M, N}(x)^2 d\mu(x).$$

Así como la demostración de la convergencia en media de las series de Jacobi descansa fundamentalmente, además de en la teoría  $A_p$ , en la acotación

$$\left(h_n^{(\alpha, \beta)}\right)^{-1/2} |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| \leq C \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-1/4} \left(1 + x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\beta/2-1/4},$$

parece razonable como primer paso encontrar otra estimación similar

$$(4.12) \quad \left(h_n^{\alpha, \beta, M, N}\right)^{-1/2} |P_n^{\alpha, \beta, M, N}(x)| \leq C \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-1/4} \left(1 + x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\beta/2-1/4},$$

para posteriormente abordar la convergencia de la serie de Fourier respecto de  $d\mu$ . Asimismo, y dado el papel que juegan las deltas de Dirac en 1 y  $-1$ , necesitaremos conocer una estimación del tamaño de los polinomios normalizados en esos dos puntos.

Es fácil, utilizando (4.4), demostrar las estimaciones asintóticas

$$(4.13) \quad P_n^{\alpha, \beta, M, N}(1) \approx \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} n^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\beta + 2)\Gamma(\alpha + \beta + 2)} n^{2\beta + \alpha + 2}$$

y

$$(4.14) \quad (-1)^n P_n^{\alpha, \beta, M, N}(-1) \approx \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} n^\beta + \frac{N}{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\alpha + \beta + 2)} n^{2\alpha + \beta + 2}.$$

(Notar en (4.13) que el segundo de los dos sumandos es el que realmente da la estimación buscada cuando  $M \neq 0$ . Análogamente ocurre en (4.14) con  $N$ .)

Pero para llegar a establecer tanto (4.12) como las estimaciones de  $P_n^{\alpha, \beta, M, N}(1)$  y  $(-1)^n P_n^{\alpha, \beta, M, N}(-1)$  multiplicadas por  $(h_n^{\alpha, \beta, M, N})^{-1/2}$ , lo que necesitamos es encontrar el tamaño de  $h_n^{\alpha, \beta, M, N}$ .

Koornwinder, para demostrar que los polinomios  $\{P_n^{\alpha, \beta, M, N}(x)\}_{n=0}^\infty$  son ortogonales respecto a  $d\mu$ , lo que hace es probar que

$$\int_{-1}^1 P_n^{\alpha, \beta, M, N}(x)(1-x)^{n-k-1}(1+x)^k d\mu(x) = 0$$

cuando  $k = 0, 1, \dots, n-1$  (notar que  $(1-x)^{n-k-1}(1+x)^k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$  es base del espacio de los polinomios de grado  $\leq n-1$ ). Por lo tanto, no necesita calcular  $h_n^{\alpha, \beta, M, N}$ . Entonces, nuestro primer objetivo va a ser encontrar  $h_n^{\alpha, \beta, M, N}$  y una estimación suya.

Antes que nada, vamos a dar una serie de estimaciones que utilizaremos más adelante. En muchas de las expresiones que siguen aparece  $\Gamma(\alpha + \beta + 1)$  o  $(\alpha + \beta + 1)^{-1}$ , ninguna de las cuales tienen sentido cuando  $\alpha + \beta + 1 = 0$ . Actuaremos en estos casos mediante continuidad en  $\alpha$  y  $\beta$ , ya que cuando aparecen siempre pueden simplificarse formalmente utilizando  $\Gamma(\alpha + \beta + 2) = (\alpha + \beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)$  o con algún factor de (4.8) o de las definiciones de  $A_n$  y  $B_n$ . No nos preocuparemos de ello a partir de ahora.

Sin más que utilizar (4.4), es fácil ver que para  $A_n$  y  $B_n$  se tiene

$$(4.15) \quad A_n \approx \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} n^{-2\beta} + \frac{M}{(\beta + 1)(\alpha + \beta + 1)} n^2,$$

$$(4.16) \quad B_n \approx \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1)} n^{-2\alpha} + \frac{N}{(\alpha + 1)(\alpha + \beta + 1)} n^2.$$

En ambas ocurre que el sumando importante es el segundo si el correspondiente  $M$  o  $N$  que aparece es distinto de 0. Además, juntándolas,

$$(4.17) \quad \begin{aligned} A_n B_n &\approx \Gamma(\alpha + \beta + 1)^2 n^{-2\alpha - 2\beta} \\ &+ \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)N}{\Gamma(\alpha + 2)(\alpha + \beta + 1)} n^{2-2\beta} + \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)M}{\Gamma(\beta + 2)(\alpha + \beta + 1)} n^{2-2\alpha} \\ &+ \frac{MN}{(\alpha + 1)(\beta + 1)(\alpha + \beta + 1)^2} n^4. \end{aligned}$$

En esta expresión, el sumando que proporciona realmente la estimación es el primero si  $M = N = 0$ , el segundo si  $M = 0 \neq N$ , el tercero si  $N = 0 \neq M$  y el cuarto si  $M \neq 0 \neq N$ .

Vamos ahora a encontrar una expresión adecuada del coeficiente director  $k_n^{\alpha,\beta,M,N}$ . Sin más que igualar los coeficientes de  $x^n$  en (4.8) se tiene

$$k_n^{\alpha,\beta,M,N} = \left( \frac{(\alpha + \beta + 1)_n}{n!} \right)^2 \left\{ \frac{-B_n(n + \alpha + \beta + 1)M}{2(\alpha + \beta + 1)} k_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} - \frac{A_n(n + \alpha + \beta + 1)N}{2(\alpha + \beta + 1)} k_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} + A_n B_n k_n^{(\alpha,\beta)} \right\}.$$

Pero, utilizando (4.6), es claro que

$$k_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} = \frac{2n}{n + \alpha + \beta + 1} k_n^{(\alpha,\beta)}.$$

Así, sacando  $k_n^{(\alpha,\beta)}$  factor común, obtenemos

$$(4.18) \quad k_n^{\alpha,\beta,M,N} = \left( \frac{(\alpha + \beta + 1)_n}{n!} \right)^2 k_n^{(\alpha,\beta)} \left( A_n B_n - \frac{n B_n M}{\alpha + \beta + 1} - \frac{n A_n N}{\alpha + \beta + 1} \right).$$

Con lo que ya tenemos, y aunque en realidad no lo vamos a necesitar, ya es fácil obtener una estimación de  $k_n^{\alpha,\beta,M,N}$ . En efecto, basta comprobar que las estimaciones de  $n B_n M / (\alpha + \beta + 1)$  y  $n A_n N / (\alpha + \beta + 1)$  son despreciables frente a la de  $A_n B_n$  y entonces, utilizando (4.18), (4.4), (4.6) y (4.17) se llega a

$$(4.19) \quad k_n^{\alpha,\beta,M,N} \approx \begin{cases} 2^{n+\alpha+\beta} \pi^{-1/2} n^{-1/2}, & \text{si } M = N = 0, \\ \frac{N \Gamma(\beta+1)}{\pi^{1/2} \Gamma(\alpha+\beta+2) \Gamma(\alpha+2)} 2^{n+\alpha+\beta} n^{3/2+2\alpha}, & \text{si } N > M = 0, \\ \frac{M \Gamma(\alpha+1)}{\pi^{1/2} \Gamma(\alpha+\beta+2) \Gamma(\beta+2)} 2^{n+\alpha+\beta} n^{3/2+2\beta}, & \text{si } M > N = 0, \\ \frac{MN}{\pi^{1/2} (\alpha+1)(\beta+1) \Gamma(\alpha+\beta+2)^2} 2^{n+\alpha+\beta} n^{7/2+2\alpha+2\beta}, & \text{si } M, N > 0. \end{cases}$$

Todavía, para calcular  $h_n^{\alpha,\beta,M,N}$  necesitaremos algunos resultados previos.

**Lema 4.1**

$$\begin{aligned} E_n &= \int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x) (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^\beta dx \\ &= (-1)^{n-1} 2^{\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 2)} \\ &\approx (-1)^{n-1} 2^{\alpha+\beta+2} \Gamma(\beta + 1) n^{-(\beta+1)}. \end{aligned}$$

Demostración:

Por la fórmula de Rodrigues (1.25) se tiene

$$E_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}] dx.$$

Entonces, integrando por partes con  $u = 1/(1+x)$  y utilizando que

$$\frac{1}{1+x} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]$$

se anula en 1 y  $-1$  tenemos

$$E_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x)^2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} [(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}] dx.$$

Integramos de nuevo por partes tomando esta vez  $u = 1/(1+x)^2$  y reiteramos el proceso del mismo modo. Así, vamos obteniendo

$$E_n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1)}{2^{n-1}(n-1)!} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x)^k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}] dx,$$

de donde, para  $k = n$ ,

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^\beta dx \\ &= (-1)^{n-1} 2^{\alpha+\beta+1} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right)^{n+\alpha} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right)^\beta dx. \end{aligned}$$

Haciendo ahora el cambio de variable  $1/2 + x/2 = y$  aparece una función beta:

$$\begin{aligned} E_n &= (-1)^{n-1} 2^{\alpha+\beta+2} \int_0^1 (1-y)^{n+\alpha} y^\beta dy \\ &= (-1)^{n-1} 2^{\alpha+\beta+2} B(n+\alpha+1, \beta+1) \\ &= (-1)^{n-1} 2^{\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}. \end{aligned}$$

Por último, para obtener la estimación del enunciado basta utilizar la fórmula de Stirling, con lo que queda probado el lema.

**Lema 4.2**

$$\begin{aligned}
 (-1)^n F_n &= \int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) [(1-x)^n - 2^n] (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^\beta dx \\
 &= - \int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{\beta+1} dx \\
 &= \frac{(-1)^n h_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}}{k_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}} = \frac{2(-1)^n h_n^{(\alpha, \beta)}}{k_n^{(\alpha, \beta)}} \\
 &= \frac{(-1)^n 2^{n+\alpha+\beta+2} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \approx \frac{(-1)^n \pi^{1/2}}{2^{n-1}} n^{-1/2}.
 \end{aligned}$$

Demostración:

Por ser

$$\frac{z^n - a^n}{z - a} = z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \dots + a^{n-2} z + a^{n-1},$$

tomando  $z = 1 - x$  y  $a = 2$  es claro que

$$(1-x)^n - 2^n = -(1+x) \sum_{k=0}^{n-1} 2^k (1-x)^{n-1-k}.$$

Y como

$$\int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) \pi(x) (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} dx = 0$$

para todo  $\pi(x)$  polinomio de grado  $\leq n - 2$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) [(1-x)^n - 2^n] (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^\beta dx \\
 = - \int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) (1-x)^{n-1} (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} dx.
 \end{aligned}$$

Por el mismo motivo, la integral anterior no se modifica si en lugar de  $(1-x)^{n-1}$  ponemos  $(-1)^{n-1} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) / k_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}$ , con lo cual

$$\begin{aligned}
 (-1)^n F_n &= - \frac{(-1)^{n-1}}{k_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}} \int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)^2 (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} dx \\
 &= \frac{(-1)^n h_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}}{k_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}},
 \end{aligned}$$

y para concluir el lema basta utilizar (4.6) y (4.7).

**Lema 4.3**

$$G_n = \int_{-1}^1 P_n^{\alpha,\beta,M,N}(x)(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^\beta dx = (-1)^n \left( \frac{(\alpha+\beta+1)_n}{n!} \right)^2 \\ \times \left\{ -\frac{MB_n(n+\alpha+\beta+1)}{\alpha+\beta+1} 2^{n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)} \right. \\ \left. + \frac{MB_n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+\beta+1)} F_n + \frac{NA_n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+\beta+1)} F_n + \frac{1}{2} A_n B_n F_n \right\}.$$

Demostración:

Por (4.8), es claro que

$$G_n = \left( \frac{(\alpha+\beta+1)_n}{n!} \right)^2 \\ \times \left\{ \frac{MB_n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+\beta+1)} \int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)(1-x)^{n+\alpha+1}(1+x)^\beta dx \right. \\ \left. - \frac{NA_n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+\beta+1)} \int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{\beta+1} dx \right. \\ \left. + A_n B_n \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^\beta dx \right\}.$$

Calculemos las tres integrales que aparecen.

Para la primera, utilizando el Lema 4.1 y la primera parte del 4.2, tenemos

$$\int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)(1-x)^{n+\alpha+1}(1+x)^\beta dx \\ = 2^n \int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^\beta dx \\ + \int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)[(1-x)^n - 2^n](1-x)^{\alpha+1}(1+x)^\beta dx = 2^n E_n + (-1)^n F_n.$$

La segunda, sin más que utilizar la segunda parte del Lema 4.2 (observar el signo – del lema), queda

$$\int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{\beta+1} dx = (-1)^{n-1} F_n.$$

Y la tercera, utilizando de nuevo la segunda parte del Lema 4.2 pero con  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $n$  en vez de  $\alpha+1$ ,  $\beta+1$  y  $n-1$  queda

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{\beta+1} dx = (-1)^n F_n/2.$$

Juntando las tres, se sigue el lema.



Vamos todavía a aclarar un poco más la expresión que aparece en el lema anterior, encontrando a partir de ella otra que nos será de mayor utilidad más adelante. Para ello, denotemos  $H_n$  al primero de los cuatro sumandos que aparecen entre llaves, es decir,

$$(4.20) \quad H_n = \frac{MB_n(n + \alpha + \beta + 1)}{\alpha + \beta + 1} 2^{n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 2)}.$$

Así, podemos poner

$$(4.21) \quad G_n = (-1)^n \left( \frac{(\alpha + \beta + 1)_n}{n!} \right)^2 \left\{ -H_n + \frac{1}{2}A_nB_nF_n + \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2(\alpha + \beta + 1)} F_n(MB_n + NA_n) \right\}.$$

Por otra parte, sin más que sustituir  $B_n$  por su valor, simplificar las expresiones que aparecen y utilizar (4.11), es fácil llegar a la conclusión

$$(4.22) \quad H_n = (-1)^n \frac{M\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} 2^{n+\alpha+\beta+1} P_n^{\alpha,\beta,M,N} (-1) \left( \frac{n!}{(\alpha + \beta + 1)_n} \right)^2.$$

Con todo esto, ya estamos en condiciones de encontrar la expresión para  $h_n^{\alpha,\beta,M,N}$  que buscábamos:

#### Teorema 4.4

$$(4.23) \quad h_n^{\alpha,\beta,M,N} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} h_n^{(\alpha,\beta)} \left( \frac{(\alpha + \beta + 1)_n}{n!} \right)^4 \times \left\{ A_nB_n - \frac{n}{\alpha + \beta + 1} (MB_n + NA_n) \right\} \times \left\{ A_nB_n + \frac{n + \alpha + \beta + 1}{\alpha + \beta + 1} (MB_n + NA_n) \right\}.$$

Además, se cumple

$$(4.24) \quad h_n^{\alpha,\beta,M,N} \approx \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} n^{-1}, & \text{si } M = N = 0, \\ \frac{N^2\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)^2\Gamma(\alpha+\beta+2)} n^{3+4\alpha}, & \text{si } N > M = 0, \\ \frac{M^2\Gamma(\alpha+1)}{2\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta+2)^2\Gamma(\alpha+\beta+2)} n^{3+4\beta}, & \text{si } M > N = 0, \\ \frac{M^2N^2}{2(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)^3} n^{7+4\alpha+4\beta}, & \text{si } M, N > 0. \end{cases}$$

Demostración:

Es obvio que para algún polinomio  $\pi(x)$  de grado  $n - 1$  a lo más puede ponerse

$$P_n^{\alpha,\beta,M,N}(x) = k_n^{\alpha,\beta,M,N}(-1)^n(1-x)^n + \pi(x).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} h_n^{\alpha,\beta,M,N} &= k_n^{\alpha,\beta,M,N} \int_{-1}^1 P_n^{\alpha,\beta,M,N}(x)(-1)^n(1-x)^n d\mu(x) \\ &= k_n^{\alpha,\beta,M,N} \left\{ (-1)^n G_n \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} + M(-1)^n P_n^{\alpha,\beta,M,N}(-1)2^n + 0 \right\} \\ &= k_n^{\alpha,\beta,M,N} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \left( \frac{(\alpha + \beta + 1)_n}{n!} \right)^2 \left[ -H_n + \frac{1}{2}A_n B_n F_n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2(\alpha + \beta + 1)} F_n (M B_n + N A_n) \right] + M(-1)^n P_n^{\alpha,\beta,M,N}(-1)2^n \right\}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos empleado (4.21). Ahora, sin más que sustituir  $H_n$  por su expresión (4.22), el primer sumando del corchete se anula con el que está fuera del corchete y queda

$$\begin{aligned} h_n^{\alpha,\beta,M,N} &= \frac{1}{2} k_n^{\alpha,\beta,M,N} \left( \frac{(\alpha + \beta + 1)_n}{n!} \right)^2 F_n \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \\ &\quad \times \left\{ A_n B_n + \frac{n + \alpha + \beta + 1}{\alpha + \beta + 1} (M B_n + N A_n) \right\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $F_n = 2h_n^{(\alpha,\beta)}/k_n^{(\alpha,\beta)}$  y empleando (4.18) se sigue (4.23).

Vamos ahora a demostrar las estimaciones asintóticas. Es fácil comprobar que  $n(M B_n + N A_n)$  es despreciable frente a  $A_n B_n$ , y por tanto,

$$h_n^{\alpha,\beta,M,N} \approx \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} h_n^{(\alpha,\beta)} \left( \frac{(\alpha + \beta + 1)_n}{n!} \right)^4 (A_n B_n)^2.$$

Entonces, sin más que utilizar (4.4), (4.7) y (4.17) se sigue (4.24).

Ahora, ya podemos calcular sin ningún tipo de problema el tamaño de los polinomios normalizados en 1 y  $-1$ :

#### Corolario 4.5

$$(4.25) \quad \frac{P_n^{\alpha,\beta,M,N}(1)}{\sqrt{h_n^{\alpha,\beta,M,N}}} \approx \begin{cases} \frac{2^{1/2}\Gamma(\beta+1)^{1/2}}{\Gamma(\alpha+1)^{1/2}\Gamma(\alpha+\beta+2)^{1/2}} n^{\alpha+1/2}, & \text{si } N = 0, \\ \frac{2^{1/2}(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)^{1/2}\Gamma(\alpha+\beta+2)^{1/2}}{N\Gamma(\beta+1)^{1/2}} n^{-\alpha-3/2}, & \text{si } N > 0, \end{cases}$$

$$(4.26) \quad \frac{(-1)^n P_n^{\alpha, \beta, M, N}(-1)}{\sqrt{h_n^{\alpha, \beta, M, N}}} \approx \begin{cases} \frac{2^{1/2} \Gamma(\alpha+1)^{1/2}}{\Gamma(\beta+1)^{1/2} \Gamma(\alpha+\beta+2)^{1/2}} n^{\beta+1/2}, & \text{si } M = 0, \\ \frac{2^{1/2} (\beta+1) \Gamma(\beta+1)^{1/2} \Gamma(\alpha+\beta+2)^{1/2}}{M \Gamma(\alpha+1)^{1/2}} n^{-\beta-3/2}, & \text{si } M > 0. \end{cases}$$

Demostración:

Basta estudiar los cuatro casos que se presentan ( $M = N = 0$ ,  $N > M = 0$ ,  $M > N = 0$  y  $M, N > 0$ ) a partir de (4.13), (4.14) y (4.24).

### Observación 4.6

Un primera consecuencia que podemos sacar es que la existencia o no de parte singular en  $-1$  (es decir, si  $M > 0$  o  $M = 0$ ) no influye para nada en el tamaño de los polinomios normalizados en 1. Análogamente ocurre en  $-1$  con  $N$ .

Por otra parte, en el corolario anterior también podemos ver que si la medida tiene una delta de Dirac en 1 (análogamente en  $-1$ ) el tamaño de los polinomios normalizados en ese punto es  $Cn^{-\alpha-3/2}$ , mucho menor que si no la hubiera, ya que entonces su tamaño es  $Cn^{\alpha+1/2}$  ( $-\alpha - 3/2 < \alpha + 1/2 \Leftrightarrow \alpha > -1$ ). Además, se puede garantizar

$$(4.27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( h_n^{\alpha, \beta, M, N} \right)^{-1/2} P_n^{\alpha, \beta, M, N}(1) = 0$$

siempre que  $N > 0$ . En cambio, si  $N = 0$ , el límite anterior es 0 cuando  $\alpha < -1/2$  e  $\infty$  cuando  $\alpha > -1/2$ . Más aún, si  $N > 0$ , la sucesión que aparece en (4.27) está en  $\ell^2$  (es decir, es de cuadrado sumable), y si además  $\alpha > -1/2$  también está en  $\ell^1$  (la serie es absolutamente convergente).

Vamos por fin a abordar la demostración de (4.12). Por la relación de simetría (4.10) nos podremos restringir al intervalo  $[0, 1]$  y solamente necesitaremos demostrar

$$\left( h_n^{\alpha, \beta, M, N} \right)^{-1/2} |P_n^{\alpha, \beta, M, N}(x)| \leq C \left( 1 - x + \frac{1}{n^2} \right)^{-\alpha/2 - 1/4}, \quad x \in [0, 1].$$

Además, tal como hacemos en el Teorema 1.12 para pasar de (1.40) a (1.41), y si efectuamos el cambio de variable  $x = \cos \theta$ , basta con que probemos

$$(4.28) \quad \left( h_n^{\alpha, \beta, M, N} \right)^{-1/2} |P_n^{\alpha, \beta, M, N}(\cos \theta)| \begin{cases} O(\theta^{-\alpha-1/2}), & \text{en } C/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ O(n^{\alpha+1/2}), & \text{en } 0 \leq \theta \leq C/n, \end{cases}$$

uniformemente en  $\theta \in [0, \pi/2]$  y  $n \in \mathbb{N}$ , siendo  $C$  una constante positiva prefijada cualquiera.

Una serie de estimaciones que nos resultarán útiles sin tanta precisión como las tenemos hasta ahora y que son inmediatas de deducir a partir de lo que ya

conocemos son las siguientes:

$$(4.29) \quad \left(h_n^{\alpha,\beta,M,N}\right)^{-1/2} \sim \begin{cases} n^{1/2}, & \text{si } N = M = 0, \\ n^{-3/2-2\alpha}, & \text{si } N > M = 0, \\ n^{-3/2-2\beta}, & \text{si } M > N = 0, \\ n^{-7/2-2\alpha-2\beta}, & \text{si } N, M = 0, \end{cases}$$

$$(4.30) \quad A_n \sim \begin{cases} n^{-2\beta}, & \text{si } M = 0, \\ n^2, & \text{si } M > 0, \end{cases} \quad B_n \sim \begin{cases} n^{-2\alpha}, & \text{si } N = 0, \\ n^2, & \text{si } N > 0, \end{cases}$$

$$(4.31) \quad \frac{(a+1)_n}{n!} \sim n^a, \quad \frac{(a+1)_n}{(b+1)_n} \sim n^{a-b}, \quad \left(\frac{(\alpha+\beta+1)_n}{n!}\right)^2 \sim n^{2\alpha+2\beta},$$

$$(4.32) \quad \left(h_n^{\alpha,\beta,M,N}\right)^{-1/2} \left(\frac{(\alpha+\beta+1)_n}{n!}\right)^2 A_n \sim \begin{cases} n^{1/2+2\alpha}, & \text{si } N = 0, \\ n^{-3/2}, & \text{si } N > 0, \end{cases}$$

$$(4.33) \quad \left(h_n^{\alpha,\beta,M,N}\right)^{-1/2} \left(\frac{(\alpha+\beta+1)_n}{n!}\right)^2 B_n \sim \begin{cases} n^{1/2+2\beta}, & \text{si } M = 0, \\ n^{-3/2}, & \text{si } M > 0. \end{cases}$$

Por otra parte, para poder manejar adecuadamente algunas expresiones que aparecen en forma de sumandos también necesitaremos algunas estimaciones mucho más fuertes:

En primer lugar, es claro

$$\frac{n+a}{n+b} = 1 + \frac{a-b}{n+b} = 1 + \frac{a-b}{n} + \left(\frac{a-b}{n+b} - \frac{a-b}{n}\right) = 1 + \frac{a-b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

y de aquí

$$(4.34) \quad \frac{(n+a)(n+c)}{(n+b)(n+d)} = 1 + \frac{a+c-b-d}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Emplearemos también la estimación asintótica

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} = n^{a-b} \left(1 + \frac{(a-b)(a+b-1)}{2n} + O(n^{-2})\right)$$

que puede verse en Erdélyi y otros [1, Vol. I, pág. 47]. Con ella, es fácil llegar a

$$(4.35) \quad \frac{(\beta+1)_n n!}{(\alpha+1)_n (\alpha+\beta+1)_n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)} n^{-2\alpha} \left(1 - \frac{\alpha(\alpha+\beta+1)}{n} + O(n^{-2})\right).$$

Además, para descargar la demostración del teorema, establezcamos previamente la siguiente descomposición:

**Lema 4.7**

$$\begin{aligned} B_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - N \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2(\alpha + \beta + 1)} (1 + x) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) \\ = \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2n + \alpha + \beta + 1} P_n^{(\alpha+1, \beta)}(x) I_n - \frac{n + \beta}{2n + \alpha + \beta + 1} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta)}(x) L_n, \end{aligned}$$

donde

$$I_n = \frac{(\beta + 1)_n n!}{(\alpha + 1)_n (\alpha + \beta + 1)_n} + N \frac{n(n + \beta)}{(\alpha + 1)(\alpha + \beta + 1)}$$

y

$$L_n = \frac{(\beta + 1)_n n!}{(\alpha + 1)_n (\alpha + \beta + 1)_n} + N \frac{(n + \alpha + 1)(n + \alpha + \beta + 1)}{(\alpha + 1)(\alpha + \beta + 1)}.$$

Demostración:

Por (1.37) y (1.38) tenemos

$$(1 + x) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) = \frac{2(n + \beta)}{2n + \alpha + \beta + 1} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta)}(x) + \frac{2n}{2n + \alpha + \beta + 1} P_n^{(\alpha+1, \beta)}(x)$$

y

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2n + \alpha + \beta + 1} P_n^{(\alpha+1, \beta)}(x) - \frac{n + \beta}{2n + \alpha + \beta + 1} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta)}(x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} B_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - N \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2(\alpha + \beta + 1)} (1 + x) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) \\ = B_n \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2n + \alpha + \beta + 1} P_n^{(\alpha+1, \beta)}(x) - B_n \frac{n + \beta}{2n + \alpha + \beta + 1} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta)}(x) \\ - N \frac{n + \alpha + \beta + 1}{\alpha + \beta + 1} \frac{n + \beta}{2n + \alpha + \beta + 1} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta)}(x) \\ - N \frac{n + \alpha + \beta + 1}{\alpha + \beta + 1} \frac{n}{2n + \alpha + \beta + 1} P_n^{(\alpha+1, \beta)}(x). \end{aligned}$$

Entonces, sacando factor común  $P_n^{(\alpha+1, \beta)}(x)$  y  $P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta)}(x)$  y sustituyendo  $B_n$  por su valor se sigue el lema.

Finalmente, obtenemos para los polinomios  $P_n^{\alpha, \beta, M, N}(x)$  la cota que buscábamos:

**Teorema 4.8**

Sean  $\alpha, \beta > -1$ ,  $M, N \geq 0$ . Existe una constante  $C$  tal que  $\forall x \in [-1, 1]$  y  $\forall n \in \mathbb{N}$  se cumple

$$\left(h_n^{\alpha, \beta, M, N}\right)^{-1/2} |P_n^{\alpha, \beta, M, N}(x)| \leq C \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-1/4} \left(1 + x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\beta/2-1/4}.$$

Demostración:

Ya hemos visto que basta que nos restrinjamos a  $x \in [0, 1]$  y con el cambio de variable  $x = \cos \theta$ ,  $\theta \in [0, \pi/2]$ , demostrar (4.28).

Multipliquemos la expresión (4.8) por  $\left(h_n^{\alpha, \beta, M, N}\right)^{-1/2}$  y comencemos por estimar el primero de los tres sumandos que aparecen. Si  $M = 0$  no hay que hacer nada pues se anula. Supongamos pues  $M > 0$ .

Utilizando que  $1 - x = 1 - \cos \theta = 2 \operatorname{sen}^2(\theta/2) \sim \theta^2$ , la conocida estimación para Jacobi (ver (1.40))

$$n^{1/2} |P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\cos \theta)| = \begin{cases} O(\theta^{-\alpha-3/2}), & C/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ O(n^{\alpha+3/2}), & 0 \leq \theta \leq C/n, \end{cases}$$

y (4.33) obtenemos

$$\begin{aligned} & \left(h_n^{\alpha, \beta, M, N}\right)^{-1/2} \left(\frac{(\alpha + \beta + 1)_n}{n!}\right)^2 \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2(\alpha + \beta + 1)} B_n M \left(2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)\right) \\ & \times |P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\cos \theta)| = n^{-1} O(\theta^2) \begin{cases} O(\theta^{-\alpha-3/2}), & C/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ O(n^{\alpha+3/2}), & 0 \leq \theta \leq C/n, \end{cases} \\ & = \begin{cases} O(\theta^{-\alpha+3/2}), & C/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ O(n^{\alpha-3/2}), & 0 \leq \theta \leq C/n \end{cases} \end{aligned}$$

(en la última igualdad se utiliza que  $n^{-1} = O(\theta)$  en  $C/n \leq \theta \leq \pi/2$  y que  $\theta^2 = O(n^{-2})$  en  $0 \leq \theta \leq C/n$ ), que es incluso más pequeña de la que buscábamos en (4.28).

Por tanto, hemos reducido el problema a encontrar una estimación como la de (4.28) para la expresión

$$\begin{aligned} & \left(h_n^{\alpha, \beta, M, N}\right)^{-1/2} \left(\frac{(\alpha + \beta + 1)_n}{n!}\right)^2 A_n \\ & \times \left( B_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - N \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2(\alpha + \beta + 1)} (1 + x) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) \right). \end{aligned}$$

Si  $N = 0$  el problema es trivial pues el segundo sumando se anula y basta aplicar (4.32), (4.30) y las estimaciones de  $n^{1/2}|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|$  que aparecen en (1.40).

Asumamos pues a partir de ahora en toda la demostración  $N > 0$ . Como veremos en su transcurso, no hará falta para nada distinguir los casos  $M > 0$  y  $M = 0$ .

Si nos servimos del lema anterior y de (3.32), el teorema estará probado en cuanto demostremos

$$(4.36) \quad \left| \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2n + \alpha + \beta + 1} P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos \theta) I_n - \frac{n + \beta}{2n + \alpha + \beta + 1} P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta)}(\cos \theta) L_n \right| \\ = n^{3/2} \begin{cases} O(\theta^{-\alpha-1/2}), & C/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ O(n^{\alpha+1/2}), & 0 \leq \theta \leq C/n. \end{cases}$$

Emplearemos ahora la fórmula de tipo Hilb (ver Teorema 1.11)

$$\left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha+1} \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^{\beta} P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos \theta) \\ = D_n^{-\alpha-1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 2)}{n!} \left( \frac{\theta}{\sin \theta} \right)^{1/2} J_{\alpha+1}(D_n \theta) \\ + \begin{cases} \theta^{1/2} O(n^{-3/2}), & \text{si } C/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ \theta^{\alpha+3} O(n^{\alpha+1}), & \text{si } 0 \leq \theta \leq C/n, \end{cases}$$

donde  $D_n = n + (\alpha + \beta + 2)/2$  y  $J_{\alpha+1}(z)$  es la función de Bessel de orden  $\alpha + 1$ . Si sustituimos en (4.36) y sacamos factor común

$$\frac{(\sin(\theta/2))^{-\alpha-1} (\cos(\theta/2))^{-\beta} (\theta/\sin \theta)^{1/2}}{2n + \alpha + \beta + 1} \sim \frac{\theta^{-\alpha-1}}{n} \quad \text{y} \quad \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{(n-1)!} \sim n^{\alpha+1},$$

para llegar a (4.36) es suficiente con que probemos

$$\left| \frac{(n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + 1)}{n} D_n^{-\alpha-1} I_n J_{\alpha+1}(D_n \theta) \right. \\ \left. - (n + \beta)(D_n - 1)^{-\alpha-1} L_n J_{\alpha+1}((D_n - 1)\theta) \right| \\ = n^{3/2-\alpha} \theta^{\alpha+1} \begin{cases} O(\theta^{-\alpha-1/2}), & C/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ O(n^{\alpha+1/2}), & 0 \leq \theta \leq C/n. \end{cases}$$

A continuación, saquemos factor común  $D_n^{-2\alpha-2}$ , restemos y sumemos

$$\frac{(n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + 1)}{n} (D_n - 1)^{\alpha+1} I_n J_{\alpha+1}((D_n - 1)\theta)$$

y apliquemos la desigualdad triangular. Así, sólo tenemos que demostrar que las dos expresiones

$$(4.37) \quad D_n^{-2\alpha-2} \frac{(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)}{n} I_n \left| D_n^{\alpha+1} J_{\alpha+1}(D_n\theta) - (D_n-1)^{\alpha+1} J_{\alpha+1}((D_n-1)\theta) \right|$$

y

$$(4.38) \quad D_n^{-2\alpha-2} \left| \frac{(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)}{n} (D_n-1)^{\alpha+1} I_n - (n+\beta) \frac{D_n^{2\alpha+2}}{(D_n-1)^{\alpha+1}} L_n \right| \left| J_{\alpha+1}((D_n-1)\theta) \right|$$

son ambas

$$n^{3/2-\alpha}\theta^{\alpha+1} \begin{cases} O(\theta^{-\alpha-1/2}), & C/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ O(n^{\alpha+1/2}), & 0 \leq \theta \leq C/n. \end{cases}$$

Abordemos en primer lugar (4.37).

El coeficiente que multiplica al módulo es de tamaño  $\sim n^{-2\alpha+1}$ , luego, multiplicando por  $\theta^{\alpha+1}$ , hay que demostrar

$$(4.39) \quad \left| (D_n\theta)^{\alpha+1} J_{\alpha+1}(D_n\theta) - ((D_n-1)\theta)^{\alpha+1} J_{\alpha+1}((D_n-1)\theta) \right| = n^{\alpha+1/2}\theta^{2\alpha+2} \begin{cases} O(\theta^{-\alpha-1/2}), & C/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ O(n^{\alpha+1/2}), & 0 \leq \theta \leq C/n. \end{cases}$$

Pero es inmediato comprobar a partir de la definición de la función de Bessel mediante series que  $(z^{\alpha+1} J_{\alpha+1}(z))' = z^{\alpha+1} J_{\alpha}(z)$ , y por tanto, aplicando el teorema del valor medio,

$$\left| (D_n\theta)^{\alpha+1} J_{\alpha+1}(D_n\theta) - ((D_n-1)\theta)^{\alpha+1} J_{\alpha+1}((D_n-1)\theta) \right| = \left| (D'_n\theta)^{\alpha+1} J_{\alpha}(D'_n\theta) \right| \theta$$

para algún  $D'_n \in (D_n-1, D_n)$ . Entonces, sin más que utilizar las conocidas estimaciones

$$J_{\alpha}(z) = O(z^{\alpha}), \quad z \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad J_{\alpha}(z) = z^{-1/2}, \quad z \rightarrow \infty$$

(ver (1.39)) se sigue fácilmente (4.39).

Para concluir el teorema ya sólo nos queda por acotar (4.38).



Utilizando

$$\begin{aligned}
 J_{\alpha+1}((D_n - 1)\theta) &= \begin{cases} O(n^{-1/2}\theta^{-1/2}), & C/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ O(n^{\alpha+1}\theta^{\alpha+1}), & 0 \leq \theta \leq C/n, \end{cases} \\
 &= n^{1/2}\theta^{\alpha+1} \begin{cases} O(n^{-1}\theta^{-\alpha-3/2}), & C/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ O(n^{\alpha+1/2}), & 0 \leq \theta \leq C/n, \end{cases} \\
 &= n^{1/2}\theta^{\alpha+1} \begin{cases} O(\theta^{-\alpha-1/2}), & C/n \leq \theta \leq \pi/2, \\ O(n^{\alpha+1/2}), & 0 \leq \theta \leq C/n, \end{cases}
 \end{aligned}$$

y  $D_n \sim n$ , es inmediato comprobar que basta con que demostremos

$$\left| I_n - \frac{n(n+\beta)}{(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)} \left( \frac{D_n}{D_n-1} \right)^{2\alpha+2} L_n \right| = O(n).$$

Por el desarrollo en serie de  $(1+x)^a$ , es claro que

$$\begin{aligned}
 (4.40) \quad \left( \frac{D_n}{D_n-1} \right)^{2\alpha+2} &= \left( 1 + \frac{2}{2n+\alpha+\beta} \right)^{2\alpha+2} \\
 &= 1 + \frac{2(2\alpha+2)}{2n+\alpha+\beta} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{2\alpha+2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
 \end{aligned}$$

Además, por (4.34), se tiene

$$(4.41) \quad \frac{n(n+\beta)}{(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)} = 1 - \frac{2\alpha+2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Entonces, sustituyendo  $I_n$  y  $L_n$  por su valor y empleando (4.35), (4.40) y (4.41) obtenemos

$$\begin{aligned}
 &\left| I_n - \frac{n(n+\beta)}{(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)} \left( \frac{D_n}{D_n-1} \right)^{2\alpha+2} L_n \right| \\
 &= \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)} n^{-2\alpha} \left( 1 - \frac{\alpha(\alpha+\beta+1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right. \\
 &\quad + \frac{Nn^2}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)} + \frac{N\beta n}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)} \\
 &\quad \left. - \left( 1 - \frac{2\alpha+2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left( 1 + \frac{2\alpha+2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right| \\
 &\times \left[ \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)} n^{-2\alpha} \left( 1 - \frac{\alpha(\alpha+\beta+1)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{Nn^2}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)} + \frac{N(2\alpha+\beta+2)n}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)} + N \right| \\
&= \left| \frac{N\beta n}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)} - \frac{N(2\alpha+\beta+2)n}{(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)} + O(1) \right| = O(n),
\end{aligned}$$

como queríamos comprobar.

A partir de ahora vamos a dedicarnos a estudiar la convergencia en media de la serie de Fourier. Como ya sólo vamos a emplear polinomios normalizados denotaremos simplemente  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  a los polinomios ortonormales respecto a  $d\mu$  y  $\{q_n(x)\}_{n=0}^\infty$  a los ortonormales respecto a  $e_0(1-x^2)d\mu$ , donde la constante

$$e_0 = \frac{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)}{4(\alpha+1)(\beta+1)}$$

sirve únicamente para ajustar el coeficiente que aparece en (4.1). Notar que, como  $(1-x^2)$  se anula en 1 y  $-1$ , la medida  $e_0(1-x^2)d\mu$  ya no tiene deltas de Dirac. Entonces,

$$p_n(x) = \left(h_n^{\alpha,\beta,M,N}\right)^{-1/2} P_n^{\alpha,\beta,M,N}(x)$$

y

$$q_n(x) = \left(h_n^{\alpha+1,\beta+1,0,0}\right)^{-1/2} P_n^{\alpha+1,\beta+1,0,0}(x)$$

y, según hemos visto en el Teorema 4.8, se tiene

$$(4.42) \quad |p_n(x)| \leq C \left(1-x+\frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-1/4} \left(1+x+\frac{1}{n^2}\right)^{-\beta/2-1/4}$$

y

$$(4.43) \quad |q_n(x)| \leq C \left(1-x+\frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-3/4} \left(1+x+\frac{1}{n^2}\right)^{-\beta/2-3/4}$$

para alguna  $C$  independiente de  $x \in [-1, 1]$ . Además,  $-\alpha/2 - 3/4 < 0$  luego  $(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-3/4} \leq (1/n^2)^{-\alpha/2-3/4} \leq n^{\alpha+3/2}$  (y análogamente ocurre con  $-\beta/2 - 3/4$ ). Por lo tanto, de (4.43) se sigue que

$$(4.44) \quad |q_n(x)| \leq Cn^{\alpha+3/2}, \quad x \in [0, 1], \quad |q_n(x)| \leq Cn^{\beta+3/2}, \quad x \in [-1, 0].$$

Por otra parte, el Corolario 4.5 garantiza

$$(4.45) \quad p_n(1) \sim n^{\alpha+1/2} \text{ si } N = 0, \quad p_n(1) \sim n^{-\alpha-3/2} \text{ si } N > 0,$$

$$(4.46) \quad (-1)^n p_n(-1) \sim n^{\beta+1/2} \text{ si } M = 0, \quad (-1)^n p_n(-1) \sim n^{-\beta-3/2} \text{ si } M > 0,$$

$$(4.47) \quad q_n(1) \sim n^{\alpha+3/2}, \quad (-1)^n q_n(-1) \sim n^{\beta+3/2}.$$

Llamaremos  $U(x)$  y  $V(x)$  a los pesos en  $[-1, 1]$  definidos como indicamos a continuación:

$$(4.48) \quad U(x) = \begin{cases} (1-x)^a(1+x)^b U_1(x), & x \neq \pm 1, \\ N_1, & x = 1, \\ M_1, & x = -1, \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} (1-x)^A(1+x)^B V_1(x), & x \neq \pm 1, \\ N_2, & x = 1, \\ M_2, & x = -1, \end{cases}$$

con  $U_1(x) \sim V_1(x) \sim \text{cte.}$  en  $(-1, -1 + \varepsilon)$  y en  $(1 - \varepsilon, 1)$ .

Entonces, dado  $1 < p < \infty$ , vamos a dedicarnos a analizar la acotación uniforme de los operadores

$$S_n : L^p([-1, 1], V(x)^p d\mu) \longrightarrow L^p([-1, 1], U(x)^p d\mu)$$

$$f \longmapsto S_n f.$$

En primer lugar, estudiemos las condiciones necesarias. Para ello nos apoyaremos el Teorema 3.4. Veamos lo que ocurre:

**Teorema 4.9**

Sean  $d\mu$ ,  $U$  y  $V$  como hasta ahora y  $1 < p < \infty$ . Para que se verifique la acotación uniforme

$$\|S_n(f, x)U(x)\|_{p, d\mu} \leq C \|f(x)V(x)\|_{p, d\mu}$$

es necesario que

$$(4.49) \quad \left| \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) (\alpha + 1) + \frac{a + A}{2} \right| < \frac{a - A}{2} + \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\alpha + 1}{2} \right\},$$

$$(4.50) \quad \left| \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) (\beta + 1) + \frac{b + B}{2} \right| < \frac{b - B}{2} + \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\beta + 1}{2} \right\},$$

$$(4.51) \quad N \left( N_1 + \frac{1}{N_2} \right) + M \left( M_1 + \frac{1}{M_2} \right) < \infty \quad (\text{con el convenio } 0 \cdot \infty = 0)$$

y

$$(4.52) \quad \int_{-1}^1 U_1(x)^p dx < \infty, \quad \int_{-1}^1 V_1(x)^{-q} dx < \infty.$$

Demostración:

Las cuatro condiciones necesarias del Teorema 3.4 se traducen respectivamente en

$$\int_{-1}^1 U_1(x)^p (1-x)^{ap+\alpha} (1+x)^{bp+\beta} dx + M_1^p M + N_1^p N < \infty,$$

$$\int_{-1}^1 V_1(x)^{-q} (1-x)^{-aq+\alpha} (1+x)^{-bq+\beta} dx + M_2^{-q} M + N_2^{-q} N < \infty,$$

$$\int_{-1}^1 U_1(x)^p (1-x)^{-p/4+ap+\alpha(1-p/2)} (1+x)^{-p/4+bp+\beta(1-p/2)} dx < \infty$$

y

$$\int_{-1}^1 V_1(x)^{-q} (1-x)^{-q/4-Aq+\alpha(1-q/2)} (1+x)^{-q/4-Bq+\beta(1-q/2)} dx < \infty.$$

Las condiciones  $M_1^p M < \infty$ ,  $N_1^p N < \infty$ ,  $M_2^{-q} M < \infty$  y  $N_2^{-q} N < \infty$  pueden expresarse todas a la vez mediante (4.51). Por otra parte, utilizando  $U_1(x) \sim V_1(x) \sim \text{cte.}$  en  $(-1, -1 + \varepsilon)$  y en  $(1 - \varepsilon, 1)$  se sigue (4.52). Y por último, para obtener (4.49) y (4.50) basta proceder como en el Corolario 3.13.

A continuación, veamos qué es lo que sucede con las condiciones suficientes:

**Teorema 4.10**

Sean  $d\mu$ ,  $U$  y  $V$  como hasta ahora y  $1 < p < \infty$ . Para que se verifique la acotación uniforme

$$\|S_n(f, x)U(x)\|_{p, d\mu} \leq C \|f(x)V(x)\|_{p, d\mu}$$

es suficiente que se cumpla  $A \leq a$ ,  $B \leq b$ , (4.49), (4.50), (4.51) y

$$(4.53) \quad (U_1(x)^p, V_1(x)^p) \in A_p^\delta(-1, 1)$$

para algún  $\delta > 1$  (basta  $\delta = 1$  si  $U_1 = V_1$ ).

Demostración:

Utilizando las acotaciones (4.42) y (4.43), el Teorema 2.18 y las condiciones  $A_p$  uniformes del Corolario 2.17 se demuestra que  $A \leq a$ ,  $B \leq b$ , (4.49), (4.50) y (4.53) implican que

$$(4.54) \quad \left\{ \left( P_n(x)^p U(x)^p \mu'(x), Q_n(x)^{-p} (1-x^2)^{-p} V(x)^p \mu'(x)^{1-p} \right) \right\} \in A_p^\delta(-1, 1)$$

y

$$(4.55) \quad \left\{ \left( Q_n(x)^p (1-x^2)^p U(x)^p \mu'(x), P_n(x)^{-p} V(x)^p \mu'(x)^{1-p} \right) \right\} \in A_p^\delta(-1, 1)$$

para algún  $\delta > 1$ , ambos uniformemente, y donde por simplicidad hemos denotado

$$P_n(x) = (1 - x + n^{-2})^{-\alpha/2-1/4}(1 - x + n^{-2})^{-\beta/2-1/4}$$

y

$$Q_n(x) = (1 - x + n^{-2})^{-\alpha/2-3/4}(1 - x + n^{-2})^{-\beta/2-3/4}$$

(la demostración es como la del Corolario 3.10; notar que no es necesario distinguir entre  $n$  y  $n + 1$  ya que  $1/n \sim 1/(n + 1)$ ). En particular, utilizando el Teorema 3.3, las dos condiciones  $A_p$  (4.54) y (4.55) aseguran que los cuatro factores implicados en ellas son integrables uniformemente sobre el intervalo  $(-1, 1)$ .

Si denotamos  $K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n p_k(x)p_k(y)$ , tendremos

$$\begin{aligned} \|S_n(f, x)U(x)\|_{p,d\mu}^p &= \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 K_n(x, y) f(y) d\mu(y) \right|^p U(x)^p d\mu(x) \\ (4.56) \quad &= \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 K_n(x, y) f(y) d\mu(y) \right|^p U(x)^p \mu'(x) dx \\ &+ MM_1^p \left| \int_{-1}^1 K_n(-1, y) f(y) d\mu(y) \right|^p + NN_1^p \left| \int_{-1}^1 K_n(1, y) f(y) d\mu(y) \right|^p \end{aligned}$$

y basta ver que los tres sumandos son

$$\leq C \|f(x)V(x)\|_{p,d\mu}^p = \int_{-1}^1 |f(x)V(x)|^p \mu'(x) dx + MM_2^p |f(-1)|^p + NN_2^p |f(1)|^p.$$

Comencemos por el tercero. Si  $N = 0$  se anula, así que supongamos  $N > 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 K_n(1, y) f(y) d\mu(y) \right| &\leq \left| \int_{-1}^1 K_n(1, y) f(y) d\mu(y) \right| \\ &+ M |K_n(1, -1) f(-1)| + N |K_n(1, 1) f(1)| \end{aligned}$$

y de nuevo aparecen tres sumandos. Para el tercero se tiene

$$K_n(1, 1) = \sum_{k=0}^n p_k(1)^2 < C,$$

pues vimos en la Observación 4.6 que si  $N > 0$  entonces  $\{p_k(1)\}_{k=0}^\infty \in \ell^2$ .

Para el segundo, si  $M = 0$  no hay nada que probar, y si  $M > 0$  podemos aplicar la desigualdad de Schwarz, con lo cual

$$|K_n(1, -1)| = \left| \sum_{k=0}^n p_k(1)p_k(-1) \right| \leq \left( \sum_{k=0}^n p_k(1)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=0}^n p_k(-1)^2 \right)^{1/2} < C$$

pues, de nuevo por la Observación 4.6,  $\{p_k(1)\}_{k=0}^\infty \in \ell^2$  y  $\{p_k(-1)\}_{k=0}^\infty \in \ell^2$ .

Para el primero utilicemos la descomposición del Lema 3.1. Así,

$$(4.57) \quad \int_{-1}^1 K_n(1, y) f(y) \mu'(y) dy = \alpha_n p_{n+1}(1) \int_{-1}^1 \frac{(1-y^2)q_n(y)}{1-y} f(y) \mu'(y) dy \\ - \alpha_n \cdot 0 + \beta_n p_{n+1}(1) \int_{-1}^1 p_{n+1}(y) f(y) \mu'(y) dy$$

con  $\{\alpha_n\}$  y  $\{\beta_n\}$  sucesiones acotadas. El último sumando, por ser  $\{p_n(1)\}$  convergente, y utilizando la desigualdad de Hölder, podemos acotarlo, salvo constante, por

$$\left( \int_{-1}^1 |p_{n+1}(y)|^q V(y)^{-q} \mu'(y) dy \right)^{1/q} \left( \int_{-1}^1 |f(y)|^p V(y)^p \mu'(y) dy \right)^{1/p}.$$

Y esto es  $\leq C \|fV\|_{p, d\mu}$  sin más que observar que (4.55) garantiza la acotación del primer factor.

En el primer sumando de (4.57) simplificamos  $(1-y)$  y descomponemos el intervalo de integración en  $(-1, 0)$  y  $(0, 1)$ . En  $(0, 1)$  basta que apliquemos (4.44) y (4.45), con lo cual  $|p_{n+1}(1)q_n(y)| \leq C$ ,  $y \in (0, 1)$ , y usando la desigualdad de Hölder como antes se ve que (4.55) con  $n$  fijo implica la acotación deseada.

Y en  $(-1, 0)$  se tiene

$$(4.58) \quad \int_{-1}^0 |(1+y)q_n(y)f(y)| \mu'(y) dy \\ \leq \left( \int_{-1}^0 |(1+y)q_n(y)|^q V(y)^{-q} \mu'(y) dy \right)^{1/q} \left( \int_{-1}^0 |f(y)|^p V(y)^p \mu'(y) dy \right)^{1/p},$$

y el primer factor es acotado por (4.55) (observar que la cota de  $|(1+y)q_n(y)|$  en  $(-1, 0)$  según (4.43) es menor que la de  $|p_n(y)|$  según (4.42)).

Así, queda concluido el estudio del tercer sumando de (4.56). El del segundo sumando es análogo, luego vamos ahora a dedicarnos únicamente al primero.

Hagamos la descomposición del Lema 3.1, con lo cual, y siguiendo la misma notación que allí, bastará con que probemos

$$\int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 T_i(n, x, y) f(y) d\mu(y) \right|^p U(x)^p \mu'(x) dx \\ \leq C \int_{-1}^1 |f(x)V(x)|^p d\mu(x), \quad i = 1, 2, 3.$$

$i = 1$ : Como  $(1-y^2)$  se anula en 1 y  $-1$  se tiene

$$\int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 \frac{(1-y^2)q_n(y)}{x-y} f(y) d\mu(y) \right|^p |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \\ = \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 \frac{(1-y^2)q_n(y)}{x-y} f(y) \mu'(y) dy + 0 + 0 \right|^p |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx$$

y para ver que esto es  $\leq C\|f(x)V(x)\|_{p,d\mu}^p$  basta aplicar (4.54).

$i = 2$ : En este caso,

$$\begin{aligned}
 & \left( \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 \frac{p_{n+1}(y)}{x-y} f(y) d\mu(y) \right|^p |(1-x^2)q_n(x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \right)^{1/p} \\
 &= \left( \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 \frac{p_{n+1}(y)}{x-y} f(y) \mu'(y) dy + \frac{Mp_{n+1}(-1)f(-1)}{x+1} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{Np_{n+1}(1)f(1)}{x-1} \right|^p |(1-x^2)q_n(x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \right)^{1/p} \\
 &\leq \left( \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 \frac{p_{n+1}(y)}{x-y} f(y) \mu'(y) dy \right|^p |(1-x^2)q_n(x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \right)^{1/p} \\
 & \quad + M \left( \int_{-1}^1 |p_{n+1}(-1)f(-1)q_n(x)(1-x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \right)^{1/p} \\
 & \quad + N \left( \int_{-1}^1 |p_{n+1}(1)f(1)q_n(x)(1+x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \right)^{1/p}
 \end{aligned}$$

y de nuevo hay que analizar tres sumandos.

Para demostrar la acotación del primero de los tres basta con que utilicemos (4.55).

Vamos con el segundo (el tercero es similar). Si  $M = 0$  no hay nada que probar pues se anula. Supongamos entonces  $M > 0$ . Descomponiendo el intervalo de integración en dos trozos  $(-1, 0)$  y  $(0, 1)$  y aplicando (4.47) en  $-1$  y (4.44) en  $(-1, 0)$  obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 |p_{n+1}(-1)f(-1)q_n(x)(1-x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \\
 & \leq C|f(-1)|^p \left[ \left( \int_{-1}^0 (1-x)^p U(x)^p \mu'(x) dx \right) \right. \\
 & \quad \left. + n^{-\beta-3/2} \left( \int_0^1 |q_n(x)(1-x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \right) \right] \\
 & \leq C_1|f(-1)|^p \left( \int_{-1}^0 U(x)^p \mu'(x) dx \right) \\
 & \quad + C_1|f(-1)|^p \left( \int_0^1 |q_n(x)(1-x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \right).
 \end{aligned}$$

La primera de las dos integrales que aparecen es finita claramente por (4.54) con  $n$  fijo. Y la segunda es acotada también por (4.54) pues la cota de  $|q_n(x)(1-x)|$  en  $(0, 1)$  es menor que la de  $|p_n(x)|$ . Por tanto, queda probada la acotación correspondiente a  $i = 2$ .

$i = 3$ : Ahora se tiene

$$\begin{aligned} & \left( \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 p_{n+1}(y) f(y) d\mu(y) \right|^p |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \right)^{1/p} \\ & \leq \left( \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 p_{n+1}(y) f(y) \mu'(y) dy \right|^p |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \right)^{1/p} \\ & \quad + M |p_{n+1}(-1) f(-1)| \left( \int_{-1}^1 |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \right)^{1/p} \\ & \quad + N |p_{n+1}(1) f(1)| \left( \int_{-1}^1 |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p \mu'(x) dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

En el primer sumando de los que aparecen podemos separar las integrales y aplicar la desigualdad de Hölder, con lo cual se acota por

$$\begin{aligned} & \left( \int_{-1}^1 |p_{n+1}(y)|^p U(y)^p \mu'(y) dy \right)^{1/q} \\ & \quad \times \left( \int_{-1}^1 |p_{n+1}(y)|^q V(y)^{-q} \mu'(y) dy \right)^{1/q} \left( \int_{-1}^1 |f(y)|^p V(y)^p \mu'(y) dy \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

y los dos primeros factores son acotados por (4.54) y (4.55).

Además, el primero de los tres factores es precisamente el mismo que aparece en el segundo y tercer sumando de la descomposición de  $i = 3$ . Por tanto, basta con utilizar que  $p_{n+1}(-1)$  es acotado cuando  $M > 0$  y que  $p_{n+1}(1)$  lo cuando  $N > 0$  para que quede concluido el caso  $i = 3$  y, por tanto, el teorema.

#### Observación 4.11

Si tomamos  $U(x) = V(x) = 1$ , es decir, si únicamente nos interesa la convergencia de  $S_n f$  a  $f$  en  $L^p(d\mu)$  para cada  $f \in L^p(d\mu)$ ,  $1 < p < \infty$ , lo que obtenemos, sin más que utilizar los dos teoremas anteriores, es que

$$\|S_n(f, x)\|_{p, d\mu} \leq C \|f(x)\|_{p, d\mu}$$

si y sólo si

$$\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| < \min \left\{ \frac{1}{4\alpha + 4}, \frac{1}{4\beta + 4} \right\}.$$

Pero en este caso la demostración se puede simplificar algo como vemos a continuación. Por dualidad (ver (1.2) y (1.3)), podemos restringirnos a estudiar  $p \geq 2$ . Además, si denotamos  $c_k(f)$  a los coeficientes de Fourier de  $f \in L^p(d\mu) \subset L^2(d\mu)$  se tiene

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)^2 \right)^{1/2} \leq \|f(x)\|_{2, d\mu} \leq C \|f(x)\|_{p, d\mu}.$$



Así, para probar la acotación del tercer sumando de (4.56) (y análogamente del segundo), cuando  $N > 0$  (recordar que entonces  $\{p_n(1)\} \in \ell^2$ ), podríamos haber hecho

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 K_n(1, y) f(y) d\mu(y) \right| &= \left| \sum_{k=0}^n p_k(1) \int_{-1}^1 p_k(y) f(y) d\mu(y) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n p_k(1) c_k(f) \right| \leq \left( \sum_{k=0}^n p_k(1)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=0}^n c_k(f)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \|f(x)\|_{2, d\mu} \leq C_1 \|f(x)\|_{p, d\mu}, \end{aligned}$$

demostración mucho más corta que la realizada en el teorema anterior.

**Corolario 4.12**

Sean  $1 < p < \infty$  y los pesos  $U(x)$  y  $V(x)$  como en (4.48) pero con  $U_1(x) = V_1(x) = 1$ ,  $A \leq a$  y  $B \leq b$ . Entonces, es equivalente que se verifique la acotación uniforme

$$\|S_n(f, x)U(x)\|_{p, d\mu} \leq C \|f(x)V(x)\|_{p, d\mu}$$

a que se satisfagan las desigualdades (4.49), (4.50) y (4.51).

Demostración:

Basta combinar los Teoremas 4.9 y 4.10.

**PARTE 2.<sup>a</sup>: Caso**  $(1 - x^2)^\alpha |x|^\gamma + M\delta_0(x) + \frac{N}{2} \delta_{-1}(x) + \frac{N}{2} \delta_1(x)$

Hasta ahora, hemos estudiado la convergencia de las series de Fourier de un sistema de polinomios ortogonales respecto a una medida en  $[-1, 1]$  cuya parte singular se encuentra en los extremos del intervalo. Esta característica no es fundamental, sino que lo importante es conocer acotaciones de los polinomios y su tamaño en los puntos con masa no nula. En efecto; de aquí hasta el final del capítulo vamos a dedicarnos a estudiar la convergencia de otro sistema de polinomios ortonormales en  $[-1, 1]$  respecto a una medida cuyas deltas de deltas de Dirac no sólo están en los extremos sino también en el punto medio del intervalo. Y lo haremos de tal forma que los polinomios que así aparecen se puedan relacionar con los que hemos estudiado hasta ahora, para poder aprovecharnos de las estimaciones que ya conocemos.

Sea la medida

$$(4.59) \quad d\nu(x) = \Delta |x|^\gamma (1 - x^2)^\alpha dx + M\delta_0(x) + \frac{N}{2} \delta_{-1}(x) + \frac{N}{2} \delta_1(x), \quad x \in [-1, 1],$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta^{-1} &= \int_{-1}^1 |x|^\gamma (1-x^2)^\alpha dx = B\left(\frac{\gamma+1}{2}, \alpha+1\right) \\ &= \frac{\Gamma((\gamma+1)/2)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma/2+3/2)}, \quad \alpha, \gamma > -1,\end{aligned}$$

y denotemos  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  a los polinomios ortonormales respecto a  $d\nu$ . Para que no haya posibilidad de confusión, a los polinomios ortonormales respecto de  $d\mu$  tal como se toma en (4.1) los llamaremos a partir de ahora  $p_n^{\alpha,\beta,M,N}(x)$ , dejando la notación genérica  $p_n(x)$  únicamente para los definidos a través de la medida (4.59).

Es inmediato comprobar por simetría a partir de (4.59) que si  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  son los polinomios ortonormales respecto a  $d\nu$ , entonces  $\{(-1)^n p_n(-x)\}_{n=0}^\infty$  forman otra familia de polinomios ortonormales con el mismo coeficiente director. Por tanto, por unicidad, deberá ser

$$(-1)^n p_n(-x) = p_n(x).$$

Es decir, los polinomios  $p_n(x)$  son pares o impares según sea  $n$ . Este hecho será de gran importancia en la demostración del siguiente resultado:

### Teorema 4.13

*Se verifica*

$$p_{2k}(x) = p_k^{\alpha,(\gamma-1)/2,M,N}(2x^2-1), \quad p_{2k+1}(x) = e_1^{1/2} x p_k^{\alpha,(\gamma+1)/2,0,N'}(2x^2-1)$$

donde

$$e_1 = \frac{2\alpha + \gamma + 3}{\gamma + 1} \quad y \quad N' = e_1 N.$$

Demostración:

Veamos en primer lugar qué ocurre con los polinomios de grado par. Por definición, es claro,

$$\begin{aligned}\delta_{km} &= \int_{-1}^1 p_{2k}(x)p_{2m}(x) d\nu(x) = 2\Delta \int_0^1 p_{2k}(x)p_{2m}(x)|x|^\gamma(1-x^2)^\alpha dx \\ &\quad + Mp_{2k}(0)p_{2m}(0) + Np_{2k}(1)p_{2m}(1).\end{aligned}$$

Pero  $p_{2k}(x)$  y  $p_{2m}(x)$  son polinomios pares, luego podremos poner  $p_{2k}(x) = r_k(x^2)$  y  $p_{2m}(x) = r_m(x^2)$ , donde  $r_k(y)$  y  $r_m(y)$  son polinomios de grado  $k$  y  $m$  respectivamente. Entonces, si efectuamos el cambio de variable  $y = x^2$ , obtenemos

$$\delta_{km} = \Delta \int_0^1 r_k(y)r_m(y)|y|^{\gamma/2-1/2}(1-y)^\alpha dy + Mr_k(0)r_m(0) + Nr_k(1)r_m(1).$$

Realizando un nuevo cambio de variable  $z = 2y - 1$  queda

$$\delta_{km} = 2^{-\gamma/2-1/2-\alpha} \Delta \int_{-1}^1 r_k \left( \frac{1+z}{2} \right) r_m \left( \frac{1+z}{2} \right) (1+z)^{\gamma/2-1/2} (1-z)^\alpha dz \\ + Mr_k(0)r_m(0) + Nr_k(1)r_m(1),$$

es decir, los polinomios  $\{r_k((1+z)/2)\}_{k=0}^\infty$  son ortonormales respecto a la medida

$$\frac{\Gamma(\alpha + \gamma/2 + 3/2)}{2^{\alpha+\gamma/2+1/2}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma((\gamma + 1)/2)} (1-z)^\alpha (1+z)^{\gamma/2-1/2} dz \\ + M\delta_{-1}(z) + N\delta_1(z), \quad z \in [-1, 1].$$

De aquí, por unicidad,  $r_k((1+z)/2) = p_k^{\alpha,(\gamma-1)/2,M,N}(z)$ , y deshaciendo los cambios de variable se sigue la primera parte del teorema.

Para los polinomios impares procedamos del siguiente modo (notar que se anulan para  $x = 0$  y que toman valores opuestos en  $1$  y  $-1$ ):

$$\delta_{km} = \int_{-1}^1 p_{2k+1}(x)p_{2m+1}(x) d\nu(x) = 2\Delta \int_0^1 p_{2k+1}(x)p_{2m+1}(x)|x|^\gamma(1-x^2)^\alpha dx \\ + M \cdot 0 + Np_{2k+1}(1)p_{2m+1}(1).$$

Tomando ahora  $p_{2k}(x) = xt_k(x^2)$ ,  $p_{2m}(x) = xt_m(x^2)$ , y haciendo el cambio de variable  $y = x^2$  en primer lugar y luego  $z = 2y - 1$  se llega a

$$\delta_{km} = 2^{-\gamma/2-3/2-\alpha} \Delta \int_{-1}^1 t_k \left( \frac{1+z}{2} \right) t_m \left( \frac{1+z}{2} \right) (1+z)^{\gamma/2+1/2} (1-z)^\alpha dz \\ + Nt_k(1)t_m(1).$$

Pero ahora, al contrario de lo que había ocurrido con los polinomios pares, la constante  $2^{-\gamma/2-3/2-\alpha} \Delta$  no es la que tendría que haber aparecido de acuerdo a (4.1), sino que hay que multiplicarla por el  $e_1$  del enunciado. Así, los polinomios  $\{e_1^{-1/2}t_k((1+z)/2)\}_{k=0}^\infty$  son ortonormales respecto de la medida

$$\frac{\Gamma(\alpha + \gamma/2 + 5/2)}{2^{\alpha+\gamma/2+3/2}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\gamma/2 + 3/2)} (1-z)^\alpha (1+z)^{\gamma/2+1/2} dz + e_1 N\delta_1(z), \quad z \in [-1, 1].$$

Aplicando de nuevo unicidad y deshaciendo los cambios de variable se obtiene la segunda parte del teorema.

Notar que en el teorema anterior no influye para nada que el salto en  $1$  sea  $N$  o  $N'$ , ya que  $e_1 \neq 0$  y lo único que importa es que el salto sea o no nulo; es decir, que exista o no delta de Dirac.

**Corolario 4.14**

Cuando  $n$  es par se verifica

$$(4.60) \quad |p_n(x)| \leq C \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-1/4} \left(1 + x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-1/4} \left(|x| + \frac{1}{n}\right)^{-\gamma/2}$$

y, cuando  $n$  impar,

$$(4.61) \quad |p_n(x)| \leq C \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-1/4} \left(1 + x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-1/4} |x| \left(|x| + \frac{1}{n}\right)^{-\gamma/2-1}.$$

Además,

$$(4.62) \quad p_n(1) = (-1)^n p_n(-1) \sim \begin{cases} n^{\alpha+1/2}, & \text{si } N = 0, \\ n^{-\alpha-3/2}, & \text{si } N > 0, \end{cases} \quad n \text{ par e impar,}$$

$$(4.63) \quad p_n(0) \sim \begin{cases} n^{\gamma/2}, & \text{si } M = 0 \text{ y } n \text{ par,} \\ n^{-\gamma/2-1}, & \text{si } M > 0 \text{ y } n \text{ par,} \end{cases} \quad p_n(0) = 0 \text{ si } n \text{ impar.}$$

En particular,  $\{p_n(1)\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{p_n(-1)\}_{n=0}^{\infty}$  están en  $\ell^2$  si  $N > 0$  y  $\{p_n(0)\}_{n=0}^{\infty}$  lo está cuando  $M > 0$ .

Demostración:

Vamos a ver (4.60). Utilizando el teorema anterior y (4.42) se tiene

$$\begin{aligned} |p_{2k}(x)| &= |p_k^{\alpha,(\gamma-1)/2,M,N}(2x^2 - 1)| \\ &\leq C \left(2 - 2x^2 + \frac{1}{k^2}\right)^{-\alpha/2-1/4} \left(2x^2 + \frac{1}{k^2}\right)^{-\gamma/4} \\ &\leq C_1 \left(1 - x + \frac{1}{(2k)^2}\right)^{-\alpha/2-1/4} \left(1 + x + \frac{1}{(2k)^2}\right)^{-\alpha/2-1/4} \left(|x| + \frac{1}{2k}\right)^{-\gamma/2}. \end{aligned}$$

Análogamente se procede para demostrar (4.61). Por último, para comprobar (4.62) y (4.63) basta utilizar el teorema anterior en combinación con (4.45) y (4.46).

Llamaremos ahora  $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  a los polinomios ortonormales respecto de la medida  $e_2(1 - x^2) d\nu$ , donde la constante  $e_2$  sirve únicamente para que

$$\int_{-1}^1 e_2(1 - x^2) \nu'(x) dx = 1$$

(es fácil calcular que  $e_2 = (2\alpha + \gamma + 3)/(2\alpha + 2)$ ). Como  $(1 - x^2)$  se anula en 1 y -1, la nueva medida  $e_2(1 - x^2) d\nu$  tiene como parte singular una única delta de Dirac en 0 de salto  $M' = e_2 M$ .

Entonces,

**Corolario 4.15**

Cuando  $n$  es par se verifica

$$(4.64) \quad |q_n(x)| \leq C \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-3/4} \left(1 + x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-3/4} \left(|x| + \frac{1}{n}\right)^{-\gamma/2},$$

y cuando  $n$  impar,

$$(4.65) \quad |q_n(x)| \leq C \left(1 - x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-3/4} \left(1 + x + \frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2-3/4} |x| \left(|x| + \frac{1}{n}\right)^{-\gamma/2-1}.$$

Además, se cumple que

$$(4.66) \quad |q_n(x)| \leq Cn^{\alpha+3/2} \quad \text{en} \quad 1/2 \leq |x| \leq 1.$$

Y también

$$(4.67) \quad q_n(0) \sim \begin{cases} n^{\gamma/2}, & \text{si } M = 0 \text{ y } n \text{ par,} \\ n^{-\gamma/2-1}, & \text{si } M > 0 \text{ y } n \text{ par,} \end{cases} \quad q_n(0) = 0 \text{ si } n \text{ impar.}$$

En particular,  $\{q_n(0)\}_{n=0}^\infty \in \ell^2$  si  $M > 0$ .

Demostración:

Para demostrar (4.64), (4.65) y (4.67) basta aplicar el corolario anterior pero tomando  $\alpha + 1$  en vez de  $\alpha$  y con  $N = 0$ . Por último, (4.66) se obtiene fácilmente a partir de (4.64) y (4.65).

Llamaremos a partir de ahora  $U(x)$  y  $V(x)$  a los pesos en  $[-1, 1]$  definidos mediante

$$(4.68) \quad U(x) = \begin{cases} (1 - x^2)^a |x|^d, & x \neq 0, \pm 1, \\ N_1, & x = \pm 1, \\ M_1, & x = 0, \end{cases} \quad V(x) = \begin{cases} (1 - x^2)^A |x|^D, & x \neq 0, \pm 1, \\ N_2, & x = \pm 1, \\ M_2, & x = 0. \end{cases}$$

Entonces, dado  $1 < p < \infty$ , en el teorema siguiente analizaremos la acotación uniforme de los operadores

$$S_n : L^p([-1, 1], V(x)^p d\nu) \longrightarrow L^p([-1, 1], U(x)^p d\nu) \\ f \longmapsto S_n f$$

donde  $S_n f$  denota la serie de Fourier respecto de  $d\nu$ .

**Teorema 4.16**

Sea  $d\nu$  como en (4.59),  $U$  y  $V$  como en (4.68) con  $A \leq a$  y  $B \leq b$  y  $1 < p < \infty$ . Entonces, es equivalente que se verifique la acotación uniforme

$$\|S_n(f, x)U(x)\|_{p, d\mu} \leq C\|f(x)V(x)\|_{p, d\mu}$$

a que se satisfagan las desigualdades

$$(4.69) \quad \left| \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) (\alpha + 1) + \frac{a + A}{2} \right| < \frac{a - A}{2} + \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\alpha + 1}{2} \right\},$$

$$(4.70) \quad \left| \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) (\gamma + 1) + \frac{d + D}{2} \right| < \frac{d - D}{2} + \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\gamma + 1}{2} \right\},$$

$$(4.71) \quad N \left( N_1 + \frac{1}{N_2} \right) + M \left( M_1 + \frac{1}{M_2} \right) < \infty \quad (\text{con el convenio } 0 \cdot \infty = 0).$$

Demostración:

Que las condiciones (4.69), (4.70) y (4.71) son necesarias se comprueba a partir del Teorema 3.4 exactamente igual a como hacemos en el Teorema 4.9. Tenemos pues que demostrar que son suficientes.

Fijémonos en primer lugar en las partes absolutamente continuas de las medidas. Cuando se aplica la descomposición del Lema 3.1, para poder garantizar la acotación uniforme de los tres operadores que allí aparecen hay que demostrar que existe  $\delta > 1$  tal que

$$(4.72) \quad \left( |p_{n+1}(x)|^p U(x)^p \nu'(x), |q_n(x)|^{-p} (1 - x^2)^{-1} V(x)^p \nu'(x)^{1-p} \right) \in A_p^\delta(-1, 1)$$

y

$$(4.73) \quad \left( |q_n(x)|^p (1 - x^2)^p U(x)^p \nu'(x), |p_{n+1}(x)|^{-p} V(x)^p \nu'(x)^{1-p} \right) \in A_p^\delta(-1, 1),$$

ambas uniformemente. Entonces, lo primero que tendremos que hacer es demostrar que las acotaciones que hemos encontrado para los polinomios  $p_n(x)$  y  $q_n(x)$  garantizan estas condiciones  $A_p$ . Pero hemos obtenido cotas distintas según sea  $n$  par o impar, por lo tanto tendremos que analizar estos dos casos de modo diferente. Además, el Teorema 2.18 nos permite estudiar las condiciones  $A_p$  por factores. Así, si  $n$  es par, (4.72) se traduce en demostrar

$$(4.74) \quad \left( (1 - x + n^{-2})^{-p(\alpha/2+1/4)} (1 - x)^{ap+\alpha}, \right. \\ \left. (1 - x + n^{-2})^{p(\alpha/2+3/4)} (1 - x)^{-p+Ap+\alpha-\alpha p} \right) \in A_p^\delta(-1, 1),$$

$$(4.75) \quad \left( (1+x+n^{-2})^{-p(\alpha/2+1/4)}(1-x)^{ap+\alpha}, \right. \\ \left. (1+x+n^{-2})^{p(\alpha/2+3/4)}(1+x)^{-p+Ap+\alpha-\alpha p} \right) \in A_p^\delta(-1, 1),$$

$$(4.76) \quad \left( (|x|+n^{-1})^{-p(\gamma/2+1)}|x|^{dp+\gamma+p}, (|x|+n^{-1})^{\gamma p/2}|x|^{Dp+\gamma-\gamma p} \right) \in A_p^\delta(-1, 1).$$

Y cuando  $n$  impar, para demostrar (4.72) aparecen las dos mismas condiciones (4.74) y (4.75) junto con

$$(4.77) \quad \left( (|x|+n^{-1})^{-\gamma p/2}|x|^{dp+\gamma}, (|x|+n^{-1})^{p(\gamma/2+1)}|x|^{Dp+\gamma-\gamma p-p} \right) \in A_p^\delta(-1, 1).$$

En cuanto a (4.73), si  $n$  es par se reduce a

$$(4.78) \quad \left( (1-x+n^{-2})^{-p(\alpha/2+3/4)}(1-x)^{ap+\alpha+p}, \right. \\ \left. (1-x+n^{-2})^{p(\alpha/2+1/4)}(1-x)^{Ap+\alpha-\alpha p} \right) \in A_p^\delta(-1, 1),$$

$$(4.79) \quad \left( (1+x+n^{-2})^{-p(\alpha/2+3/4)}(1+x)^{ap+\alpha+p}, \right. \\ \left. (1+x+n^{-2})^{p(\alpha/2+1/4)}(1+x)^{Ap+\alpha-\alpha p} \right) \in A_p^\delta(-1, 1),$$

$$(4.80) \quad \left( (|x|+n^{-1})^{-p(\gamma/2+1)}|x|^{dp+\gamma+p}, (|x|+n^{-1})^{\gamma p/2}|x|^{Dp+\gamma-\gamma p} \right) \in A_p^\delta(-1, 1).$$

Y cuando  $n$  impar, aparecen (4.78) y (4.79) junto con

$$(4.81) \quad \left( (|x|+n^{-1})^{-p(\gamma/2+1)}|x|^{dp+\gamma+p}, (|x|+n^{-1})^{\gamma p/2}|x|^{Dp+\gamma-\gamma p} \right) \in A_p^\delta(-1, 1).$$

Las condiciones (4.74), (4.75), (4.78) y (4.79) son las mismas que han aparecido sucesivas veces a lo largo de este capítulo y el anterior. Se reducen a (4.69) sin más que utilizar el Corolario 2.17.

Y de forma similar se comprueba que (4.70) implica las dos condiciones  $A_p$  de (4.77) y (4.81).

Con esto, el resto de la demostración del teorema discurre por los mismos cauces que la demostración del Teorema 4.10.

#### Observación 4.17

Si en (4.68) hubiésemos tomado

$$U(x) = \begin{cases} (1-x^2)^a|x|^dU_1(x), & x \neq 0, \pm 1, \\ N_1, & x = \pm 1, \\ M_1, & x = 0, \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} (1-x^2)^A|x|^D V_1(x), & x \neq 0, \pm 1, \\ N_2, & x = \pm 1, \\ M_2, & x = 0. \end{cases}$$

con  $U_1(x) \sim V_1(x) \sim \text{cte.}$  en  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $(-1, -1 + \varepsilon)$  y  $(1 - \varepsilon, 1)$ , análogamente a como se hace en los Teoremas 4.9 y 4.10, para la acotación uniforme de la serie de Fourier hubiera aparecido como condición necesaria

$$\int_{-1}^1 U_1(x)^p dx < \infty, \quad \int_{-1}^1 V_1(x)^{-q} dx < \infty$$

y como condición suficiente

$$(U_1(x)^p, V_1(x)^p) \in A_p^\delta(-1, 1)$$

para algún  $\delta > 1$  (basta  $\delta = 1$  si  $U_1 = V_1$ ).

Tampoco es esencial que los pesos  $U(x)$  y  $V(x)$  sean pares: perfectamente podíamos haber puesto  $(1-x)^a(1+x)^b$  en el lugar de  $(1-x^2)^a$  y  $(1-x)^A(1+x)^B$  en lugar de  $(1-x^2)^A$ . Esto simplemente hubiera añadido al teorema anterior la condición

$$\left| \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) (\alpha + 1) + \frac{b+B}{2} \right| < \frac{b-B}{2} + \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2} \right\}$$

(cambiar en (4.75) y (4.79)  $a$  por  $b$  y  $A$  por  $B$ ). Y si los valores en 1 y  $-1$  ya sea de  $U(x)$  o de  $V(x)$  hubieran sido distintos, nos bastaría con haber modificado ligeramente la condición (4.71).

#### Observación 4.18

Una forma radicalmente distinta de abordar la demostración del Teorema 4.16 hubiera sido proceder como en el Capítulo VI: a partir de las relaciones del Teorema 4.13 se encuentran relaciones entre los núcleos de los diversos sistemas ortonormales implicados, con lo cual posteriormente pueden aprovecharse los Teoremas 4.10 y 4.11 para demostrar el Teorema 4.16.

Sin embargo, hemos preferido seguir este camino porque así se observa cómo las distintas cotas que aparecen para los polinomios pares e impares son útiles a la hora de aplicar la teoría  $A_p$ . Para verlo más sencillo supongamos  $d = D$ . Si únicamente utilizamos las cotas (4.60) y (4.64), que sirven para todo  $n$  ya que son mayores que las correspondientes a los polinomios impares, los pares de pesos que aparecen no sólo no están en  $A_p$  uniformemente sino que ni siquiera están en  $A_p$  para ningún  $n$  salvo cuando  $\gamma \geq 0$ . En efecto, con estas cotas las condiciones (4.76), (4.77), (4.80) y (4.81) hubieran quedado todas ellas de la forma

$$\left( (|x| + n^{-1})^{-\gamma p/2} |x|^{dp+\gamma}, (|x| + n^{-1})^{\gamma p/2} |x|^{dp+\gamma-\gamma p} \right) \in A_p^\delta(-1, 1).$$

Fijado  $n$ , los dos factores  $(|x| + n^{-1})$  se pueden despreciar pues están acotados inferior y superiormente. Y, cuando  $\gamma < 0$ , nunca se verifica

$$(|x|^{dp+\gamma}, |x|^{dp+\gamma-\gamma p}) \in A_p^\delta(-1, 1)$$



ya que una de las condiciones que se tiene que cumplir para ello es  $dp + \gamma - \gamma p \leq dp + \gamma$ , que sólo es cierto cuando  $\gamma \geq 0$ . Pero cuando  $\gamma \geq 0$  se pueden tomar todas las cotas de los polinomios cerca de 0 de la forma  $C|x|^{-\gamma/2}$  y no hace falta introducir los  $(|x| + n^{-1})$ .

Por estos mismos motivos, en todos los resultados del capítulo anterior encaminados a buscar condiciones suficientes para la convergencia en media teníamos que tomar  $\gamma_k \geq 0$ . Notar que cuando  $N = M = 0$ , el Teorema 4.16 no es una simple consecuencia del Corolario 3.11, pues para ello hubiéramos necesitado  $\gamma \geq 0$ .



## CAPÍTULO V

### Series de Fourier de los sistemas de Bessel y Dini

Sea

$$(5.1) \quad J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k! \Gamma(\alpha + k + 1)}$$

la función de Bessel de orden  $\alpha > -1$ . Es bien conocido (ver por ejemplo el tratado de Watson [1]), que  $J_\alpha(x)$  tiene un conjunto numerable de ceros en  $(0, \infty)$ , todos ellos simples y cuyo único punto de acumulación es  $\infty$ . Sean  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  estos ceros ordenados en sentido creciente. Entonces, se cumple

$$\int_0^1 J_\alpha(\alpha_n x) J_\alpha(\alpha_m x) x dx = 0, \quad n \neq m,$$

y

$$\int_0^1 J_\alpha(\alpha_n x)^2 x dx = J_{\alpha+1}(\alpha_n)^2 / 2 > 0,$$

luego  $\{J_\alpha(\alpha_n x)\}_{n=1}^{\infty}$  forma un sistema ortogonal en  $L^2((0, 1), x dx)$ . Se demuestra además que este sistema es completo.

Denotemos ahora

$$j_n(x) = \frac{\sqrt{2} J_\alpha(\alpha_n x)}{|J_{\alpha+1}(\alpha_n)|},$$

con lo que  $\{j_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  forma un sistema ortonormal y completo en  $L^2((0, 1), x dx)$ , que se denomina sistema de Bessel.

Para cada función  $f$ , sean

$$S_n(f, x) = \sum_{k=1}^n c_k j_k(x), \quad c_k = c_k(f) = \int_0^1 j_k(y) f(y) y dy,$$

las sumas parciales de su serie de Fourier.

Dado  $p \in (1, \infty)$  y dos pesos  $U(x)$  y  $V(x)$  en  $(0, 1)$  ( $U(x) \leq CV(x)$ ), en este capítulo estudiaremos, utilizando teoría  $A_p$  de pesos, cuándo los operadores

$$(5.2) \quad \begin{aligned} S_n : L^p((0, 1), V(x)^p x dx) &\longrightarrow L^p((0, 1), U(x)^p x dx) \\ f &\longmapsto S_n f \end{aligned}$$

son uniformemente acotados (a partir de ahora todos los espacios  $L^p$  que consideremos serán sobre el intervalo  $(0, 1)$ , y no lo indicaremos salvo que pueda dar lugar a confusión). Como en los capítulos anteriores, esta acotación uniforme se traduce

en la convergencia en  $L^p(U(x)^p x dx)$  de  $S_n f$  a  $f$  para cada  $f \in L^p(V(x)^p x dx)$ , aunque no nos preocuparemos de decirlo de aquí en adelante (las consideraciones de la Observación 1.3 para garantizar la equivalencia entre convergencia y acotación uniforme se resuelven mediante la Proposición 5.4).

Para evitar trivialidades consideraremos que los pesos  $U$  y  $V$  no son constantemente a.e. iguales a 0 o  $\infty$ . Además, en todo el capítulo utilizaremos  $C$  para denotar constantes positivas que pueden no ser la misma en cada ocasión. Y llamaremos  $q$  al conjugado de  $p$ , es decir,  $p$  y  $q$  deben cumplir la relación  $1/p + 1/q = 1$ .

Como

$$S_n(f, x) = \int_0^1 K_n(x, y) f(y) y dy, \quad K_n(x, y) = \sum_{k=1}^n j_k(x) j_k(y),$$

para estudiar la acotación uniforme lo primero que tendremos que hacer es tener expresiones adecuadas de los núcleos  $K_n(x, y)$ . El resultado en el que nos basaremos es el siguiente:

**Lema 5.1**

Si denotamos  $M_n = \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2}$ ,

$$F(M_n, x, y) = J_\alpha(M_n x) J_{\alpha+1}(M_n y) \frac{M_n}{2(y-x)},$$

y

$$G(M_n, x, y) = J_\alpha(M_n x) J_{\alpha+1}(M_n y) \frac{M_n}{2(x+y)},$$

para  $x, y \in (0, 1)$  se tiene

$$K_n(x, y) = F(M_n, x, y) + F(M_n, y, x) + G(M_n, x, y) + G(M_n, y, x) + O(1)(xy)^\alpha + \frac{O(1)(xy)^{-1/2}}{2-x-y},$$

donde las  $O(1)$  son uniformemente acotadas con respecto a  $n$ ,  $x$  e  $y$ .

Demostración:

Si  $\alpha \geq -1/2$  puede verse en Wing [1] y si  $\alpha < -1/2$  en Benedek-Panzone [2].

Utilizando el lema,

$$\begin{aligned}
 |S_n(f, x)| &\leq \left| \int_0^1 K_n(x, y) f(y) y \, dy \right| \leq \left| \int_0^1 F(M_n, x, y) f(y) y \, dy \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^1 F(M_n, y, x) f(y) y \, dy \right| + \left| \int_0^1 G(M_n, x, y) f(y) y \, dy \right| \\
 (5.3) \quad &\quad + \left| \int_0^1 G(M_n, y, x) f(y) y \, dy \right| + C \int_0^1 (xy)^\alpha |f(y)| y \, dy \\
 &\quad + C \int_0^1 \frac{(xy)^{-1/2}}{2-x-y} |f(y)| y \, dy \\
 &= \sum_{i=1}^4 |W_{i,n}(f, x)| + CW_5(f, x) + CW_6(f, x)
 \end{aligned}$$

respectivamente.

Entonces, para que se verifique la acotación uniforme de los operadores (5.2) bastará comprobar

$$(5.4) \quad \int_0^1 |W_{i,n}(f, x) U(x)|^p x \, dx \leq C \int_0^1 |f(x) V(x)|^p x \, dx, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

y

$$(5.5) \quad \int_0^1 |W_i(f, x) U(x)|^p x \, dx \leq C \int_0^1 |f(x) V(x)|^p x \, dx, \quad i = 5, 6.$$

En las expresiones anteriores aparecen no sólo transformadas de Hilbert sino también operadores del tipo

$$(5.6) \quad J(f, x) = \int_0^1 \frac{f(y)}{2-x-y} \, dy$$

y

$$(5.7) \quad J'(f, x) = \int_0^1 \frac{f(y)}{x+y} \, dy.$$

Estudiemos pues la acotación de estos operadores.

**Lema 5.2**

Sean  $u$  y  $v$  pesos en  $(0, 1)$  y  $1 < p < \infty$ .

(i) Para que el operador  $J$  definido en (5.6) sea acotado de  $L^p((0, 1), v \, dx)$  en  $L^p((0, 1), u \, dx)$  basta con

$$(5.8) \quad (u, v) \in A_p^\delta(d, 1) \text{ para algún } d \in (0, 1) \text{ y algún } \delta > 1,$$

$$(5.9) \quad \int_0^d u(x)^\delta \, dx < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^d v(x)^{-\delta/(p-1)} \, dx < \infty.$$

(ii) Para que el operador  $J'$  definido en (5.7) sea acotado de  $L^p((0, 1), v dx)$  en  $L^p((0, 1), u dx)$  basta con

$$(5.10) \quad (u, v) \in A_p^\delta(0, d) \text{ para algún } d \in (0, 1) \text{ y algún } \delta > 1,$$

$$(5.11) \quad \int_d^1 u(x)^\delta dx < \infty \quad y \quad \int_d^1 v(x)^{-\delta/(p-1)} dx < \infty.$$

(iii) Y para ambas es suficiente que  $(u, v) \in A_p^\delta(0, 1)$  para algún  $\delta > 1$ .

Demostración:

(i) Si denotamos

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= u(x) \text{ en } (0, 1) \quad y \quad \bar{u}(x) = 0 \text{ en } [1, 2), \\ \bar{v}(x) &= v(x) \text{ en } (0, 1) \quad y \quad \bar{v}(x) = \infty \text{ en } [1, 2), \\ \bar{f}(x) &= f(x) \text{ en } (0, 1) \quad y \quad \bar{f}(x) = 0 \text{ en } [1, 2), \end{aligned}$$

la acotación del operador  $J$  es equivalente a

$$(5.12) \quad \int_0^2 \left| \int_0^2 \frac{\bar{f}(y)}{2-x-y} dy \right|^p \bar{u}(x) dx \leq C \int_0^2 |\bar{f}(y)|^p \bar{v}(y) dy$$

con  $C$  independiente de  $f$ .

Haciendo el cambio de variable  $z = 2 - x$ , (5.12) aparece como la acotación de una transformada de Hilbert con dos pesos, luego basta que se cumpla

$$(5.13) \quad (\bar{u}(2-z), \bar{v}(z)) \in A_p^\delta(0, 2) \quad \text{para algún } \delta > 1.$$

Es decir, que exista  $C$  independiente de  $I \subseteq (0, 2)$  tal que

$$(5.14) \quad \left( \int_I \bar{u}(2-z)^\delta dz \right) \left( \int_I \bar{v}(z)^{-\delta/(p-1)} dz \right)^{p-1} \leq C |I|^p.$$

Si  $I \subseteq (0, 1]$  o  $I \subseteq [1, 2)$ , (5.14) es trivial pues  $\bar{u}(2-z)^\delta = 0$  o  $\bar{v}(z)^{-\delta/(p-1)} = 0$  respectivamente. Basta pues analizar qué ocurre cuando  $I = (a, b)$ ,  $a < 1 < b$ . En este caso, haciendo  $2 - z = x$  en la primera integral, tenemos que ver

$$(5.15) \quad \left( \int_{2-b}^1 u(x)^\delta dx \right) \left( \int_a^1 v(z)^{-\delta/(p-1)} dz \right)^{p-1} \leq C |I|^p = C |b-a|^p.$$

Si  $a \leq d$ , es inmediato por (5.9) pues  $|b-a|^p \geq |b-d|^p > |1-d|^p = C$ . Análogamente ocurre si  $2-b \leq d$ . Supongamos pues que  $c = \min\{a, 2-b\} \geq d$ . Entonces, la expresión izquierda de la desigualdad (5.15) puede acotarse por

$$(5.16) \quad \left( \int_c^1 u(x)^\delta dx \right) \left( \int_c^1 v(z)^{-\delta/(p-1)} dz \right)^{p-1}.$$

Ahora, aplicando (5.8) a (5.16) y utilizando la desigualdad  $|1-c| \leq |b-a|$ , se sigue (i).

(ii) Inmediato a partir de (i) haciendo los cambios de variable  $x = 1-t$  e  $y = 1-z$ .

(iii) Obvio pues las hipótesis de (iii) implican las de (i) y (ii).

Antes de proseguir, veamos dos conocidas estimaciones de las funciones de Bessel, que pueden encontrarse en Watson [1], y son las siguientes:

$$(5.17) \quad J_\alpha(z) = \frac{z^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} + O(z^{\alpha+2}) \quad \text{cuando } z \rightarrow 0,$$

$$(5.18) \quad J_\alpha(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right) + O(z^{-3/2}) \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty.$$

Además, vamos a calcular una estimación de la norma en  $L^2(x dx)$  de las funciones de Bessel para poder encontrar a partir de (5.17) y (5.18) estimaciones de las  $j_n(x)$ .

**Proposición 5.3**

$$(5.19) \quad \int_0^1 J_\alpha(\alpha_n x)^2 x dx \approx \frac{1}{\pi \alpha_n} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Demostración:

A partir de (5.17) y (5.18) es claro que

$$J_\alpha(z)^2 z = \frac{z^{2\alpha+1}}{4^\alpha \Gamma(\alpha + 1)^2} + O(z^{2\alpha+3}) \quad \text{cuando } z \rightarrow 0,$$

$$J_\alpha(z)^2 z = \frac{2}{\pi} \cos^2\left(z - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right) + O(z^{-1}) \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty.$$

Además, tras hacer el cambio de variable  $z = \alpha_n x$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 J_\alpha(\alpha_n x)^2 x dx &= \frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^1 J_\alpha(z)^2 z dz + \frac{1}{\alpha_n^2} \int_1^{\alpha_n} J_\alpha(z)^2 z dz \\ &= \frac{1}{4^\alpha \Gamma(\alpha + 1)^2 \alpha_n^2} \int_0^1 z^{2\alpha+1} dz + \frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^1 \left( J_\alpha(z)^2 z - \frac{z^{2\alpha+1}}{4^\alpha \Gamma(\alpha + 1)^2} \right) dz \\ &\quad + \frac{2}{\pi \alpha_n^2} \int_1^{\alpha_n} \cos^2\left(z - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right) dz \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_n^2} \int_1^{\alpha_n} \left( J_\alpha(z)^2 z - \frac{2}{\pi} \cos^2\left(z - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \right) dz. \end{aligned}$$

De las cuatro integrales que aparecen, la primera es una constante; la segunda se acota, en módulo, por una constante; la cuarta por  $C \log \alpha_n$ ; y la tercera es igual a

$$\int_1^{\alpha_n} \left( 1 + \cos\left(2z - \alpha\pi - \frac{\pi}{2}\right) \right) dz \approx \alpha_n.$$

Con todo esto, es inmediato obtener la estimación (5.19).

A partir de ahora vamos a ocuparnos de la serie de Fourier. En primer lugar, un resultado que establece que los operadores (5.2) están bien definidos y a la vez demuestra la acotación de uno de los sumandos de (5.5).

**Proposición 5.4**

*Las condiciones*

$$(5.20) \quad \int_0^1 U(x)^p x^{\alpha p+1} dx < \infty \quad y \quad \int_0^1 V(x)^{-q} x^{\alpha q+1} dx < \infty$$

*son suficientes para que existan los  $c_n(f)$  para cada  $f \in L^p(V(x)^p x dx)$  y para que los  $S_n f \in L^p(U(x)^p x dx)$ . Además, en esas mismas condiciones el operador  $W_5$  de (5.3) es acotado de  $L^p(V(x)^p x dx)$  en  $L^p(U(x)^p x dx)$ .*

Demostración:

Usando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} |c_n(f)| &= \left| \int_0^1 f(y) j_n(y) y dy \right| \\ &\leq \left( \int_0^1 |f(y)|^p V(y)^p y dy \right)^{1/p} \left( \int_0^1 |j_n(y)|^q V(y)^{-q} y dy \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

y la última integral es finita para cada  $n$  sin más que utilizar (5.17). Para ver ahora que  $S_n f \in L^p(U(x)^p x dx)$  para cada  $n$ , basta comprobar que  $j_n(x) \in L^p(U(x)^p x dx)$  para cada  $n$ , lo cual es de nuevo inmediato por (5.17).

Comprobemos ahora la acotación de  $W_5$ . Usando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} W_5(f, x) &= x^\alpha \int_0^1 |f(y)| y^\alpha y dy \\ &\leq x^\alpha \left( \int_0^1 |f(y)|^p V(y)^p y dy \right)^{1/p} \left( \int_0^1 V(y)^{-q} y^{\alpha q+1} dy \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |W_5(f, x) U(x)|^p x dx \\ \leq \left( \int_0^1 U(x)^p x^{\alpha p+1} dx \right) \left( \int_0^1 V(y)^{-q} y^{\alpha q+1} dy \right)^{1/q} \left( \int_0^1 |f(y) V(y)|^p y dy \right) \end{aligned}$$

y como los dos primeros factores son finitos  $W_5$  es acotado.

Estudiemos ahora la acotación del sumando  $W_6$ , que es el otro que no depende de  $n$  en la descomposición (5.3).



**Proposición 5.5**

Para que el operador  $W_6$  sea acotado de  $L^p(V(x)^p x dx)$  en  $L^p(U(x)^p x dx)$  es suficiente que

$$(U(x)^p x^{1-p/2}, V(x)^p x^{1-p/2}) \in A_p^\delta(d, 1) \quad \text{para algún } d \in (0, 1) \text{ y algún } \delta > 1,$$

$$\int_0^d (U(x)^p x^{1-p/2})^\delta dx < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^d (V(x)^p x^{1-p/2})^{-\delta/(p-1)} dx < \infty.$$

Demostración:

Queremos comprobar que

$$\begin{aligned} \int_0^1 |W_6(f, x)U(x)|^p x dx &= \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{|f(y)|y^{1/2}}{2-x-y} dy \right|^p U(x)^p x^{1-p/2} dx \\ &\leq C \int_0^1 |f(x)x^{1/2}|^p V(x)^p x^{1-p/2} dx = C \int_0^1 |f(x)V(x)|^p x dx. \end{aligned}$$

Y esto, si llamamos  $g(y) = |f(y)|y^{1/2}$ , es lo mismo que demostrar que el operador  $J(g, x)$  es acotado con sus correspondientes pesos, para lo cual basta utilizar el Lema 5.2.

Hasta el momento, todo lo que hemos hecho sirve para  $\alpha > -1$  cualquiera. A partir de ahora las cosas van a ser más sencillas si  $\alpha \geq -1/2$ . Esta diferencia radica en que a partir de (5.17) y (5.18), cuando  $\alpha \geq -1/2$  es inmediato obtener que existe  $C$  tal que

$$(5.21) \quad |J_\alpha(z)| \leq Cz^{-1/2}, \quad z \in (0, \infty),$$

acotación que será muy útil para nuestros propósitos ya que en el exponente de  $z$  no aparece  $\alpha$ . Analicemos pues en primer lugar lo que ocurre en el caso  $\alpha \geq -1/2$ .

**Teorema 5.6**

Para cada  $f \in L^p(V(x)^p x dx)$ , sean  $S_n f$  las sumas parciales de su serie de Fourier respecto al sistema  $\{j_n(x)\}_{n=1}^\infty$  con  $\alpha \geq -1/2$  y  $1 < p < \infty$ . Para que

$$\|S_n(f, x)U(x)\|_{p, x dx} \leq C \|f(x)V(x)\|_{p, x dx}$$

uniformemente es suficiente que

$$(5.22) \quad (U(x)^p x^{1-p/2}, V(x)^p x^{1-p/2}) \in A_p^\delta(0, 1) \quad \text{para algún } \delta > 1$$

(basta  $\delta = 1$  si  $U = V$ ).

Demostración:

Hay que comprobar que todos los operadores de (5.3) son uniformemente acotados. Sin más que aplicar que  $u$  y  $v^{-1/(p-1)}$  son integrables cuando  $(u, v) \in A_p(0, 1)$  y las Proposiciones 5.4 y 5.5, ya tenemos la acotación de los sumandos correspondientes a  $i = 5$  e  $i = 6$ . Veamos pues qué ocurre con los demás.

$i = 1$ : Sirviéndonos de (5.21) y (5.22) tenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |W_{1,n}(f, x)U(x)|^p x dx \\ &= \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{f(y)y^{1/2}(yM_n)^{1/2}J_{\alpha+1}(yM_n)}{2(x-y)} dy \right|^p |(xM_n)^{1/2}J_\alpha(xM_n)|^p U(x)^p x^{1-p/2} dx \\ &\leq C \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{f(y)y^{1/2}(yM_n)^{1/2}J_{\alpha+1}(yM_n)}{x-y} dy \right|^p U(x)^p x^{1-p/2} dx \\ &\leq C_1 \int_0^1 |f(x)x^{1/2}(xM_n)^{1/2}J_{\alpha+1}(xM_n)|^p V(x)^p x^{1-p/2} dx \\ &\leq C_2 \int_0^1 |f(x)V(x)|^p x dx. \end{aligned}$$

$i = 2$ : Es exactamente igual que  $i = 1$  ya que las cotas de (5.21) para  $J_\alpha$  y  $J_{\alpha+1}$  son las mismas.

$i = 3$  e  $i = 4$ : Análogos a los anteriores, pero utilizando la acotación del operador  $J'$  en lugar de la transformada de Hilbert, para lo cual (5.22) es suficiente según vemos en Lema 5.2 (iii).

Utilizando el teorema podemos demostrar resultados ya conocidos debidos a Wing [1].

### Corolario 5.7

Dado  $\alpha \geq -1/2$ , para que  $\|S_n(f, x)\|_{p,x} \leq C\|f(x)\|_{p,x}$  uniformemente basta que  $x^{1-p/2} \in A_p(0, 1)$ , es decir,  $4/3 < p < 4$ .

Demostración:

Utilizar el teorema con  $U(x) = V(x) = 1$  y el hecho de que

$$x^{1-p/2} \in A_p(0, 1) \iff -1 < 1 - p/2 < p - 1 \iff 4/3 < p < 4.$$

### Corolario 5.8

Dado  $\alpha \geq -1/2$ , y si para cada  $g \in L^p(dx)$  denotamos  $\mathcal{S}_n(g, x)$  las sumas parciales de su serie de Fourier respecto al sistema  $\{j_n(x)x^{1/2}\}_{n=1}^\infty$ , ortonormal en  $L^2(dx)$ , la acotación uniforme  $\|\mathcal{S}_n(g, x)\|_{p,dx} \leq C\|g(x)\|_{p,dx}$  es cierta para todo  $p \in (1, \infty)$ .

Demostración:

Como

$$\mathcal{S}_n(g, x) = \sum_{k=1}^n \left( \int_0^1 g(y)y^{1/2} j_k(y) dy \right) j_k(x)x^{1/2} = x^{1/2} S_n(g(y)y^{-1/2}, x),$$

si llamamos  $f(y) = g(y)y^{-1/2}$ , la acotación buscada es equivalente a

$$\int_0^1 |S_n(f, x)x^{1/2-1/p}|^p x dx \leq C \int_0^1 |f(x)x^{1/2-1/p}|^p x dx = C \int_0^1 |g(x)|^p dx.$$

Para esto, sin más que aplicar el Teorema 5.6 con  $U(x) = V(x) = x^{1/2-1/p}$ , basta que  $1 \in A_p(0, 1)$ , cierto para todo  $p \in (1, \infty)$ .

Utilizando que  $x^r \in A_p(0, 1)$  si y sólo si  $-1 < r < p - 1$  (ver (2.11) e integrabilidad en  $(0, 1)$ ), es de nuevo inmediato obtener las correspondientes condiciones de acotación uniforme de las series de Bessel con  $U(x) = V(x) = x^a$  (este tipo de acotaciones ya las estudian Benedek-Panzone [3]). Pero, más en general, también se obtiene

**Corolario 5.9**

Sean  $\alpha \geq -1/2$ ,  $1 < p < \infty$  y los pesos

$$U(x) = x^\alpha (1-x)^b \prod_{k=1}^m |x-x_k|^{b_k}, \quad V(x) = x^A (1-x)^B \prod_{k=1}^m |x-x_k|^{B_k}$$

( $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m < 1$ ). Para que

$$\|S_n(f, x)U(x)\|_{p,x} \leq C \|f(x)V(x)\|_{p,x}$$

uniformemente es suficiente que

$$(5.23) \quad \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{a}{4} + \frac{A}{4} \right| < \frac{1}{4} + \frac{a-A}{4}, \quad A \leq a,$$

(5.24)

$$pb > -1, \quad pB < p-1, \quad B \leq b, \quad pb_k > -1, \quad pB_k < p-1, \quad B_k \leq b_k \quad (1 \leq k \leq m).$$

Demostración:

Elijamos  $y_k$  ( $0 \leq k \leq m$ ) tales que

$$0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < y_{m-1} < x_m < y_m < 1.$$

Entonces, según el Teorema 2.18, podemos estudiar la condición (5.22) por factores y basta que exista  $\delta > 1$  para el cual se cumpla

$$(x^{ap+1-p/2}, x^{Ap+1-p/2}) \in A_p^\delta(0, 1), \quad ((1-x)^{bp}, (1-x)^{Bp}) \in A_p^\delta(0, 1)$$

y

$$\left(|x - x_k|^{pb_k}, |x - x_k|^{pB_k}\right) \in A_p^\delta(0, 1) \quad (1 \leq k \leq m).$$

Empecemos con la primera de las tres. Por (2.16), es equivalente a estas tres condiciones:

$$ap + 1 - p/2 > -1, \quad Ap + 1 - p/2 \leq ap + 1 - p/2 \quad \text{y} \quad Ap + 1 - p/2 < p - 1.$$

Es decir,

$$p(1 - 2a) < 4, \quad A \leq a \quad \text{y} \quad p(3 - 2A) > 4.$$

Pero,

$$\begin{aligned} p(1 - 2a) < 4 < p(3 - 2A) &\iff 1/4 - a/2 < 1/p < 3/4 - A/2 \\ &\iff -1/4 - a/4 + A/4 < 1/p + a/4 + A/4 - 1/2 < 1/4 - A/4 + a/4, \end{aligned}$$

con lo que llegamos a (5.23).

La segunda condición  $A_p$  es equivalente a  $pb > -1$ ,  $pB < p - 1$ ,  $B \leq b$ , y la tercera a  $pb_k > -1$ ,  $pB_k < p - 1$ ,  $B_k \leq b_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ), con lo que queda demostrado el teorema.

Si (5.24) queremos escribirla de modo análogo a (5.23) lo que queda es

$$\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{e}{4} + \frac{E}{4} \right| < \frac{1}{2} + \frac{e - E}{2}, \quad E \leq e,$$

donde  $e$  toma todos los valores  $b_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) y  $b$ , y  $E$  los valores  $B_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) y  $B$  respectivamente. El proceso para llegar a esta expresión es análogo al seguido para llegar a (5.23).

Vamos ahora a analizar qué ocurre cuando  $-1 < \alpha \leq -1/2$ . En primer lugar, buscaremos acotaciones adecuadas para las funciones de Bessel.

### Lema 5.10

Sea  $-1 < \alpha \leq -1/2$ . Existe  $C$  tal que para todo  $z \in (0, \infty)$  se cumple

$$(5.25) \quad |z^{1/2} J_\alpha(z)| \leq C(1 + z^{\alpha+1/2}), \quad |z^{1/2} J_{\alpha+1}(z)| \leq \frac{C}{1 + z^{\alpha+1/2}}.$$

Demostración:

De (5.17) y (5.18) es inmediato  $|J_\alpha(z)| \leq C \max\{z^{-1/2}, z^\alpha\}$ , y de aquí se sigue la acotación deseada para  $|z^{1/2} J_\alpha(z)|$ .

Por otra parte, como  $\alpha + 1 \geq -1/2$ , por (5.17) y (5.18) son ciertas

$$|z^{1/2} J_{\alpha+1}(z)| \leq C \quad \text{y} \quad |z^{1/2} J_{\alpha+1}(z)| \leq C z^{\alpha+3/2},$$

ambas para  $z \in (0, \infty)$ , y por tanto

$$|z^{1/2} J_{\alpha+1}(z)| \leq C \frac{z^{\alpha+3/2}}{1 + z^{\alpha+3/2}}.$$

Ahora, ya simplemente basta demostrar

$$\frac{z^{\alpha+3/2}}{1 + z^{\alpha+3/2}} \leq \frac{C}{1 + z^{\alpha+1/2}}, \quad z \in (0, \infty),$$

lo cual es inmediato sin más que tomar equivalencias cuando  $z \rightarrow 0$  y  $z \rightarrow \infty$ .

### Teorema 5.11

Sean  $S_n f$  las sumas parciales de la serie de Fourier respecto al sistema  $\{j_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  con  $-1 < \alpha \leq -1/2$  y  $1 < p < \infty$ . Para que

$$\|S_n(f, x)U(x)\|_{p,x} \leq C \|f(x)V(x)\|_{p,x}$$

uniformemente basta que exista  $\delta > 1$  ( $\delta = 1$  si  $U = V$ ) tal que

$$(5.26) \quad \left( \left( \frac{1}{M_n} + x \right)^{-p(\alpha+1/2)} U(x)^p x^{\alpha p+1}, \right. \\ \left. \left( \frac{1}{M_n} + x \right)^{-p(\alpha+1/2)} V(x)^p x^{\alpha p+1} \right) \in A_p^\delta(0, 1)$$

y

$$(5.27) \quad \left( \left( \frac{1}{M_n} + x \right)^{p(\alpha+1/2)} U(x)^p x^{-\alpha p-p+1}, \right. \\ \left. \left( \frac{1}{M_n} + x \right)^{p(\alpha+1/2)} V(x)^p x^{-\alpha p-p+1} \right) \in A_p^\delta(0, 1),$$

ambas uniformemente, y siendo  $M_n = \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2}$ .

### Demostración:

Veamos la acotación de los seis operadores de (5.4) y (5.5).

$i = 1$ : Si se cumpliera

$$(5.28) \quad \left( (1 + (xM_n)^{\alpha+1/2})^p U(x)^p x^{1-p/2}, (1 + (xM_n)^{\alpha+1/2})^p V(x)^p x^{1-p/2} \right) \in A_p^\delta(0, 1)$$

uniformemente, utilizando (5.25), tendríamos

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 |W_{1,n}(f, x)U(x)|^p x dx \\
&= \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{f(y)y^{1/2}(yM_n)^{1/2}J_{\alpha+1}(yM_n)}{2(x-y)} dy \right|^p |(xM_n)^{1/2}J_{\alpha}(xM_n)|^p U(x)^p x^{1-p/2} dx \\
&\leq C \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{f(y)y^{1/2}(yM_n)^{1/2}J_{\alpha+1}(yM_n)}{x-y} dy \right|^p (1+(xM_n)^{\alpha+1/2})^p U(x)^p x^{1-p/2} dx \\
&\leq C_1 \int_0^1 |f(x)x^{1/2}(xM_n)^{1/2}J_{\alpha+1}(xM_n)|^p (1+(xM_n)^{\alpha+1/2})^p V(x)^p x^{1-p/2} dx \\
&\leq C_2 \int_0^1 |f(x)V(x)|^p x dx,
\end{aligned}$$

tal como buscábamos. Por otra parte, (5.28) es equivalente a que exista  $C$  independiente de  $I \subseteq (0, 1)$  tal que

$$\begin{aligned}
(5.29) \quad & \left( \int_I (1+(xM_n)^{\alpha+1/2})^{\delta p} U(x)^{\delta p} x^{\delta(1-p/2)} dx \right) \\
& \times \left( \int_I ((1+(xM_n)^{\alpha+1/2})^p V(x)^p x^{1-p/2})^{-\delta/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq C|I|^p.
\end{aligned}$$

Pero, sin más que tomar equivalencias cuando  $z \rightarrow 0$  y  $z \rightarrow \infty$  es fácil comprobar que cuando  $\alpha \leq -1/2$ , existen constantes  $C_1$  y  $C_2$  tales que

$$C_1 z^{\alpha+1/2} (1+z)^{-\alpha-1/2} \leq 1+z^{\alpha+1/2} \leq C_2 z^{\alpha+1/2} (1+z)^{-\alpha-1/2}, \quad z \in (1, \infty),$$

y por tanto

$$(5.30) \quad 1+(xM_n)^{\alpha+1/2} \sim (xM_n)^{\alpha+1/2} (1+xM_n)^{-\alpha-1/2} = x^{\alpha+1/2} (1/M_n + x)^{-\alpha-1/2}$$

independientemente de  $n$  y de  $x \in (0, 1)$ . De aquí que (5.29) es equivalente a

$$\begin{aligned}
(5.31) \quad & \left( \int_I [x^{\alpha+1/2} (1/M_n + x)^{-\alpha-1/2}]^{\delta p} U(x)^{\delta p} x^{\delta(1-p/2)} dx \right) \\
& \times \left( \int_I ([x^{\alpha+1/2} (1/M_n + x)^{-\alpha-1/2}]^p V(x)^p x^{1-p/2})^{-\delta/(p-1)} dx \right)^{p-1} \leq C|I|^p,
\end{aligned}$$

es decir, (5.26).

$i = 2$ : Análogamente se obtiene que para

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{f(y)y^{1/2}(yM_n)^{1/2}J_{\alpha}(yM_n)}{2(x-y)} dy \right|^p |(xM_n)^{1/2}J_{\alpha+1}(xM_n)|^p U(x)^p x^{1-p/2} dx \\
&\leq C \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{f(y)y^{1/2}(yM_n)^{1/2}J_{\alpha}(yM_n)}{x-y} dy \right|^p (1+(xM_n)^{\alpha+1/2})^{-p} U(x)^p x^{1-p/2} dx \\
&\leq C_1 \int_0^1 |f(x)V(x)|^p x dx,
\end{aligned}$$

es suficiente que

$$(5.32) \quad \left( (1 + (xM_n)^{\alpha+1/2})^{-p} U(x)^p x^{1-p/2}, (1 + (xM_n)^{\alpha+1/2})^{-p} V(x)^p x^{1-p/2} \right) \in A_p^\delta(0, 1).$$

Y, utilizando de nuevo (5.30), llegamos a (5.27).

$i = 3$ : Como  $i = 1$ , pero utilizando, en lugar de la transformada de Hilbert, la acotación uniforme de los  $J'(g, x)$  como operadores entre los espacios  $L^p(v_n)$  y  $L^p(u_n)$  cuando  $(u_n, v_n) \in A_p^\delta(0, 1)$  uniformemente.

$i = 4$ : Como  $i = 2$  pero con el operador  $J'$ .

$i = 5$ : Tenemos que ver que a partir de (5.26) y (5.27) es posible demostrar (5.20). Para ello, si tomamos  $n$  fijo ( $n = 1$  por ejemplo), el factor  $x + 1/M_1$  es despreciable ya que está acotado superior e inferiormente, con lo cual de (5.26) y (5.27) aparecen, respectivamente

$$(5.33) \quad (U(x)^p x^{\alpha p+1}, V(x)^p x^{\alpha p+1}) \in A_p^\delta(0, 1)$$

y

$$(5.34) \quad (U(x)^p x^{-\alpha p-p+1}, V(x)^p x^{-\alpha p-p+1}) \in A_p^\delta(0, 1).$$

Basta ahora utilizar en (5.33) que  $u$  es integrable sobre  $(0, 1)$  cuando  $(u, v) \in A_p^\delta(0, 1)$  y en (5.34) que  $v^{-1/(p-1)}$  es integrable sobre  $(0, 1)$  cuando  $(u, v) \in A_p^\delta(0, 1)$  y se llega a (5.20).

$i = 6$ : Ya no es cierto ahora, como en el Teorema 5.6, que pueda deducirse a partir de (iii) del Lema 5.2, pues la hipótesis de (iii) no tiene por qué ser cierta. Pero sí que va a ser posible demostrar las hipótesis de (i) a partir de (5.26) y (5.27). Es decir que, según (5.8) y (5.9), tenemos que probar que existe  $d \in (0, 1)$  tal que

$$(5.35) \quad (U(x)^p x^{1-p/2}, V(x)^p x^{1-p/2}) \in A_p^\delta(d, 1),$$

$$(5.36) \quad \int_0^d (U(x)^p x^{1-p/2})^\delta dx < \infty \quad y \quad \int_0^d (V(x)^p x^{1-p/2})^{-\delta/(p-1)} dx < \infty.$$

Tomando  $d \in (0, 1)$  cualquiera y  $n = 1$ , (5.35) es inmediato a partir de (5.26). Por otra parte, de (5.33) y (5.34) deducimos

$$\int_0^d (U(x)^p x^{\alpha p+1})^\delta dx < \infty \quad y \quad \int_0^d (V(x)^p x^{-\alpha p-p+1})^{-\delta/(p-1)} dx < \infty,$$

con lo cual, como  $1 - p/2 \geq \alpha p + 1$  y  $-\alpha p - p + 1 \geq 1 - p/2$  siempre que  $\alpha \leq -1/2$ , se sigue (5.36), y el teorema queda probado.

**Observación 5.12**

Si en (5.29) hacemos el cambio de variable  $z = xM_n$  y dado  $I = (c, d)$  denotamos  $I' = (cM_n, dM_n)$ , la condición que se obtiene es que exista  $C$  independiente de  $I \subseteq (0, M_n)$  tal que

$$(5.37) \quad \left( \int_{I'} (1 + z^{\alpha+1/2})^{\delta p} U(z/M_n)^{\delta p} z^{\delta(1-p/2)} dz \right) \\ \times \left( \int_{I'} \left( (1 + z^{\alpha+1/2})^p V(z/M_n)^p z^{1-p/2} \right)^{-\delta/(p-1)} dz \right)^{p-1} \leq C |I'|^p.$$

Análogamente, (5.32) se convierte en

$$(5.38) \quad \left( \int_{I'} (1 + z^{\alpha+1/2})^{-\delta p} U(z/M_n)^{\delta p} z^{\delta(1-p/2)} dz \right) \\ \times \left( \int_{I'} \left( (1 + z^{\alpha+1/2})^{-p} V(z/M_n)^p z^{1-p/2} \right)^{-\delta/(p-1)} dz \right)^{p-1} \leq C |I'|^p,$$

En ninguna de estas dos expresiones se puede obviar la condición  $I \subseteq (0, M_n)$ , ya que de lo contrario  $U(z/M_n)$  y  $V(z/M_n)$  pueden no tener sentido pues  $U$  y  $V$  son pesos sobre el intervalo  $(0, 1)$ . Pero si  $U$  y  $V$  tienen sentido como aplicaciones en  $(0, \infty)$ , podríamos en (5.37) y (5.38) exigir  $I \subset (0, \infty)$ , luego bastaría que se verificase

$$\left( (1 + z^{\alpha+1/2})^p U(z/M_n)^p z^{(1-p/2)}, (1 + z^{\alpha+1/2})^p V(z/M_n)^p z^{(1-p/2)} \right) \in A_p^\delta(0, \infty)$$

y

$$\left( (1 + z^{\alpha+1/2})^{-p} U(z/M_n)^p z^{(1-p/2)}, (1 + z^{\alpha+1/2})^{-p} V(z/M_n)^p z^{(1-p/2)} \right) \in A_p^\delta(0, \infty),$$

ambos uniformemente. Este procedimiento resulta útil en el caso  $U(x) = V(x) = x^\alpha$ , ya que entonces se simplifican las  $M_n$  y, además, se puede tomar  $\delta = 1$ . Así, tras aplicar  $1 + z^{\alpha+1/2} \sim z^{\alpha+1/2}(1+z)^{-\alpha-1/2}$ , queda simplemente

$$(5.39) \quad (1+z)^{-p(\alpha+1/2)} z^{\alpha p+1+ap} \in A_p(0, \infty)$$

y

$$(5.40) \quad (1+z)^{p(\alpha+1/2)} z^{-\alpha p-p+1+ap} \in A_p(0, \infty).$$

Pero en (2.11) demostramos que  $z^r \in A_p(0, \infty)$  si y sólo si  $-1 < r < p-1$ . Utilizando esto en (5.39) y (5.40) encontramos que, cuando  $-1 < \alpha \leq -1/2$  para que se verifique

$$\|S_n(f, x)x^\alpha\|_{p, x dx} \leq C \|f(x)x^\alpha\|_{p, x dx}$$



uniformemente es suficiente con

$$(5.41) \quad \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{a}{2} \right| < \frac{\alpha + 1}{2}$$

(esta condición ya fue obtenida en Benedek-Panzone [3]).

Esto ya se puede aplicar a las situaciones análogas a los Corolarios 5.7 y 5.8 pero con  $-1 < \alpha \leq -1/2$  y obtenemos que para que

$$\|S_n(f, x)\|_{p, x dx} \leq C \|f(x)\|_{p, x dx}$$

uniformemente basta con

$$(5.42) \quad \frac{2}{2 + \alpha} < p < \frac{2}{-\alpha},$$

y que la acotación uniforme

$$\|\mathcal{S}_n(g, x)\|_{p, dx} \leq C \|g(x)\|_{p, dx}$$

es cierta siempre que

$$(5.43) \quad \frac{2}{2\alpha + 3} < p < \frac{2}{-2\alpha - 1},$$

resultados ambos ya demostrados en Benedek-Panzone [2].

Sin embargo, el proceso seguido para llegar a (5.39) y (5.40) a partir de (5.37) y (5.38) no es válido simplemente con que alguno de los pesos  $U(x)$  o  $V(x)$  sea de la forma  $x^r(1-x)^s$ . Pero utilizando el Teorema 5.11 sí que vamos a poder analizar lo que ocurre para pesos de esa forma e incluso más generales.

**Corolario 5.13**

Sean  $-1 < \alpha \leq -1/2$ ,  $1 < p < \infty$  y los pesos  $U(x) = x^a U_1(x)$ ,  $V(x) = x^A V_1(x)$  con  $U_1(x) \sim V_1(x) \sim cte.$  en  $(0, \varepsilon)$ . Para que

$$\|S_n(f, x)U(x)\|_{p, x dx} \leq C \|f(x)V(x)\|_{p, x dx}$$

uniformemente es suficiente que

$$(5.44) \quad \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{a}{4} + \frac{A}{4} \right| < \frac{\alpha + 1}{2} + \frac{a - A}{4}, \quad A \leq a,$$

y

$$(5.45) \quad (U_1(x)^p, V_1(x)^p) \in A_p^\delta(0, 1) \quad \text{para algún } \delta > 1.$$

En particular, si

$$U(x) = x^a(1-x)^b \prod_{k=1}^m |x - x_k|^{b_k}, \quad V(x) = x^A(1-x)^B \prod_{k=1}^m |x - x_k|^{B_k}$$

$(0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m < 1)$  entonces (5.45) se traduce en (5.24).

Demostración:

De acuerdo con el Teorema 2.18 podemos estudiar las condiciones (5.26) y (5.27) por factores. Por tanto, basta que exista  $\delta > 1$  para el cual se cumplan

$$(5.46) \quad \left( \left( \frac{1}{M_n} + x \right)^{-p(\alpha+1/2)} x^{\alpha p+1+ap}, \left( \frac{1}{M_n} + x \right)^{-p(\alpha+1/2)} x^{\alpha p+1+Ap} \right) \in A_p^\delta(0, 1),$$

$$(5.47) \quad \left( \left( \frac{1}{M_n} + x \right)^{p(\alpha+1/2)} x^{-\alpha p-p+1+ap}, \left( \frac{1}{M_n} + x \right)^{p(\alpha+1/2)} x^{-\alpha p-p+1+Ap} \right) \in A_p^\delta(0, 1),$$

ambas uniformemente, y (5.45). Cuando  $U(x)$  y  $V(x)$  tienen la forma particular del enunciado tomamos  $y_k$  ( $0 \leq k \leq m$ ) tales que

$$0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < y_{m-1} < x_m < y_m < 1$$

y así (5.45) equivale a

$$((1-x)^{bp}, (1-x)^{Bp}) \in A_p^\delta(0, 1), \quad (|x-x_k|^{pb_k}, |x-x_k|^{pB_k}) \in A_p^\delta(0, 1).$$

Estas últimas son como en el Corolario 5.9 y proporcionan (5.24).

Centrémonos pues en estudiar las dos condiciones uniformes.

Utilizando el Corolario 2.17, tenemos que (5.46) es equivalente a

$$(5.48) \quad \begin{aligned} & (1) \alpha p + 1 + ap > -1, \quad (2) \alpha p + 1 + Ap < p - 1, \quad (3 \text{ y } 4) A \leq a, \\ & (5) \alpha p + 1 + ap - \alpha p - p/2 > -1, \quad (6) \alpha p + 1 + Ap - \alpha p - p/2 < p - 1, \end{aligned}$$

y (5.47) es equivalente a

$$(5.49) \quad \begin{aligned} & (1) -\alpha p - p + 1 + ap > -1, \quad (2) -\alpha p - p + 1 + Ap < p - 1, \\ & (3 \text{ y } 4) A \leq a, \quad (5) -\alpha p - p + 1 + ap + \alpha p + p/2 > -1, \\ & (6) -\alpha p - p + 1 + Ap + \alpha p + p/2 < p - 1, \end{aligned}$$

De aquí, además de  $A \leq a$ , tenemos

$$(5.48-1) \iff \alpha + 1/p + a > -1/p \\ \iff 1/p - 1/2 + a/4 + A/4 > A/4 - a/4 - 1/2 - \alpha/2,$$

$$(5.49-2) \iff 1/p - 1 - \alpha + A < 1 - 1/p \\ \iff 1/p - p/2 + a/4 + A/4 < a/4 - A/4 + \alpha/2 + 1/2$$

y de ambas se obtiene (5.44).

$$(5.48-2) \iff \alpha + 1/p + A < 1 - 1/p \\ \iff 1/p - 1/2 + a/4 + A/4 < a/4 - A/4 - \alpha/2,$$

$$(5.49-1) \iff 1/p - 1 - \alpha + a > -1/p \\ \iff 1/p - 1/2 + a/4 + A/4 > A/4 - a/4 + \alpha/2,$$

y de ambas

$$(5.50) \quad \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{a}{4} + \frac{A}{4} \right| < \frac{-\alpha}{2} + \frac{a-A}{4}.$$

Por último, como (5.48) y (5.49) tienen el mismo (5) y el mismo (6),

$$(5) \iff 1/p + a - 1/2 > -1/p \iff 1/p - 1/2 + a/4 + A/4 > A/4 - a/4 - 1/4,$$

$$(6) \iff 1/p + A - 1/2 < 1 - 1/p \iff 1/p - 1/2 + a/4 + A/4 < a/4 - A/4 + 1/4,$$

y de ambas

$$(5.51) \quad \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{a}{4} + \frac{A}{4} \right| < \frac{1}{4} + \frac{a-A}{4}.$$

Pero de (5.44), (5.50) y (5.51) basta quedarnos con (5.44) ya que al ser  $\alpha \leq -1/2$  se tiene  $(\alpha + 1)/2 \leq -\alpha/2$  y  $(\alpha + 1)/2 \leq 1/4$ , con lo que queda demostrado el corolario.

Hasta ahora únicamente nos hemos dedicado a buscar condiciones suficientes para la acotación uniforme de las sumas parciales de la serie de Fourier. Trataremos ahora de encontrar condiciones necesarias y posteriormente veremos qué es lo que ocurre al aplicarlas a los casos particulares de los corolarios.

Sabemos por el Teorema 1.6 que una condición necesaria para la acotación uniforme no sólo de las sumas parciales de la serie de Fourier como operadores entre  $L^p(V(x)^p x dx)$  y  $L^p(U(x)^p x dx)$ , sino también del término general, es

$$(5.52) \quad \left( \int_0^1 |j_n(x)|^p U(x)^p x dx \right)^{1/p} \left( \int_0^1 |j_n(x)|^q V(x)^{-q} x dx \right)^{1/q} \leq C.$$

Una primera condición que impone (5.52) al aplicarla a  $n = 1$  es

$$(5.53) \quad \int_0^1 |J_\alpha(\alpha_1 x)|^p U(x)^p x dx < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^1 |J_\alpha(\alpha_1 x)|^q V(x)^{-q} x dx < \infty.$$

Además, por ser  $\alpha_1$  el primer cero de  $J_\alpha(z)$ , de la estimación (5.17) se deduce que para cada  $\varepsilon \in (0, 1)$  existe  $C$  tal que  $J_\alpha(\alpha_1 x) \geq Cx^\alpha$  para  $x \in (0, 1 - \varepsilon)$ . Utilizando este hecho y (5.53) obtenemos como condición necesaria

$$(5.54) \quad \int_0^{1-\varepsilon} U(x)^p x^{\alpha p+1} dx < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^{1-\varepsilon} V(x)^{-q} x^{\alpha q+1} dx < \infty$$

para cada  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

Esto, al aplicarlo a pesos  $U(x)$  y  $V(x)$  como los de los Corolarios 5.9 y 5.13 proporciona las desigualdades

$$\alpha p + 1 + ap > -1, \quad \alpha q + 1 - Aq > -1, \quad b_k p > -1 \quad \text{y} \quad -B_k q > -1 \quad (1 \leq k \leq m).$$

Y de aquí se obtiene la necesidad de las condiciones

$$\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{a}{4} + \frac{A}{4} \right| < \frac{\alpha + 1}{2} + \frac{a - A}{4},$$

$$b_k p > -1 \quad \text{y} \quad p B_k < p - 1 \quad (1 \leq k \leq m),$$

aunque no encontramos ninguna exigencia sobre  $b$  y  $B$  ni tampoco sobre (5.23). Es posible, y así lo hacen Benedek-Panzone en los casos que tratan ( $a = A$ ,  $b = B = b_k = B_k = 0$ ), demostrar la necesidad de más condiciones sobre  $a$  y  $A$  a partir de (5.52) mediante un procedimiento análogo al de la Proposición 5.3, pero así no hay forma de encontrar exigencias sobre  $b$  y  $B$  (notar que  $j_n(x)$  se anula siempre en  $x = 1$ ). Vamos pues a buscar nuevos resultados que nos permitan solucionar estos problemas. En primer lugar, un conocido resultado de análisis de Fourier:

**Lema 5.14**

Sean dos funciones  $f$  y  $g$  no negativas,  $g$  continua y de periodo  $2\pi$  y  $f$  perteneciente al espacio  $L^1(0, 2\pi)$ . Entonces

$$(5.55) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(\lambda t) dt = \hat{g}(0)\hat{f}(0),$$

donde  $\hat{h}(x)$  denota la transformada de Fourier

$$\hat{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t)e^{-ixt} dt.$$

Demostración:

Por ser  $g$  continua de periodo  $2\pi$  y si denotamos

$$s_n(g, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \left( \int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt} dt \right) e^{ikx}$$

y

$$\sigma_N(g, x) = \frac{\sum_{n=0}^N s_n(g, x)}{N + 1},$$

el teorema de Fejér asegura que  $\sigma_N g$  converge a  $g$  uniformemente en todo  $\mathbb{R}$ . Con esto se demuestra que para cada  $\varepsilon > 0$  existirá

$$P(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{int}$$

con  $a_0 = \widehat{g}(0)$ , tal que  $\|g(t) - P(t)\|_p < \varepsilon$ . Por lo tanto

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(g(\lambda t) - P(\lambda t)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \varepsilon \widehat{f}(0)$$

y de aquí

$$(5.56) \quad \begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)P(\lambda t) dt - \varepsilon \widehat{f}(0) &\leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(\lambda t) dt \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)P(\lambda t) dt + \varepsilon \widehat{f}(0). \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)P(\lambda t) dt &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \frac{a_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{\lambda int} dt \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N a_n \widehat{f}(-\lambda n). \end{aligned}$$

Además, por el lema de Riemann-Lebesgue,  $\widehat{f}(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , luego  $\widehat{f}(-\lambda n) \rightarrow 0$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  salvo para  $n = 0$ . Por tanto

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)P(\lambda t) dt = a_0 \widehat{f}(0) = \widehat{g}(0) \widehat{f}(0)$$

y como (5.56) puede conseguirse para cada  $\varepsilon > 0$  se sigue (5.55).

**Teorema 5.15**

Sea  $\alpha > -1$ ,  $1 \leq p < \infty$  y  $h(x) \geq 0$  tal que

$$(5.57) \quad \int_0^{1-\varepsilon} h(x)x^{\alpha p} dx < \infty$$

para algún  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Entonces

$$(5.58) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |j_n(x)|^p h(x) dx = M \int_0^1 h(x)x^{-p/2} dx$$

con

$$M = \frac{2^{p/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(t - \alpha\pi/2 - \pi/4)|^p dt.$$

Y si la integral de  $h(x)x^{\alpha p}$  no es finita sobre ningún intervalo  $(0, 1 - \varepsilon)$  entonces la integral de  $|j_n(x)|^p h(x)$  sobre  $(0, 1)$  es infinita para cada  $n$  (en particular, la desigualdad  $\geq$  en (5.58) es cierta en todo caso).

Demostración:

En primer lugar, es claro que si no existe  $\varepsilon \in (0, 1)$  cumpliendo (5.57) entonces, la integral de  $|j_n(x)|^p h(x)$  sobre  $(0, 1)$  es infinita para cada  $n$  sin más que utilizar (5.17). Asumamos pues (5.57), con lo cual, y como, por (5.19),  $j_n(x) \approx (\pi\alpha_n)^{1/2} J_\alpha(\alpha_n x)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , tendremos que demostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |(\pi\alpha_n)^{1/2} J_\alpha(\alpha_n x)|^p h(x) dx = M \int_0^1 h(x)x^{-p/2} dx.$$

Si tomamos  $A_n = (\pi\alpha_n)^{1/2} J_\alpha(\alpha_n x)$  y  $B_n = (2/x)^{1/2} \cos(\alpha_n x - \alpha\pi/2 - \pi/4)$ , utilizamos la desigualdad  $||A_n||_{p, h(x) dx} - ||B_n||_{p, h(x) dx} \leq ||A_n - B_n||_{p, h(x) dx}$ , y demostramos  $\lim_{n \rightarrow \infty} ||A_n - B_n||_{p, h(x) dx} = 0$  entonces tendremos que

$$(5.59) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |(\pi\alpha_n)^{1/2} J_\alpha(\alpha_n x)|^p h(x) dx \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |(2/x)^{1/2} \cos(\alpha_n x - \alpha\pi/2 - \pi/4)|^p h(x) dx, \end{aligned}$$

con lo cual el límite buscado queda reducido a otro en mejores condiciones para aplicarle el lema anterior.

Veamos pues en primer lugar

$$(5.60) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |(\alpha_n x)^{1/2} J_\alpha(\alpha_n x) - (2/\pi)^{1/2} \cos(\alpha_n x - \alpha\pi/2 - \pi/4)|^p h(x)x^{-p/2} dx = 0.$$

Tomamos  $n$  suficientemente grande para que  $\alpha_n > 1$ . Usando (5.18), cuando  $\alpha_n x \geq 1$  se tiene

$$\begin{aligned} |(\alpha_n x)^{1/2} J_\alpha(\alpha_n x) - (2/\pi)^{1/2} \cos(\alpha_n x - \alpha\pi/2 - \pi/4)| \\ \leq C(\alpha_n x)^{1/2} (\alpha_n x)^{-3/2} < C_1. \end{aligned}$$

Y cuando  $\alpha_n x \leq 1$ , utilizando la desigualdad triangular y (5.17) obtenemos

$$|(\alpha_n x)^{1/2} J_\alpha(\alpha_n x) - (2/\pi)^{1/2} \cos(\alpha_n x - \alpha\pi/2 - \pi/4)| \leq C((\alpha_n x)^{\alpha+1/2} + 1),$$

que a su vez, tanto si  $\alpha + 1/2 \geq 0$  como si  $\alpha + 1/2 \leq 0$  (en el primer caso ambas son  $\sim$  cte. y en el segundo basta usar  $\alpha_n x \geq x$ ), está acotado por  $C_1(x^{\alpha+1/2} + 1)$ . Entonces, sea cual sea lo que ocurra,  $\alpha_n x \geq 1$  o  $\alpha_n x \leq 1$ , se tendrá

$$\begin{aligned} & \left| (\alpha_n x)^{1/2} J_\alpha(\alpha_n x) - (2/\pi)^{1/2} \cos(\alpha_n x - \alpha\pi/2 - \pi/4) \right| \\ & \leq C \max\{1, x^{\alpha+1/2} + 1\} = C(x^{\alpha+1/2} + 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se cumple

$$(5.61) \quad \int_0^1 h(x)x^{-p/2} dx < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^{1-\varepsilon} x^{\alpha p+p/2} h(x)x^{-p/2} dx < \infty$$

estaremos en condiciones de aplicar a (5.60) el teorema de la convergencia dominada (notar que lo que le ocurra a la segunda integral en  $(1 - \varepsilon, 1)$  es lo mismo que lo que le ocurre a la primera, ya que  $x^a \sim$  cte. en  $(1 - \varepsilon, 1)$ ). La segunda las condiciones (5.61) es cierta por hipótesis y asumamos de momento la primera. Entonces, como  $\alpha_n x \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para todo  $x \in (0, 1)$ , el citado teorema conduce directamente a (5.60) sin más que apoyarse en (5.18).

Dispongámonos pues a calcular (5.59). Para ello basta hacer el cambio de variable  $t = 2\pi x$ , utilizar el lema anterior con

$$g(t) = \left| 2^{1/2} \cos\left(t - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right|^p, \quad f(t) = h\left(\frac{t}{2\pi}\right) \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-p/2} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{\alpha_n}{2\pi}$$

y se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |2^{1/2} \cos(\alpha_n x - \alpha\pi/2 - \pi/4)|^p h(x)x^{-p/2} dx = M \int_0^1 h(x)x^{-p/2} dx,$$

tal como buscábamos.

Para concluir el teorema, basta demostrar que el límite de (5.58) es  $\infty$  cuando no es cierta la primera condición de (5.61). Si  $h$  toma el valor  $\infty$  en un conjunto de medida positiva, todo es trivial. En otro caso, sea  $\{K_j\}_{j=1}^\infty$  sucesión creciente de conjuntos medibles en  $(0, 1)$  definidos mediante

$$K_j = \{x \in (0, 1) : x^{-p/2} h(x) \leq j\}$$

y sea  $K$  su unión. Entonces, se cumple

$$\int_{K_j} x^{-p/2} h(x) dx < \infty \quad \text{y} \quad \int_K x^{-p/2} h(x) dx = \infty.$$

Si denotamos  $h_j$  a  $h$  restringida a  $K_j$ , a cada  $h_j$  ya podemos aplicarle (5.58), luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_j} |j_n(x)|^p h(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |j_n(x)|^p h_j(x) dx = M \int_{K_j} h(x)x^{-p/2} dx.$$

Pero

$$\int_K |j_n(x)|^p h(x) dx \geq \int_{K_j} |j_n(x)|^p h(x) dx$$

para cada  $j$ , y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |j_n(x)|^p h(x) dx \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_j} |j_n(x)|^p h(x) dx = M \int_{K_j} h(x) x^{-p/2} dx,$$

que tiende a  $\infty$  cuando  $j \rightarrow \infty$  por el teorema de la convergencia monótona.

### Teorema 5.16

Sea  $\alpha > -1$  y  $1 < p < \infty$ . Para que  $\|S_n(f, x)U(x)\|_{p, x dx} \leq C \|f(x)V(x)\|_{p, x dx}$  uniformemente son condiciones necesarias

$$\begin{aligned} (i) \int_0^1 U(x)^p x^{\alpha p + 1} dx < \infty, & \quad (ii) \int_0^1 V(x)^{-q} x^{\alpha q + 1} dx < \infty, \\ (iii) \int_0^1 U(x)^p x^{1-p/2} dx < \infty, & \quad (iv) \int_0^1 V(x)^{-q} x^{1-q/2} dx < \infty. \end{aligned}$$

Demostración:

Si en (5.52) tomamos límites, sin más que utilizar el teorema anterior obtenemos (iii) y (iv). Con esto y (5.54) se obtiene (i) y (ii) (las integrales de (i) y (ii) tienen el mismo carácter que las de (iii) y (iv) sobre cualquier  $(1 - \varepsilon, 1)$  cuando  $\varepsilon \in (0, 1)$ ).

Notar que las condiciones (iii) y (iv) son despreciables frente a (i) y (ii) cuando  $\alpha \leq -1/2$  y al revés cuando  $\alpha \geq -1/2$ . Por otra parte, al aplicarlas a la situación de los Corolarios 5.9 y 5.13 nos proporcionan

### Corolario 5.17

Sean  $\alpha > -1$ ,  $1 < p < \infty$  y los pesos

$$U(x) = x^a (1-x)^b \prod_{k=1}^m |x - x_k|^{b_k}, \quad V(x) = x^A (1-x)^B \prod_{k=1}^m |x - x_k|^{B_k},$$

$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m < 1$ ,  $A \leq a$ ,  $B \leq b$  y  $B_k \leq b_k$ . Entonces, es equivalente que

$$\|S_n(f, x)U(x)\|_{p, x dx} \leq C \|f(x)V(x)\|_{p, x dx} \quad \text{uniformemente}$$

a que se verifiquen la desigualdades

$$\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{a}{4} + \frac{A}{4} \right| < \frac{a-A}{4} + \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2} \right\},$$

$$pb > -1, \quad pB < p-1, \quad pb_k > -1, \quad pB_k < p-1 \quad (1 \leq k \leq m).$$

Demostración:

Una implicación es inmediata a partir de los Corolarios 5.9 y 5.13 y la otra se deduce de las condiciones de integrabilidad del Teorema 5.16.



Vamos ahora a estudiar otro sistema ortogonal que está estrechamente relacionado con el de Bessel: el de Dini. Como en el caso del sistema de Bessel puede consultarse Watson [1] para estudiar su teoría general. De todas formas, veremos aquí un pequeño resumen. Dado  $\alpha > -1$  y  $\rho \in \mathbb{R}$ , se demuestra que la ecuación

$$xJ'_\alpha(x) + \rho J_\alpha(x) = 0$$

tiene como soluciones reales positivas una familia  $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$  cuyo único punto de acumulación es  $\infty$  y que suponemos ordenada en sentido creciente. Además, se verifica

$$\int_0^1 J_\alpha(\beta_n x) J_\alpha(\beta_m x) x dx = 0, \quad n \neq m,$$

y

$$\int_0^1 J_\alpha(\beta_n x)^2 x dx = \frac{1}{2\beta_n^2} \{J'_\alpha(\beta_n)^2 + (\beta_n^2 - \alpha^2)J_\alpha(\beta_n)^2\} > 0,$$

luego  $\{J_\alpha(\beta_n x)\}_{n=1}^\infty$  forma un sistema ortogonal en  $L^2((0, 1), x dx)$  y por tanto

$$\bar{j}_n(x) = \frac{J_\alpha(\beta_n x)}{\|J_\alpha(\beta_n x)\|_{2,x dx}}, \quad n \geq 1,$$

forman un sistema ortonormal. Pero no es en general completo. La completitud falla cuando  $\alpha + \rho \leq 0$ , y en este caso hace falta añadir al sistema otra función ortonormal a todas las demás para completarlo.

Esto está relacionado con que la ecuación

$$z^{-\alpha}(zJ'_\alpha(z) + \rho J_\alpha(z)) = 0$$

que tiene sólo a  $\{\pm\beta_n\}_{n=1}^\infty$  como raíces cuando  $\alpha + \rho > 0$ , admite además la raíz  $z = 0$  si  $\alpha + \rho = 0$  y un par de raíces complejas conjugadas  $\pm\lambda_0 i$  si  $\alpha + \rho < 0$ . Y esta relación se pone de manifiesto en que la función ortonormal a todas las demás que hay que añadir cuando  $\alpha + \rho = 0$  es

$$\bar{j}_0(x) = \sqrt{2(\alpha + 1)} x^\alpha$$

y cuando  $\alpha + \rho < 0$  es

$$\bar{j}_0(x) = \frac{I_\alpha(\lambda_0 x)}{\|I_\alpha(\lambda_0 x)\|_{2,x dx}},$$

donde

$$I_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k! \Gamma(\alpha + k + 1)} = e^{-i\alpha\pi/2} J_\alpha(ix)$$

se denomina función de Bessel modificada de orden  $\alpha$ .

Con todo esto, y si para no perder generalidad tomamos  $\bar{j}_0(x) = 0$  cuando  $\alpha + \rho > 0$ , tenemos que  $\{\bar{j}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  es un sistema ortonormal completo en  $L^2((0, 1), x dx)$ , que se denomina sistema de Dini.

Para cada función  $f$ , denotemos

$$\bar{S}_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \bar{c}_k \bar{j}_k(x), \quad \bar{c}_k = \bar{c}_k(f) = \int_0^1 \bar{j}_k(y) f(y) y dy,$$

las sumas parciales de su serie de Fourier y

$$\bar{K}_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \bar{j}_k(x) \bar{j}_k(y),$$

a los núcleos. Observar que las Propositiones 5.3 y 5.4 siguen siendo ciertas sin más que cambiar  $\alpha_n$  por  $\beta_n$ .

Vamos a estudiar, aprovechándonos de los resultados que ya conocemos sobre series de Bessel, cuándo los operadores

$$\bar{S}_n : L^p(V(x)^p x dx) \longrightarrow L^p(U(x)^p x dx)$$

son uniformemente acotados. Para ello, en primer lugar,

**Lema 5.18**

Sea  $\alpha > -1$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $N = N(n)$  (cumpliéndose  $N(n_2) \geq N(n_1)$  cuando  $n_2 \geq n_1$  y  $N(n) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ) tal que

$$\left| K_N(x, y) - \bar{K}_n(x, y) \right| \leq C \frac{x^{-1/2} y^{-1/2}}{2 - x - y} \quad \text{si } \alpha \geq -1/2$$

y

$$\left| K_N(x, y) - \bar{K}_n(x, y) \right| \leq C \frac{x^\alpha y^\alpha}{2 - x - y} \quad \text{si } \alpha \leq -1/2.$$

Demostración:

Simplemente un bosquejo. Para más detalles puede verse Benedek-Panzone [3]. Sea

$$B_n(x, y) = K_N(x, y) - \bar{K}_n(x, y).$$

En Watson [1, pág. 598 y § 18.31] se construye  $N$  a partir de  $n$  de tal modo que para números  $D_n$  pertenecientes al intervalo  $(\beta_n, \beta_{n+1})$  se verifica

$$(5.62) \quad B_n(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{D_n+i\infty}^{D_n-i\infty} \frac{2\omega J_\alpha(x\omega) J_\alpha(y\omega)}{J_\alpha(\omega) [\omega J'_\alpha(\omega) + \rho J_\alpha(\omega)]} d\omega.$$

Además, para  $\omega \in (D_n - i\infty, D_n + i\infty)$ , utilizando las fórmulas asintóticas (5.17) y (5.18) generalizadas para  $\omega \in \mathbb{C}$ , y denotando  $\eta = \text{Im}(\omega)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} |(x\omega)^{1/2} J_\alpha(x\omega)| &\leq C \left(1 + |x\omega|^{\min\{\alpha+1/2, 0\}}\right) e^{x|\eta|}, \\ |\omega^{1/2} J_\alpha(\omega)| &\geq C e^{|\eta|}. \end{aligned}$$

Y empleando  $-J_{\alpha+1}(\omega) + J_{\alpha-1}(\omega) = 2J'_\alpha(\omega)$  y de nuevo las fórmulas asintóticas resulta

$$|\omega^{1/2} J'_\alpha(\omega) + \rho J_\alpha(\omega)/\omega^{1/2}| \geq C e^{|\eta|}.$$

Aplicando todas estas desigualdades a (5.62) se obtiene

$$\begin{aligned} (xy)^{1/2} |B_n(x, y)| \\ \leq C \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+y-2)|\eta|} \left(1 + (xD_n)^{\min\{\alpha+1/2, 0\}}\right) \left(1 + (yD_n)^{\min\{\alpha+1/2, 0\}}\right) d\eta \\ \leq C_1 \frac{x^{\min\{\alpha+1/2, 0\}} y^{\min\{\alpha+1/2, 0\}}}{2 - x - y}, \end{aligned}$$

de donde se sigue el lema.

Y con esto,

**Teorema 5.19**

*En las condiciones del Teorema 5.6 o del Teorema 5.11 también se verifica la acotación uniforme*

$$\|\bar{S}_n(f, x)U(x)\|_{p, x dx} \leq C \|f(x)V(x)\|_{p, x dx}.$$

Demostración:

Como

$$\bar{S}_n(f, x) = S_N(f, x) - \int_0^1 (K_N(x, y) - \bar{K}_n(x, y)) f(y) y dy,$$

basta ver que el último sumando es acotado bajo las condiciones de los Teoremas 5.6 o 5.11 según corresponda. Pero, utilizando el lema anterior, sólo tenemos que probar

$$\int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{x^{-p/2} y^{-p/2}}{2 - x - y} |f(y)| y dy \right|^p U(x)^p x dx \leq C \int_0^1 |f(x)V(x)|^p x dx \quad \text{si } \alpha \geq -1/2$$

y

$$\int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{x^\alpha y^\alpha}{2 - x - y} |f(y)| y dy \right|^p U(x)^p x dx \leq C \int_0^1 |f(x)V(x)|^p x dx \quad \text{si } \alpha \leq -1/2.$$

Pero ambas acotaciones hemos visto ya que son ciertas pues la primera es la misma que aparece en  $i = 6$  del Teorema 5.6 y la segunda en  $i = 5$  del Teorema 5.11.

Y como consecuencia del teorema anterior, también son ciertos para series de Dini los correspondientes corolarios análogos a los de series de Bessel.

Por último,

**Teorema 5.20**

*Las condiciones necesarias que hemos obtenido para la acotación de series de Bessel siguen siendo ciertas para series de Dini.*

Demostración:

La única diferencia con las series de Bessel es que de la acotación del término  $S_1$  no se obtiene (5.54) para cada  $\varepsilon \in (0, 1)$  sino simplemente para algún  $\varepsilon \in (0, 1)$  (se podría precisar  $\varepsilon$  conociendo el tamaño de  $\beta_1$  y de  $\alpha_1$ ). Pero en todos los teoremas en que se utiliza (5.54) sólo necesitamos que se cumpla para algún  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

## CAPÍTULO VI

### Series de Fourier de polinomios de Hermite generalizados

Hasta ahora hemos tratado únicamente sobre la convergencia de diversos sistemas ortogonales respecto a medidas cuyo soporte es acotado. Pero existen dos sistemas muy conocidos que no están en las condiciones anteriores: los polinomios de Laguerre y de Hermite. Los polinomios de Laguerre son ortogonales respecto del peso  $e^{-x}x^\alpha$ ,  $\alpha > -1$ , en  $[0, \infty)$  y los de Hermite ortogonales respecto de  $e^{-x^2}$  en  $(-\infty, \infty)$ . Se denominan funciones de Laguerre o Hermite a los correspondientes polinomios multiplicados por la raíz cuadrada del peso, resultando así dos sistemas ortogonales respecto de la medida de Lebesgue en  $[0, \infty)$  y en  $(-\infty, \infty)$ .

Pollard [3] demostró que las series de Fourier de polinomios de Hermite y de Laguerre sólo convergen en  $L^p(\mathbb{R}, e^{-x^2})$  o  $L^p([0, \infty), e^{-x}x^\alpha)$  cuando  $p = 2$ . Más adelante, Askey-Wainger [1] probaron que las series de Fourier de funciones de Hermite convergen en  $L^p(\mathbb{R}, dx)$  cuando  $4/3 < p < 4$ , y que lo mismo ocurría con las funciones de Laguerre si  $\alpha \geq 0$ . Esto se traduce en la acotación uniforme de las sumas parciales de la serie de Fourier de polinomios como operadores en  $L^p(\mathbb{R}, e^{-x^2 p/2})$  para el primer caso y en  $L^p([0, \infty), e^{-x p/2} x^{\alpha p/2})$  para el segundo.

Posteriormente, Muckenhoupt [2] demostró que, para ningún  $p \leq 4/3$  o  $p \geq 4$  era posible encontrar un peso  $v(x) > 0$  a.e. tal que las sumas parciales de series de Fourier de polinomios de Hermite fuesen uniformemente acotadas como operadores en  $L^p(\mathbb{R}, v(x))$ . Análogamente para Laguerre incluso con  $\alpha > -1$ . Vista esta imposibilidad, el mismo Muckenhoupt [3] se dedica a estudiar la acotación uniforme entre espacios de tipo  $L^p$  con pesos distintos, logrando así resultados que aseguran la convergencia de ambas series en  $1 < p < \infty$ . En particular, generalizó los resultados de Askey-Wainger a todo  $\alpha > -1$  en el caso de Laguerre.

Por último, para que pudiera haber acotación uniforme con un solo peso para valores de  $p$  fuera del intervalo  $(4/3, 4)$ , Poiani se dedica a estudiar lo que ocurre no con la serie de Fourier sino con sus medias de Cesàro de orden 1.

Tanto para Laguerre como para Hermite, todas las demostraciones anteriores a la de Poiani consistían en descomponer los núcleos de la serie de Fourier en sumandos y, utilizando estimaciones de los polinomios ortogonales, estudiar la acotación de los operadores que aparecen. Estas demostraciones son, ante todo, bastante extensas y complicadas. Lo mismo ocurre con la demostración de Poiani para las medias de Cesàro en el caso de Laguerre. Pero para Hermite, lo que hace es aprovechar unas conocidas relaciones entre los polinomios de Laguerre y Hermite para encontrar relaciones entre las medias de Cesàro de sus respectivas series de

Fourier y así estudiar lo que ocurre en un caso como consecuencia sencilla de lo que ocurre en el otro.

Existe otro sistema ortogonal cuyos polinomios también se pueden escribir en función de los de Laguerre. Está constituido por los polinomios ortogonales respecto al peso  $|x|^{2\mu}e^{-x^2}$  en  $\mathbb{R}$ , donde  $\mu > -1/2$ , y se denominan polinomios de Hermite generalizados. Si, tal como hicimos en el Capítulo I, denotamos  $\{H_n^{(\mu)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  a los polinomios de Hermite generalizados con la caracterización de que su coeficiente director sea  $2^n$  y  $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  a los de Laguerre con coeficiente director  $(-1)^n/n!$ , la relación que hay entre ellos es

$$(6.1) \quad H_{2m}^{(\mu)}(x) = (-1)^m 2^{2m} m! L_m^{(\mu-1/2)}(x^2),$$

$$(6.2) \quad H_{2m+1}^{(\mu)}(x) = (-1)^m 2^{2m+1} m! x L_m^{(\mu+1/2)}(x^2).$$

Nuestro propósito en este capítulo es aprovechar estas relaciones para estudiar la convergencia de las series de Hermite generalizadas utilizando para ello lo que se conoce para series de Laguerre.

En primer lugar, la norma al cuadrado de estos polinomios tal como los hemos tomado es

$$\int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)^2 e^{-x} x^{\alpha} dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(\mu)}(x)^2 e^{-x^2} |x|^{2\mu} dx = 2^{2n} \left[ \frac{n}{2} \right]! \Gamma \left( \left[ \frac{n+1}{2} \right] + \mu + \frac{1}{2} \right),$$

donde  $[x]$  denota la parte entera de  $x$  (ver Capítulo I y Chihara [1, pág. 157]).

Por lo tanto sus núcleos respectivos podremos expresarlos como

$$(6.3) \quad K_n^{(\alpha)}(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{k!}{\Gamma(k + \alpha + 1)} L_k^{(\alpha)}(x) L_k^{(\alpha)}(y)$$

y

$$(6.4) \quad D_n^{(\mu)}(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k} [k/2]! \Gamma([k/2] + \mu + 1/2)} H_k^{(\mu)}(x) H_k^{(\mu)}(y).$$

Con esto,

### Lema 6.1

*Se verifica*

$$D_{2n}^{(\mu)}(x, y) = K_n^{(\mu-1/2)}(x^2, y^2) + xy K_{n-1}^{(\mu+1/2)}(x^2, y^2),$$

$$D_{2n+1}^{(\mu)}(x, y) = K_n^{(\mu-1/2)}(x^2, y^2) + xy K_n^{(\mu+1/2)}(x^2, y^2)$$

(con el convenio  $K_{-1}^{(\mu+1/2)}(x^2, y^2) = 0$ ).

Demostración:

Veamos únicamente lo que ocurre con  $D_{2n}^{(\mu)}(x, y)$ , ya que el otro caso es análogo. Por (6.4), (6.1) y (6.2) es claro que

$$\begin{aligned} D_{2n}^{(\mu)}(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{((-1)^k 2^{2k} k!)^2}{2^{4k} [2k/2]! \Gamma([(2k+1)/2] + \mu + 1/2)} L_k^{(\mu-1/2)}(x^2) L_k^{(\mu-1/2)}(y^2) \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{((-1)^k 2^{2k+1} k!)^2}{2^{4k+2} [(2k+1)/2]! \Gamma([(2k+2)/2] + \mu + 1/2)} xy L_k^{(\mu+1/2)}(x^2) L_k^{(\mu+1/2)}(y^2) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k!}{\Gamma(k + \mu + 1/2)} L_k^{(\mu-1/2)}(x^2) L_k^{(\mu-1/2)}(y^2) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{\Gamma(k + \mu + 3/2)} xy L_k^{(\mu+1/2)}(x^2) L_k^{(\mu+1/2)}(y^2), \end{aligned}$$

y empleando (6.3) se sigue la fórmula buscada.

Para que no haya lugar a confusión, a las sumas parciales de la serie de Fourier las denotaremos  $S_n^{(\alpha)}(f, x)$  cuando estén tomadas respecto al sistema  $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^\infty$  y  $U_n^{(\mu)}(f, x)$  cuando lo estén respecto de  $\{H_n^{(\mu)}(x)\}_{n=0}^\infty$ . Es decir,

$$(6.5) \quad S_n^{(\alpha)}(f, x) = \int_0^\infty f(y) K_n^{(\alpha)}(x, y) e^{-y} y^\alpha dy$$

y

$$(6.6) \quad U_n^{(\mu)}(f, x) = \int_{-\infty}^\infty f(y) D_n^{(\mu)}(x, y) e^{-y^2} |y|^{2\mu} dy.$$

Por otra parte, por ser el peso  $e^{-x^2} |x|^{2\mu}$  par, los polinomios de Hermite generalizados cumplen relación de simetría

$$(6.7) \quad H_n^{(\mu)}(-x) = (-1)^n H_n^{(\mu)}(x).$$

A continuación, vamos a exponer una serie de resultados ya conocidos que serán los que utilizaremos más adelante en las demostraciones del presente capítulo.

**Teorema 6.2**

*Para cada  $\alpha > -1$ , las series de Fourier de polinomios de Laguerre  $S_n^{(\alpha)}(f, x)$  sólo convergen en  $L^p([0, \infty), e^{-x} x^\alpha)$  cuando  $p = 2$ .*

Demostración:

Ver Pollard [3].

**Teorema 6.3**

Para cada  $\alpha \geq 0$ , se verifica

$$\|S_n^{(\alpha)}(f, x)e^{-x/2}x^{\alpha/2}\|_p \leq C\|f(x)e^{-x/2}x^{\alpha/2}\|_p \iff 4/3 < p < 4.$$

Y la acotación uniforme anterior es equivalente a que la serie de Fourier de funciones de Laguerre  $\{L_n^{(\alpha)}(x)e^{-x/2}x^{\alpha/2}\}_{n=0}^{\infty}$ , ortogonales en  $L^2([0, \infty), dx)$ , converja en  $L^p([0, \infty), dx)$ .

Demostración:

Ver (1.5) y (1.6) con  $r = 0$  y Askey-Wainger [1].

**Teorema 6.4**

Sea  $p$  fijo satisfaciendo  $1 \leq p \leq 4/3$  o  $4 \leq p \leq \infty$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\omega(x)$  un peso en  $(0, \infty)$  y para cada  $f(x)$  tal que  $\|f(x)\omega(x)\|_p < \infty$ , sea  $c_n(f)L_n^{(\alpha)}(x)$  el  $n$ -ésimo término de su serie de Laguerre. Si existe  $C$  independiente de  $f(x)$  cumpliendo  $\|c_n(f)L_n^{(\alpha)}(x)\omega(x)\|_p \leq C\|f(x)\omega(x)\|_p \forall n \geq C$ , entonces  $\omega(x) = 0$  a.e.

Demostración:

Ver Muckenhoupt [2].

**Teorema 6.5**

Sean  $p, \alpha, \omega(x), f(x)$  y  $c_n(f)$  como en el teorema anterior. Si se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|c_n(f)L_n^{(\alpha)}(x)\omega(x)\|_p = 0$$

$\forall f$  tal que  $\|f\omega\|_p < \infty$ , entonces  $\omega(x) = 0$  a.e.

Demostración:

Ver Muckenhoupt [2].

En particular, es obvio que cualquiera de los dos resultados anteriores implica que no es posible la convergencia en media de la serie de Fourier de polinomios de Laguerre con  $\alpha > -1$ , es decir que no es posible

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(S_n^{(\alpha)}(f, x) - f(x))\omega(x)\|_p = 0,$$

fuera del intervalo  $(4/3, 4)$  para ningún peso  $\omega(x)$  no nulo a.e.

**Observación 6.6**

Una vez establecida la imposibilidad de que  $\|S_n^{(\alpha)}(f, x)\omega(x)\|_p \leq C\|f(x)\omega(x)\|_p$  cuando  $p \notin (4/3, 4)$ , Muckenhoupt [3] se plantea si es posible que eligiendo los pesos  $u(x), v(x)$  adecuados se verifique

$$\|S_n^{(\alpha)}(f, x)u(x)\|_p \leq C\|f(x)v(x)\|_p$$



para algún  $p$  fuera de  $(4/3, 4)$ .

Él mismo demuestra que si dos funciones  $u(x)$ ,  $v(x)$  no nulas a.e. verifican la desigualdad anterior entonces existe una constante  $C$  tal que  $\forall t \geq 1$  se cumple

$$(6.8) \quad \int_{1/t}^t |u(x)x^{-1/4-\alpha/2}e^{x/2}|^p dx \leq Ct^{p/2}$$

y

$$(6.9) \quad \int_{1/t}^t |v(x)x^{1/4-\alpha/2}e^{x/2}|^q dx \leq Ct^{q/2}.$$

Esto implica que la parte exponencial de  $u(x)$  y  $v(x)$  deba ser forzosamente  $e^{-x/2}$ . Entonces, si denotamos

$$\omega(x; a, b) = e^{-x/2}x^{\alpha/2} \left( \frac{x}{1+x} \right)^a (1+x)^b,$$

parece “natural” tomar  $u(x)$  y  $v(x)$  de la forma  $\omega(x; a, b)$  y  $\omega(x; A, B)$ .

Por otra parte, sería deseable mantener  $u$  y  $v$  tan próximos como fuera posible. Entonces, para que en los puntos frontera  $4/3$  y  $4$  pueda ser  $B = b$ , en este caso se toma  $v(x) = \omega(x; a, b)(1 + \log^+ |x|)$ , donde  $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$ , que está más cerca de  $\omega(x; a, b)$  que  $\omega(x; a, B)$  con  $B > b$ .

Notar además que las condiciones (6.8) y (6.9) demuestran que el sistema  $\{L_n^{(\alpha)}(x)(e^{-x}x^\alpha)^{(1-r)/2}\}_{n=0}^\infty$ , ortogonal en  $L^2([0, \infty), e^{-rx}x^{\alpha r})$  tal como se veía en (1.4) y ss., sólo puede ser base de  $L^p([0, \infty), e^{-rx}x^{\alpha r})$  para algún  $p \neq 2$  cuando  $r = 0$ .

**Teorema 6.7**

Sea  $1 < p < \infty$ ,  $\alpha > -1$ , y los pesos

$$u(x) = e^{-x/2}x^{\alpha/2} \left( \frac{x}{1+x} \right)^a (1+x)^b,$$

$$v(x) = e^{-x/2}x^{\alpha/2} \left( \frac{x}{1+x} \right)^A (1+x)^B (1 + \log^+ x)^\beta,$$

donde  $\beta = 1$  si  $b = B$  y  $p = 4/3$  o  $4$  y en otro caso  $\beta = 0$ . Para que las sumas parciales de la serie de Fourier de polinomios de Laguerre  $S_n^{(\alpha)}(f, x)$  verifiquen

$$(6.10) \quad \int_0^\infty |S_n^{(\alpha)}(f, x)u(x)|^p dx \leq C \int_0^\infty |f(x)v(x)|^p dx$$

con  $C$  independiente de  $n$  y  $f$ , es condición suficiente que se cumpla

$$(6.11) \quad a > -1/p + \max\{-\alpha/2, 1/4\}, \quad A < 1 - 1/p - \max\{-\alpha/2, 1/4\}, \quad A \leq a,$$

$$(6.12) \quad \begin{cases} b < 3/4 - 1/p, & \text{si } 1 < p \leq 4, \\ b \leq 7/12 - 1/(3p), & \text{si } 4 < p < \infty, \end{cases}$$

$$(6.13) \quad \begin{cases} B \geq -1/4 - 1/(3p), & \text{si } 1 < p < 4/3, \\ B > 1/4 - 1/p, & \text{si } 4/3 \leq p < \infty, \end{cases}$$

$$(6.14) \quad \begin{cases} b \leq B + 1/2 - 2/(3p), & \text{si } 1 < p < 4/3, \\ b \leq B, & \text{si } 4/3 \leq p \leq 4, \\ b \leq B - 1/6 + 2/(3p), & \text{si } 4 < p < \infty, \end{cases}$$

exigiendo además que si en (6.14) se tiene la igualdad entonces esta no ocurre en (6.12) o (6.13).

Además, si alguna de las desigualdades (6.11) a (6.14) no se verifica, con la excepción de las desigualdades estrictas para  $B$  en los casos en que  $p = 4/3$  o  $4$  y  $\beta = 1$ , entonces no se satisface la acotación uniforme (6.10). En los casos en que  $\beta = 1$  ( $b = B$  y  $p = 4/3$  o  $4$ ), tampoco es cierto (6.10) si se hubiera tomado  $\beta = 0$ .

Demostración:

Ver Muckenhoupt [3, Teoremas 7 y 15].

En particular, este teorema extiende los resultados del Teorema 6.3 al caso  $\alpha > -1$ . Para  $\alpha \geq -1/2$ , se sigue manteniendo el intervalo de convergencia en media  $4/3 < p < 4$ . Y, cuando  $-1 < \alpha \leq -1/2$ , se obtiene que

$$\|S_n^{(\alpha)}(x)e^{-x/2}x^{\alpha/2}\|_p \leq C\|f(x)e^{-x/2}x^{\alpha/2}\|_p \iff \frac{2}{\alpha+2} < p < \frac{-2}{\alpha}.$$

Con todo esto, vamos a estudiar lo que ocurre con las series de polinomios de Hermite generalizados.

### **Teorema 6.8**

*Sólo se verifica la acotación uniforme*

$$(6.15) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |U_n^{(\mu)}(f, x)|^p e^{-x^2} |x|^{2\mu} dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p e^{-x^2} |x|^{2\mu} dx$$

cuando  $p = 2$ .

Demostración:

Si se verificase (6.15), en particular también sería cierto para  $U_{2n}^{(\mu)}(f, x)$  y  $f$  par. Pero, por el Lema 6.1 se tiene

$$\begin{aligned} U_{2n}^{(\mu)}(f, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_n^{(\mu-1/2)}(x^2, y^2) f(y) e^{-y^2} |y|^{2\mu} dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} K_{n-1}^{(\mu+1/2)}(x^2, y^2) xy f(y) e^{-y^2} |y|^{2\mu} dy, \end{aligned}$$

y el segundo sumando se anula ya que  $f$  es par. Entonces, debería cumplirse

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty K_n^{(\mu-1/2)}(x^2, y^2) f(y) e^{-y^2} |y|^{2\mu} dy \right|^p e^{-x^2} |x|^{2\mu} dx \leq C \int_0^\infty |f(x)|^p e^{-x^2} |x|^{2\mu} dx.$$

Haciendo el cambio de variable  $x^2 = t$ ,  $y^2 = z$ , la expresión anterior se transforma en

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty K_n^{(\mu-1/2)}(t, z) f(z^{1/2}) e^{-z} z^{\mu-1/2} dz \right|^p e^{-t} t^{\mu-1/2} dt \leq C \int_0^\infty |f(t^{1/2})|^p e^{-t} t^{\mu-1/2} dt,$$

que sólo es cierto cuando  $p = 2$  por el Teorema 6.2.

**Observación 6.9**

Análogamente pueden demostrarse resultados del tipo de los Teoremas 6.3, 6.4 y 6.5, así como condiciones necesarias del tipo de (6.8) y (6.6). En particular, se obtiene que no es posible una acotación uniforme del tipo

$$\int_{-\infty}^\infty |U_n^{(\mu)}(f, x)|^p \omega(x) dx \leq C \int_{-\infty}^\infty |f(x)|^p \omega(x) dx$$

cuando  $p \notin (4/3, 4)$  salvo si  $\omega(x) = 0$  a.e.; y también que el sistema  $\{H_n^{(\mu)}(x) \times (e^{-x^2} |x|^{2\mu})^{(1-r)/2}\}_{n=0}^\infty$ , ortogonal en  $L^2(\mathbb{R}, e^{-rx^2} |x|^{2r\mu})$ , sólo puede ser base del espacio  $L^p(\mathbb{R}, e^{-rx^2} |x|^{2r\mu})$  para algún  $p \neq 2$  cuando  $r = 0$ .

**Teorema 6.10**

Sea  $1 < p < \infty$ ,  $\mu > 1/2$  y los pesos

$$u(x) = e^{-x^2/2} |x|^\mu \left( \frac{|x|}{1+|x|} \right)^r (1+|x|)^s,$$

$$v(x) = e^{-x^2/2} |x|^\mu \left( \frac{|x|}{1+|x|} \right)^R (1+|x|)^S (1+\log^+ |x|)^\beta$$

donde  $\beta = 1$  si  $s = S$  y  $p = 4/3$  o  $4$  y en otro caso  $\beta = 0$ . Para que las sumas parciales de la serie de Fourier de polinomios de Hermite generalizados  $U_n^{(\mu)}(f, x)$  verifiquen

$$(6.16) \quad \int_{-\infty}^\infty |U_n^{(\mu)}(f, x) u(x)|^p dx \leq C \int_{-\infty}^\infty |f(x) v(x)|^p dx$$

con  $C$  independiente de  $n$  y  $f$ , es condición suficiente que se cumpla

$$(6.17) \quad r > -1/p + \max\{-\mu, 0\}, \quad R < 1 - 1/p - \max\{-\mu, 0\}, \quad R \leq r,$$

$$(6.18) \quad \begin{cases} s < 1 - 1/p, & \text{si } 1 < p \leq 4, \\ s \leq 2/3 + 1/(3p), & \text{si } 4 < p < \infty, \end{cases}$$

$$(6.19) \quad \begin{cases} S \geq -1 + 1/(3p), & \text{si } 1 < p < 4/3, \\ S > -1/p, & \text{si } 4/3 \leq p < \infty, \end{cases}$$

$$(6.20) \quad \begin{cases} s \leq S + 1 - 4/(3p), & \text{si } 1 < p < 4/3, \\ s \leq S, & \text{si } 4/3 \leq p \leq 4, \\ s \leq S - 1/3 + 4/(3p), & \text{si } 4 < p < \infty, \end{cases}$$

exigiendo además que si en (6.20) se tiene la igualdad entonces ésta no ocurre en (6.18) o (6.19).

Además, si alguna de las desigualdades (6.17) a (6.20) no se verifica, con la excepción de las desigualdades estrictas para  $S$  en los casos en que  $p = 4/3$  o  $4$  y  $\beta = 1$ , entonces no se satisface la acotación uniforme (6.16). En los casos en que  $\beta = 1$ , tampoco es cierto (6.16) si se hubiera tomado  $\beta = 0$ .

#### Demostración:

Veamos en primer lugar que las desigualdades (6.17) a (6.20) son suficientes. Por el Lema 6.1 se tiene

$$U_{2n}^{(\mu)}(f, x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n^{(\mu-1/2)}(x^2, y^2) f(y) e^{-y^2} |y|^{2\mu} dy \\ + \int_{-\infty}^{\infty} K_{n-1}^{(\mu+1/2)}(x^2, y^2) xy f(y) e^{-y^2} |y|^{2\mu} dy$$

y

$$U_{2n+1}^{(\mu)}(f, x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n^{(\mu-1/2)}(x^2, y^2) f(y) e^{-y^2} |y|^{2\mu} dy \\ + \int_{-\infty}^{\infty} K_n^{(\mu+1/2)}(x^2, y^2) xy f(y) e^{-y^2} |y|^{2\mu} dy.$$

Entonces, para demostrar

$$\|U_n^{(\mu)}(f, x)u(x)\|_p \leq C\|f(x)v(x)\|_p$$

basta con que probemos

$$(6.21) \quad \left\| \left( \int_{-\infty}^{\infty} K_n^{(\mu-1/2)}(x^2, y^2) f(y) e^{-y^2} |y|^{2\mu} dy \right) u(x) \right\|_p \leq C \|f(x)v(x)\|_p$$

y

$$(6.22) \quad \left\| \left( \int_{-\infty}^{\infty} K_n^{(\mu+1/2)}(x^2, y^2) xy f(y) e^{-y^2} |y|^{2\mu} dy \right) u(x) \right\|_p \leq C \|f(x)v(x)\|_p.$$

Además, por simetría, podemos estimar las dos normas de la izquierda únicamente para  $x \in (0, \infty)$ .

Comencemos por (6.21). Por sencillez de notación supondremos  $\beta = 0$  (cuando  $\beta = 1$  todo es análogo sin más que tener en cuenta que  $1 + \log^+ |x|^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \log^+ |x| \sim 1 + \log^+ |x| \sim 1 + 2 \log^+ |x| = 1 + \log^+ |x|^2$ ).

Elevando a  $p$  y haciendo el cambio de variable  $x^2 = t$ ,  $y^2 = z$ , la parte izquierda de (6.21) es igual a

$$(6.23) \quad 2^{-p-1} \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} [f(z^{1/2}) + f(-z^{1/2})] K_n^{(\mu-1/2)}(t, z) e^{-z} z^{\mu-1/2} dz \right|^p \times e^{-tp/2} t^{\mu p/2-1/2} \left( \frac{t^{1/2}}{1+t^{1/2}} \right)^{rp} (1+t^{1/2})^{sp} dt.$$

Pero es claro que

$$t^{\mu p/2-1/2} \left( \frac{t^{1/2}}{1+t^{1/2}} \right)^{rp} (1+t^{1/2})^{sp} = t^{(\mu/2-1/4)p} \left( \frac{t}{1+t} \right)^{ap} (1+t)^{bp} h(t)$$

donde

$$h(t) = t^{rp/2-1/2+p/4-ap} (1+t)^{ap-bp} (1+t^{1/2})^{sp-rp}.$$

Entonces, si tomamos

$$(6.24) \quad a = r/2 - 1/(2p) + 1/4 \quad y \quad b = s/2 - 1/(2p) + 1/4$$

se tiene que  $h(t) \sim \text{cte.}$  en  $(0, \infty)$ , y por tanto (6.23) se puede acotar, salvo constante, por

$$(6.25) \quad \int_0^{\infty} \left| \int_0^{\infty} [f(z^{1/2}) + f(-z^{1/2})] K_n^{(\mu-1/2)}(t, z) e^{-z} z^{\mu-1/2} dz \right|^p \times e^{-tp/2} t^{(\mu/2-1/4)p} \left( \frac{t}{1+t} \right)^{ap} (1+t)^{bp} dt.$$

Denotemos

$$(6.26) \quad A = R/2 - 1/(2p) + 1/4 \quad y \quad B = S/2 - 1/(2p) + 1/4.$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar el Teorema 6.7 con  $\alpha = \mu - 1/2$ ,  $a, b$  como en (6.24) y  $A, B$  como en (6.26). Así se obtiene que las desigualdades (6.17) a (6.20) son suficientes para que (6.25) esté acotado por

$$C \int_0^\infty |f(t^{1/2}) + f(-t^{1/2})|^p e^{-tp/2} t^{(\mu/2-1/4)p} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{Ap} (1+t)^{Bp} dt.$$

Deshaciendo ahora el cambio de variable  $x^2 = t$ , la expresión anterior queda

$$(6.27) \quad 2C \int_{-\infty}^\infty |f(x)|^p e^{-px^2/2} |x|^{(\mu-1/2)p} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{Ap} (1+x^2)^{Bp} |x| dx.$$

Por otra parte, con  $A$  y  $B$  tal como los hemos tomado en (6.26) se tiene que

$$|x|^{(\mu-1/2)p} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{Ap} (1+x^2)^{Bp} |x| \sim |x|^{\mu p} \left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^{Rp} (1+|x|)^{Sp} \quad \text{en } \mathbb{R}$$

y por tanto (6.27) se acota, salvo constante, por

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^p e^{-px^2/2} |x|^{\mu p} \left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^{Rp} (1+|x|)^{Sp} dx,$$

tal como buscábamos en (6.21).

El desarrollo para llegar a (6.22) es similar pero con  $\alpha = \mu + 1/2$ , y usando la función  $[f(z^{1/2}) + f(-z^{1/2})]/z^{1/2}$  en lugar de  $[f(z^{1/2}) + f(-z^{1/2})]$ . La única diferencia por reseñar es que en este caso las desigualdades de (6.11) se traducen no en (6.17) sino en

$$r > -1/p, \quad R < 1 - 1/p, \quad R \leq r,$$

que no aportan ninguna condición nueva pues son menos exigentes que las de (6.17).

Por último, simplemente decir que el estudio de las condiciones necesarias es similar al realizado en el Teorema 6.8.

En particular, el teorema anterior incluso generaliza el resultado de Muckenhoupt [3] para polinomios de Hermite ( $\mu = 0$ ), ya que allí sólo se estudia el caso  $r = R = 0$ .

### Corolario 6.11

El sistema  $\{H_n^{(\mu)}(x)e^{-x^2/2}|x|^\mu\}_{n=0}^\infty$ , ortogonal en  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ , es base de  $L^p(\mathbb{R}, dx)$  si y sólo si  $p \in (4/3, 4)$  cuando  $\mu \geq -1/4$ , y si y sólo si  $1/(1+\mu) < p < 1/(-\mu)$  cuando  $-1/2 < \mu \leq -1/4$ .

### Demostración:

Tomar  $r = s = R = S = \beta = 0$  en el teorema anterior.

A la vista de que no es posible encontrar una acotación como la de (6.10) con  $u = v \neq 0$  a.e. Para valores de  $p$  fuera del intervalo  $(4/3, 4)$ , Poiani [1] se plantea si esto es posible no para la serie de Fourier, sino para sus medias de Cesàro de orden 1. Entonces, apoyándonos en el trabajo de Poiani, vamos a ver lo que ocurre para las series de polinomios de Hermite generalizados.

Denotaremos

$$\sigma_n^{(\alpha)}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k^{(\alpha)}(f, x)$$

a las medias de Cesàro de orden 1 de la serie de Fourier respecto al sistema  $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  y denotaremos

$$\tau_n^{(\mu)}(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_k^{(\mu)}(f, x)$$

a las relativas al sistema  $\{H_n^{(\mu)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ . Entonces,

$$\sigma_n^{(\alpha)}(f, x) = \int_0^{\infty} f(y) K_{n,1}^{(\alpha)}(x, y) e^{-y} y^{\alpha} dy$$

y

$$\tau_n^{(\mu)}(f, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) D_{n,1}^{(\mu)}(x, y) e^{-y^2} |y|^{2\mu} dy,$$

donde

$$(6.28) \quad K_{n,1}^{(\alpha)}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} K_k^{(\alpha)}(x, y)$$

y

$$(6.29) \quad D_{n,1}^{(\mu)}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k^{(\mu)}(x, y).$$

Lo primero que tenemos que hacer es encontrar una fórmula que relacione  $K_{n,1}^{(\alpha)}(x, y)$  y  $D_{n,1}^{(\mu)}(x, y)$ , los núcleos de las medias de Cesàro de orden 1 respecto de los dos sistemas. Veámoslo a continuación:

**Lema 6.12**

*Se verifica*

$$D_{2n,1}^{(\mu)}(x, y) = K_{n,1}^{(\mu-1/2)}(x^2, y^2) + \frac{n-1}{n} \frac{xy}{2} K_{n-1,1}^{(\mu+1/2)}(x^2, y^2) + \frac{xy}{2} K_{n,1}^{(\mu+1/2)}(x^2, y^2),$$

$$D_{2n+1,1}^{(\mu)}(x, y) = \frac{2n}{2n+1} xy K_{n,1}^{(\mu+1/2)}(x^2, y^2) + \frac{n+1}{2n+1} K_{n+1,1}^{(\mu-1/2)}(x^2, y^2) + \frac{n}{2n+1} K_{n,1}^{(\mu-1/2)}(x^2, y^2)$$

(con el convenio  $K_{-1,1}^{(\mu+1/2)}(x^2, y^2) = 0$ ).

Demostración:

Utilizando (6.29) y el Lema 6.1 se tiene

$$\begin{aligned} D_{2n,1}^{(\mu)}(x,y) &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} D_k^{(\mu)}(x,y) = \frac{1}{2n} \sum_{m=0}^{n-1} D_{2m}^{(\mu)}(x,y) + \frac{1}{2n} \sum_{m=0}^{n-1} D_{2m+1}^{(\mu)}(x,y) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{m=0}^{n-1} K_m^{(\mu-1/2)}(x^2,y^2) + \frac{xy}{2n} \sum_{m=0}^{n-1} K_{m-1}^{(\mu+1/2)}(x^2,y^2) \\ &\quad + \frac{1}{2n} \sum_{m=0}^{n-1} K_m^{(\mu-1/2)}(x^2,y^2) + \frac{xy}{2n} \sum_{m=0}^{n-1} K_m^{(\mu+1/2)}(x^2,y^2), \end{aligned}$$

y utilizando (6.28) obtenemos la expresión buscada para  $D_{2n,1}^{(\mu)}(x,y)$ . El tratamiento para  $D_{2n+1,1}^{(\mu)}(x,y)$  es similar.

### **Teorema 6.13**

Sea  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\alpha > -1$  y el peso

$$u(x) = e^{-x/2} x^{\alpha/2} \left( \frac{x}{1+x} \right)^a (1+x)^b.$$

Supongamos que se verifican las condiciones

$$(6.30) \quad -1/p - \min\{\alpha/2, 1/4\} < a < 1 - 1/p + \min\{\alpha/2, 1/4\},$$

$$(6.31) \quad \begin{cases} b \leq -1/p + 7/4, & \text{si } 1 \leq p \leq 4, \\ b \leq -1/(3p) + 19/12, & \text{si } 4 < p \leq \infty, \end{cases}$$

$$(6.32) \quad \begin{cases} b \geq -1/(3p) - 5/4, & \text{si } 1 \leq p < 4/3, \\ b \geq -1/p - 3/4, & \text{si } 4/3 \leq p \leq \infty, \end{cases}$$

$$(6.33) \quad \begin{cases} a + b \leq -2/p + 5/2, & \text{si } 1 \leq p \leq 4, \\ a + b \leq -4/(3p) + 7/3, & \text{si } 4 < p \leq \infty, \end{cases}$$

$$(6.34) \quad \begin{cases} a + b \geq -4/(3p) - 1, & \text{si } 1 \leq p < 4/3, \\ a + b \geq -2/p - 1/2, & \text{si } 4/3 \leq p \leq \infty, \end{cases}$$

exigiendo además



- La igualdad no puede ocurrir en las primeras partes de (6.31) y (6.33) si  $p = 4$  o  $a = 3/4 - 1/p$ , a menos que  $p = 1$ .
- La igualdad no puede ocurrir en las segundas partes de (6.32) y (6.34) si  $p = 4/3$  o  $a = 1/4 - 1/p$ , a menos que  $p = \infty$ .

Entonces, existe una constante  $C$  independiente de  $n$  y  $f$  tal que

$$\|\sigma_n^{(\alpha)}(f, x)u(x)\|_p \leq C\|f(x)u(x)\|_p,$$

donde  $\|\cdot\|_p$  denota la norma usual (sin peso) en  $(0, \infty)$ .

Demostración:

Ver Poiani [1, Teorema 1].

Apoyándonos en este resultado obtenemos el siguiente:

**Teorema 6.14**

Sea  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\mu > 1/2$  y el peso

$$u(x) = e^{-x^2/2}|x|^\mu \left(\frac{|x|}{1+|x|}\right)^r (1+|x|)^s.$$

Supongamos que se verifica

$$(6.35) \quad -1/p - \min\{\mu, 1\} < r < 1 - 1/p + \min\{\mu, 1\},$$

$$(6.36) \quad \begin{cases} s \leq -1/p + 3, & \text{si } 1 \leq p \leq 4, \\ s \leq 1/(3p) + 8/3, & \text{si } 4 < p \leq \infty, \end{cases}$$

$$(6.37) \quad \begin{cases} s \geq 1/(3p) - 3, & \text{si } 1 \leq p < 4/3, \\ s \geq -1/p - 2, & \text{si } 4/3 \leq p \leq \infty \end{cases}$$

$$(6.38) \quad \begin{cases} r + s \leq -2/p + 4, & \text{si } 1 \leq p \leq 4, \\ r + s \leq -2/(3p) + 11/3, & \text{si } 4 < p \leq \infty, \end{cases}$$

$$(6.39) \quad \begin{cases} r + s \geq -2/(3p) - 3, & \text{si } 1 \leq p < 4/3, \\ r + s \geq -2/p - 2, & \text{si } 4/3 \leq p \leq \infty, \end{cases}$$

exigiendo además

- La igualdad no puede ocurrir en las primeras partes de (6.36) y (6.38) si  $p = 4$  o  $r = 1 - 1/p$ , a menos que  $p = 1$ .
- La igualdad no puede ocurrir en las segundas partes de (6.37) y (6.39) si  $p = 4/3$  o  $r = -1/p$ , a menos que  $p = \infty$ .

En estas condiciones existe una constante  $C$  independiente de  $n$  y  $f$  tal que

$$(6.40) \quad \|\tau_n^{(\alpha)}(f, x)u(x)\|_p \leq C\|f(x)u(x)\|_p,$$

donde  $\|\cdot\|_p$  denota la norma usual (sin peso) en  $\mathbb{R}$ .

Demostración:

De acuerdo con el Lema 6.12, para que se verifique (6.40) basta con

$$\left\| \left( \int_{-\infty}^{\infty} K_{n,1}^{(\mu-1/2)}(x^2, y^2) f(y) e^{-y^2} |y|^{2\mu} dy \right) u(x) \right\|_p \leq C \|f(x)u(x)\|_p$$

y

$$\left\| \left( \int_{-\infty}^{\infty} K_{n,1}^{(\mu+1/2)}(x^2, y^2) xy f(y) e^{-y^2} |y|^{2\mu} dy \right) u(x) \right\|_p \leq C \|f(x)u(x)\|_p.$$

La demostración se continúa apoyándonos en el teorema anterior de manera análoga a como se hizo en el Teorema 6.10 al usar el Teorema 6.7. La relación que aparece entre  $a$ ,  $b$ ,  $r$ ,  $s$  es  $a = 1/4 - 1/(2p) + r/2$  y  $b = 1/4 - 1/(2p) + s/2$ .

**Observación 6.15**

Tal como veíamos en el Capítulo I, para que la acotación uniforme de las sumas parciales de la serie de Fourier se traduzca en convergencia, se necesitaba la completitud del sistema ortogonal. Un sistema de polinomios ortogonales siempre es completo cuando el soporte de la medida es compacto, sin más que utilizar el teorema de Weierstrass. En este capítulo hemos utilizado medidas cuyo soporte es  $[0, \infty)$  o  $\mathbb{R}$ , luego necesitamos un resultado que nos asegure la completitud. Pero Kolmogorov-Fomín [1, pág. 475], demuestran que si una función medible  $q(x)$  es diferente de 0 en casi todo punto de un intervalo  $(a, b)$ , donde  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , y satisface la condición  $|q(x)| \leq Ce^{-\delta|x|}$  para algún  $\delta > 0$ , entonces el sistema de funciones  $x^n q(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  es completo en  $L^2(a, b)$ . Utilizando además que  $L^2(a, b) \cap L^p(a, b)$  es denso en  $L^p(a, b)$  para cualquier  $p \in [1, \infty)$ , esto soluciona todos nuestros problemas de completitud, y los resultados que hemos obtenido sobre acotación uniforme se traducen en resultados sobre convergencia en media.

Nótese que la acotación uniforme del teorema anterior únicamente se transforma en convergencia de  $\tau_n^{(\alpha)}(f, x)u(x)$  a  $f(x)u(x)$  en  $L^p(\mathbb{R}, dx)$  cuando  $p < \infty$ .

Por otra parte, Poiani [1, Teorema 4] también demuestra condiciones necesarias del tipo de (6.8) y (6.9) para las medias de Cesàro respecto al sistema  $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ , que se traducen a otras respecto al nuevo sistema  $\{H_n^{(\mu)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  del mismo modo que hemos hecho hasta ahora. En particular, estas condiciones demuestran que la convergencia de  $\tau_n^{(\alpha)}(f, x)$  a  $f(x)$  en  $L^p(e^{-x^2}|x|^{2\mu})$  sólo se verifica para  $p = 2$ ; y lo análogo ocurre en lo referente al sistema  $\{H_n^{(\mu)}(x)(e^{-x^2}|x|^{2\mu})^{(1-r)/2}\}_{n=0}^{\infty}$  con  $r \neq 0$ . Por último, simplemente citar que Poiani también estudia la necesidad de las condiciones (6.30) a (6.34) del Teorema 6.13, aunque comete un pequeño error al estudiar el caso  $p = 1$  y  $a = \alpha/2$  y el caso  $p = \infty$  y  $a = -\alpha/2$ . En el primer caso no es necesaria la desigualdad  $a < 1 - 1/p + \alpha/2$  y en el segundo no es necesario que  $a > -1/p - \alpha/2$ . En realidad lo que ocurre es que cuando en cualquiera de las dos condiciones anteriores se da la igualdad, entonces existe acotación uniforme (de lo contrario, estaríamos en contradicción con diversos resultados de Markett [1]). Con

estas precisiones, todas las condiciones necesarias del Teorema 6.13 se traducen en condiciones necesarias para el Teorema 6.14 procediendo como en el Teorema 6.8.



## BIBLIOGRAFÍA

ALEXITS, G.

[1] “Convergence Problems of Orthogonal Series”, Pergamon Press, New York, 1961.

ASKEY, R. Y WAINGER, S.

[1] Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 695–708.

BADKOV, V. M.

[1] Approximation of functions by the partial sums of a Fourier series in polynomials that are orthogonal on an interval, *Math. Notes* **8** (1970), 712–717.

[2] Convergence in the mean of Fourier series in orthogonal polynomials, *Math. Notes* **14** (1973), 651–657.

[3] Convergence in the mean and almost everywhere of Fourier series in polynomials orthogonal on an interval, *Math. USSR Sb.* **24** (1974), 223–256.

[4] Approximation properties of Fourier series in orthogonal polynomials, *Russian Math. Surveys* **33** (1978), 53–117.

BARCELÓ, J. A. Y CÓRDOBA, A. J.

[1] Band-limited functions:  $L^p$ -convergence, *Trans. Amer. Math. Soc.* **313** (1989), 655–669.

BENEDEK, A. I., MURPHY, E. R. Y PANZONE, R.

[1] “Cuestiones del análisis de Fourier. Convergencia en media de algunas series ortogonales”. Notas de álgebra y análisis, n.º 5. Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca (Argentina), 1976.

BENEDEK, A. I. Y PANZONE, R.

[1] Note on mean convergence of eigenfunction expansions, *Rev. Un. Mat. Arg.* **25** (1970), 167–184.

[2] On mean convergence of Fourier-Bessel series of negative order, *Studies in App. Math.* **50** (1971), 281–292.

[3] Mean convergence of series of Bessel functions, *Rev. Un. Mat. Arg.* **26** (1972), 42–61.

[4] On convergence of orthogonal series of Bessel functions, *Ann. di Pisa* **27** (1973), 505–525.

[5] Bessel expansions arising from anomalous Sturm-Liouville differential systems, *Rev. Un. Mat. Arg.* **28** (1978), 161–185.

BENZINGER, H. E.

[1] The  $L^p$  behavior of eigenfunction expansions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **174** (1972), 333–344.

BLOOM, S.

[1] Solving weighted norm inequalities using the Rubio de Francia Algorithm, *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), 306–312.

CAMBELL, R.

[1] Détermination effective de toutes les moyennes de Cesàro d'ordre entier pour les séries de polynômes orthogonaux comprenant ceux de Laguerre et de Hermite, *C. R. Acad. Sci. Paris* **243** (1956), 882–885.

CARLESON, L.

[1] On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.* **116** (1966), 135–157.

CARTWRIGHT, D. I.

[1] Lebesgue constants for Jacobi expansions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 427–433.

CHIHARA, T. S.

[1] “An Introduction to Orthogonal Polynomials”, Gordon-Breach, New York, 1978.

COIFMAN, R., JONES, P. W. Y RUBIO DE FRANCIA, J. L.

[1] Constructive descomposition of B.M.O. functions and factorization of  $A_p$  weights, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 675–676.

ERDÉLYI, A., MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F. Y TRICOMI, F. G.

[1] “Higher Transcendental Functions”, McGraw-Hill Book Co., New York, Vol. I, II, 1953; Vol. III, 1955.

FREUD, G.

[1] “Orthogonal Polynomials”, Pergamon Press, New York, 1971.

GARCÍA CUERVA, J. Y RUBIO DE FRANCIA, J. L.

[1] “Weighted norm inequalities and related topics”, North-Holland, Amsterdam, 1985.

GENEROZOV, V. L.

[1]  $L_p$ -convergence for expansions in terms of the eigenfunctions of a Sturm-Liouville problem, *Math. Notes* **3** (1968), 436–441.

GILBERT, J. E.

[1] Maximal theorems for some orthogonal series I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **154** (1969), 495–515.

[2] Maximal theorems for some orthogonal series II, *J. Math. Anal. Appl.* **31** (1970), 349–368.

GODOY, E.

[1] “Polinomios Ortogonales Asociados a Modificaciones de Medidas”, Tesis Doctoral, Santiago de Compostela, 1987.

GUADALUPE, J. J., PÉREZ, M. Y VARONA, J. L.

[1] Mean and weak convergence of some orthogonal Fourier expansions by using  $A_p$  theory, en “Proceedings, Orthogonal Polynomials and Applications, Laredo (Cantabria), 1987”, Marcel Dekker, New York (por aparecer).

HARDY, G. H. Y LITTLEWOOD, J. E.

[1] A maximal theorem with function-theoretic applications, *Acta Math.* **54** (1930), 81–116.

[2] Some theorems on Fourier series and Fourier power series, *Duke Math. J.* **2** (1936), 354–381.

HARDY, G. H., LITTLEWOOD, J. E. Y PÓLYA, G.

[1] “Inequalities”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.

HUNT, R. A., MUCKENHOUPT, B. Y WHEEDEN, R. L.

[1] Weighted norm inequalities for the conjugate function and the Hilbert transform, *Trans. Amer. Math. Soc.* **176** (1973), 227–251.

JACKSON, D.

[1] “Fourier Series and Orthogonal Polynomials”, 7.<sup>a</sup> ed., Carus Monographs n.º 6, Math. Assoc. Amer., 1971.

JONES, P. W.

[1] Factorization of  $A_p$  weights, *Ann. of Math.* **111** (1980), 511–530.

KOLMOGOROV, A. N.

[1] Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, *Fund. Math.* **7** (1925), 23–28.

KOLMOGOROV, A. N. Y FOMÍN, S. V.

[1] “Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional”, Edit. MIR, Moscú, 1975.

KOORNWINDER, T. H.

[1] Orthogonal polynomials with weight function  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$ , *Canad. Math. Bull.* **27** (1984), 205–214.

MARKETT, C.

[1] Norm estimates for Cesàro means of Laguerre expansions, en “Proceedings, Conference on Approximation and Function Spaces, Gdansk, 1979”, pp. 419–435, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[2] The Lebesgue constants for Fourier-Bessel series, mean convergence, and the order of singularity of a Sturm-Liouville equation, *J. Math. Anal. Appl.* **103** (1984), 497–523.

[3] Norm estimates for  $(C, \delta)$  means of Hermite expansions and bounds for  $\delta_{eff}$ , *Acta Math. Hung.* **43** (1984), 187–188.

MÁTÉ, A., NEVAI, G. P. Y TOTIK, V.

[1] Asymptotics for the ratio of leading coefficients of orthonormal polynomials on the unit circle, *Constr. Approx.* **1** (1985), 63–69.

[2] Necessary conditions for weighted mean convergence of Fourier series in orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory* **46** (1986), 314–322.

MUCKENHOUP, B.

[1] Mean convergence of Jacobi series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (1969), 306–310.

[2] Mean convergence of Hermite and Laguerre series I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **147** (1970), 419–431.

[3] Mean convergence of Hermite and Laguerre series II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **147** (1970), 433–460.

[4] Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **165** (1972), 207–226.

MUCKENHOUP, B. Y WHEEDEN, R. L.

[1] Two weight function norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function and the Hilbert transform, *Studia Math.* **55** (1976), 279–295.

NEUGEBAUER, C. J.

[1] Inserting  $A_p$ -weights, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 644–648.

NEVAI, G. P.

[1] Orthogonal polynomials, *Mem. Amer. Math. Soc.* **213** (1979).

[2] Géza Freud, orthogonal polynomials and Christoffel functions. A case study, *J. Approx. Theory* **48** (1986), 3–167.

NEWMAN, J. Y RUDIN, W.

[1] Mean convergence of orthogonal series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 219–222.

OSILENKER, B. P.

[1] Weight estimates for the linear mean majorants of Fourier series of orthogonal polynomials, *Russian Math. Surveys* **35** (1980), 269–270.

[2] On Fourier-Pollaczek series, *Soviet Math. Dokl.* **26** (1982), 153–156.



PASZKOWSKI, S.

[1] Sur des transformations d'une fonction de poids, en "Proceedings, Polynômes orthogonaux et Applications, Bar le Duc, 1984", pp. 239–246, Springer-Verlag, Berlín, 1985.

PÉREZ, M. Y VARONA, J. L.

[1] Estimaciones de polinomios ortogonales con peso  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta_{-1} + N\delta_1$ , Actas de las XIII Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas, Valladolid, 1988 (por aparecer).

POIANI, E. L.

[1] Mean Cesàro summability of Laguerre and Hermite series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **173** (1972), 1–31.

POLLACZEK, F.

[1] Sur une generalization des polynômes de Legendre, *C. R. Acad. Sci. Paris* **228** (1949), 1363–1365.

[2] Système de polynômes biorthogonaux qui généralisent les polynômes ultrasphériques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **228** (1949), 1998–2000.

[3] Familles de polynômes orthogonaux, *C. R. Acad. Sci. Paris* **230** (1950), 36–37.

[4] Sur une famille de polynômes orthogonaux à quatre paramètres, *C. R. Acad. Sci. Paris* **230** (1950), 2254–2256.

POLLARD, H.

[1] The mean convergence of orthogonal series of polynomials, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **32** (1946), 8–10.

[2] The mean convergence of orthogonal series I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **62** (1947), 387–403.

[3] The mean convergence of orthogonal series II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **63** (1948), 355–367.

[4] The mean convergence of orthogonal series III, *Duke Math. J.* **16** (1949), 189–191.

RAHMANOV, E. A.

[1] On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials, *Math. USSR Sb.* **32** (1977), 199–213.

[2] On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials. II, *Math. USSR Sb.* **46** (1983), 105–117.

REY PASTOR, J. Y CASTRO, A.

[1] "Funciones de Bessel y aplicaciones", Edit. Dossat, Madrid, 1958.

RIESZ, M.

[1] Sur les fonctions conjuguées, *Math. Zeit.* **27** (1927), 218–244.

RUBIO DE FRANCIA, J. L.

[1] Vector valued inequalities for operators in  $L^p$  spaces, *Bull. London Math. Soc.* **12** (1980), 211–215.

[2] Boundedness of maximal functions and singular integrals in weighted  $L^p$  spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **83** (1981), 673–679.

[3] Factorization and extrapolation of weights, *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), 393–396.

SAWYER, E. T.

[1] A characterization of a two weight norm inequality for maximal operators, *Studia Math.* **75** (1982), 1–11.

STEIN, E. M.

[1] “Singular integrals and differentiability properties of functions”, Princeton Univ. Press, Cambridge, 1970.

STEIN, E. M. Y WEISS, G.

[1] “Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces”, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1975.

SZEGŐ, G.

[1] “Orthogonal Polynomials”, 3.<sup>a</sup> ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1967.

VARONA, J. L.

[1] “Convergencia de Series de Fourier Respecto de Sistemas Ortogonales”, Tesina de Licenciatura, Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, Sección 3, n.º 11, Zaragoza, 1987.

[2] Estudio de la convergencia en media de las series de Fourier de los sistemas de Bessel y Dini mediante teoría  $A_p$ , Actas de las XIII Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas, Valladolid, 1988 (por aparecer).

WATSON, G. N.

[1] “A treatise on the theory of Bessel functions”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1944.

WING, G. M.

[1] The mean convergence of orthogonal series, *Amer. J. Math.* **72** (1950), 792–808.

ZYGMUND, A.

[1] “Trigonometric Series”, Vol. I y II, 2.<sup>a</sup> ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1977.