GENERACIÓN DE ESTRUCTURAS CUASIPERIÓDICAS A PARTIR DE REDES ESTOCÁSTICAS

V. Lanchares y J.L. Varona
Departamento de Matemáticas y Computación
Universidad de La Rioja
c) Luis de Ulloa s/n, 26004 Logroño, La Rioja
e-mail (internet): `vlancha@siur.unirioja.es` y `jvarona@siur.unirioja.es`

Resumen

En el presente trabajo se presenta un programa para Macintosh destinado a la generación de redes estocásticas que simulan una teselación cuasiperiódica del plano. Con él se puede observar cómo, a partir del método que explicamos en esta reseña, se producen estructuras con simetría rotacional de orden q arbitrario. La aplicación se denomina **Contornos**, está realizada en Think C y cuenta con un completo interface Macintosh.

FUNDAMENTOS FÍSICO-MATEMÁTICOS

Partimos del Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(u,v,t) = \tfrac{1}{2}(u^2+v^2) + a\cos u \sum_m \delta(t - 2\pi m/q) \tag{1}$$

correspondiente a un modelo simplificado de una partícula cargada en un campo magnético uniforme y perturbada mediante impulsos periódicos —ver (Zaslavsky et al. 1991) y (Lowenstein 1992)—. Las ecuaciones del movimiento correspondientes al sistema dinámico definido por (1) vienen dadas por

Este texto reproduce la comunicación presentada en el *I Congreso Universidad y Macintosh*, UNED, Madrid, 19 al 21 de septiembre de 1994. Apareció publicada en las *Actas del Congreso UNIMAC'94*, Vol. I (Madrid 1994), 31–37, UNED, Madrid, 1994; y en el CD-ROM UNIMAC'94, junto con el programa **Contornos**.

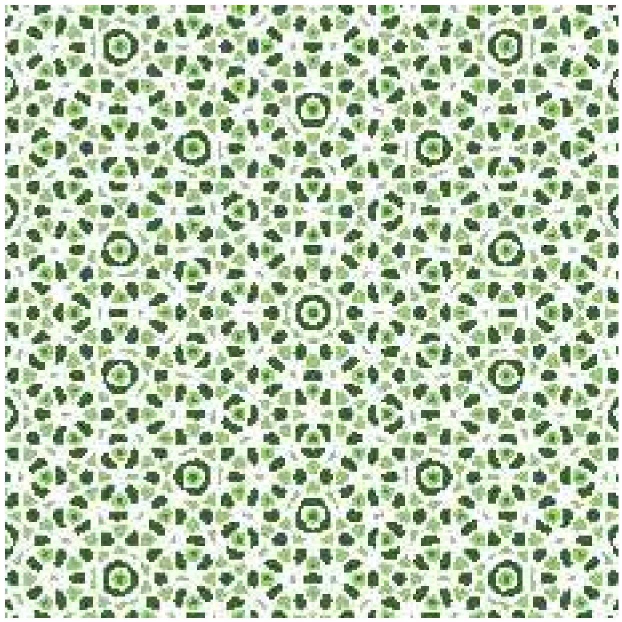

Figura 1: Flujo Hamiltoniano con simetría cuasicristalina de orden $q = 5$. Parámetros: $a = 0.6$, paso $= 2.5a$, $-80 \leq u, v \leq 80$.

las expresiones

$$\dot{u} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v} = v, \qquad \dot{v} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = -u + a \operatorname{sen} u \sum_m \delta(t - 2\pi m/q). \tag{2}$$

A partir de las ecuaciones (2) construimos una transformación de Poincaré M que relaciona los valores de (u, v) justo antes de dos impulsos consecutivos. Esta transformación puede construirse en dos pasos. La variación que produce el impulso hace que las variables (u, v) se transformen en $(u, v + a \operatorname{sen} u)$ (variación instantánea), mientras que entre impulso e impulso las ecuaciones que rigen la variación de (u, v) vienen dadas por

$$\dot{u} = v, \qquad \dot{v} = -v.$$

Por lo tanto la transformación M es de la forma

$$M : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos(2\pi/q) & \operatorname{sen}(2\pi/q) \\ -\operatorname{sen}(2\pi/q) & \cos(2\pi/q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v + a \operatorname{sen} u \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Este tipo de transformación es conocida como *transformación de red estocástica* debido a lo característico que resulta el retrato fásico en el caso

Figura 2: Flujo Hamiltoniano con simetría cuasicristalina de orden $q = 7$. Parámetros: $a = 0.6$, paso $= 1.25a$, $-40 \leq u, v \leq 40$.

resonante (q entero). En el espacio de fases se produce una red infinita, es decir, una región de movimiento caótico de la partícula. En el interior de cada celda de la red la familia de órbitas consiste en trayectorias cerradas periódicas. La apariencia de la red para valores pequeños de a es la de una estructura cuasiperiódica con simentría rotacional de orden q. Estas simetrías son exactas en el límite $a \to 0$.

Iterando q veces la transformación M y, suponiendo el valor de a próximo a 0, podemos encontrar un Hamiltoniano H_1 de tal manera que

$$M^q \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial v}, -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial u} \right) + O(a^2), \tag{4}$$

donde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (u, v), \\ \mathcal{H}_1(\boldsymbol{x}) &= a \sum_{k=0}^{q-1} \cos(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{e}_k &= \left(\cos(2k\pi/q), \operatorname{sen}(2k\pi/q) \right). \end{aligned} \tag{5}$$

Gracias a la simetría rotacional de $\mathcal{H}_1$ (Arnold 1990), el flujo Hamiltoniano genera una estructura cuasiperiódica de forma natural (ver figuras 1 y 2).

Las fronteras entre regiones de diferentes colores corresponden a órbitas del espacio físico. Vista desde lejos, esta red tiene la apariencia de una teselación cuasiperiódica. Por ejemplo, en el caso $q = 5$ es semejante a la teselación de Penrose (Lowensein 1992).

La aplicación que aquí presentamos ha sido realizada por J.L. Varona como apoyo a los trabajos de investigación en materia de caos de V. Lanchares —por citar un artículo reciente ver, por ejemplo, (Lanchares et al. 1994).

LA APLICACIÓN "Contornos"

La aplicación que hemos elaborado está realizada en Think C y se denomina Contornos; actualmente se encuentra en su versión 1.3. Funciona tanto bajo sistema 6 como 7 y posteriores (con el sistema 6 se requiere QuickDraw Color). Hemos elaborado dos versiones distintas: La primera necesita un ordenador con, al menos, un microprocesador 68020 y coprocesador matemático; además, está optimizada para el microprocesador 68040. La segunda funciona en cualquier Macintosh a costa, lógicamente, de la velocidad de dibujo. La única que puede ejecutarse en un Power Macintosh es la segunda (y en modo emulación). Pensamos realizar una versión nativa para Power Macintosh en cuanto logremos adquirir el necesario módulo de Symantec para generar código de PowerPC 601.

El programa evalúa la función $\mathcal{H}_1$ en una región del plano (u, v) y asigna a cada punto un color dependiendo del valor $\mathcal{H}_1(u, v)$. Es decir, divide el plano en zonas separadas por curvas de nivel de la función $\mathcal{H}_1$. Esto genera una serie de contornos de colores en los que se aprecian las distintas simetrías. Notar además que la función $\mathcal{H}_1$ depende, en principio, de los valores que asignemos a los parámetros q y a. Nada más abrir el programa se comienza a dibujar el gráfico correspondiente a los valores $q = 7$, $a = 0.6$, con un paso —separación entre las curvas de nivel— de $1.25a$, y en la región del plano dada por el cuadrado $-80 \leq u, v \leq 80$.

El proceso de dibujo de un gráfico se puede interrumpir en cualquier momento utilizando, como es habitual en el Macintosh, la combinación de teclas comando + punto. Para continuar un dibujo detenido, basta con utilizar el ítem "Continuar" del menú "Archivo".

Sólo se puede tener una ventana abierta a la vez.

Los gráficos generados se pueden guardar en cuatro tipos de documentos:

1.— En formato de texto 'TEXT' (y creador 'Cont') con los datos del dibujo.

2.— En formato 'PICT' (y creador 'Cont') con los datos del dibujo añadidos a recursos 'DATA' del archivo 'PICT'.

3.— Exportados en formato 'TEXT' con los datos del dibujo. El creador es el que figura en el recurso 'CREA', ID = 128 (así es fácilmente modificable con ResEdit, para lo que la aplicación cuenta entre sus recursos con el correspondiente "template"). Por defecto, si se borra el recurso, hemos previsto que sea 'ttxt' (TeachText). En el recurso hemos puesto como creador 'EDIT' (Edit y Edit II).

4.— Exportando el dibujo en formato 'PICT' según el creador del recurso 'CREA', ID = 129. Por defecto, si se borra el recurso, hemos previsto que sea 'ttxt' (TeachText). En el recurso hemos puesto como creador '8BIM' (Adobe Photoshop).

Para usar cualquiera de estas cuatro posibilidades basta utilizar los correspondientes ítemes del menú "Archivo". Además, se puede emplear el ítem "Copiar" del menú "Edición" para copiar (como 'PICT') el dibujo actual de la ventana y pegarlo en el Apuntador o en otra aplicación. Esta es la única utilidad que tiene para el programa el menú "Edición".

Utilizando el ítem "Abrir..." del menú "Archivo", se pueden abrir los archivos de tipo 'TEXT' y 'PICT' generados por el programa en formato propio (con creador 'Cont'). Los dibujos exportados no podrían abrirse de nuevo de ninguna manera, pues carecen de los recursos 'DATA' necesarios para identificar los parámetros y los ejes a los que corresponde el dibujo. En cuanto a los archivos de texto exportados, son iguales a los propios del programa, pero no permitimos abrirlos para evitar errores (ya que de lo contrario el programa podría abrir, e intentaría interpretar, cualquier archivo de texto).

El programa cuenta con un menú para ajustar el parámetro q, otro para el paso (que se refiere a las separación con la que deben espaciarse las curvas de nivel) y un tercero para delimitar los ejes de representación (u, v). En los tres casos se puede elegir entre una serie de valores preseleccionados que aparecen en los menús o dar valores arbitrarios sin más que utilizar el correspondiente ítem "Otros...". Hay que tener en cuenta que el paso que se asigna a través del menú es relativo, ya que internamente se modifica multiplicándolo por el parámetro a. De esta forma, y puesto que, tal como se aprecia en (5), a aparece multiplicando en la expresión de $\mathcal{H}_1$, los gráficos que se obtienen son independientes de a, luego no hace falta tener un menú que lo controle.

Asimismo, existe un menú "Preferencias" que permite ajustar:

— Si deseamos que las ventanas de representación sean o no cuadradas (son cuadradas por defecto).

— Si deseamos que se produzca o no un sonido de aviso siempre que se finaliza un dibujo (seleccionado por defecto).

— Si queremos que los dibujos sean en blanco y negro o en colores (por defecto, en colores).

— El número de colores que se emplean en el dibujo (por defecto, 13). Los colores que se utilizan se asignan al azar. Si, al efectuar el dibujo, aparecen más curvas de nivel que el número máximo de colores distintos disponibles, la aplicación vuelve a usar los mismos colores cíclicamente.

— El tamaño de la ventana, a elegir entre pequeño, mediano y grande (por defecto, mediano). Cuando está activada la opción de que la ventana sea cuadrada, los correspondientes tamaños de las ventanas son 180×180, 280×280 y 380×380 puntos. Y cuando no, las ventanas son de tamaños 340×180, 440×280 y 540×380.

Una vez que hemos cambiado los parámetros de la función o los ejes, podemos redibujarla usando los ítemes "Dibujar" o "Cambiar colores" del menú "Archivo", según queramos o no efectuar un nuevo sorteo de colores o seguir usando los mismos. Ninguno de los dos puede usarse si hemos cambiado las características de la ventana. Lógicamente, "Cambiar colores" también puede usarse para redibujar la misma función con los mismos ejes pero asignando colores distintos a las regiones separadas por las curvas de nivel. Cuando está selecccionada la opción "Blanco y negro" del menú "Preferencias", el ítem "Cambiar colores" se transforma en "Alternar blanco y negro". Utilizar este ítem hace que se produzca un redibujo de los contornos de la función pero pintando en negro lo que antes era blanco y viceversa.

El resto de las opciones de los menús son autodescriptivas y no merece la pena comentarlas.

Por último, en lo que respecta al uso de los menús, destacar que la aplicación cuenta con globos de ayuda que, cuando la estamos usando bajo sistema 7 o posterior, explican el manejo de todos los menús.

En cuanto al **consumo de memoria**, es muy importante tener en cuenta que la aplicación Contornos puede trabajar con cualquier número de colores disponibles (panel de control "Monitores"), aunque no saca ningún partido de un gran número de ellos.

Con 256 colores todos los dibujos que puede generar se representan perfectamente. Para usar mayor número de colores se necesita configurar el programa con más memoria (o usar ventanas más pequeñas). Además, los ficheros 'PICT' generados ocupan más espacio en disco. Y todo esto no proporciona ninguna mejora en la visualización de los dibujos.

Unos cuantos ejemplos de configuración:

— Si usamos 256 colores en el panel de control “Monitores”, con 768 K asignados al programa podemos dibujar, copiar y guardar dibujos de cualquier tamaño de ventana, cuadrada o no.

— Para lograr lo mismo con miles de colores necesitaríamos 1280 K.

— Con 512 K y 256 colores puede dibujar, guardar y copiar dibujos procedentes de ventanas medianas cuadradas. También logra dibujar ventanas grandes, pero no logra copiarlas ni guardarlas.

— Con 224 K y 256 colores logra dibujar, copiar y guardar ventanas pequeñas cuadradas. Los 224 K también son suficientes para usar ventanas medianas cuadradas (en particular, y puesto que este es tamaño es la ventana original, notar que la aplicación se abre sin problemas con sólo 224 K), aunque no se puede copiar o guardar.

Referencias

Arnold, V.I., 1990: *Huygens & Barrow, Newton & Hook*, Birkhauser Verlag, Boston.

Lanchares, V., Iñarrea, M., Salas, J.P., y Sierra, J.D., 1994: “Bifurcaciones en un sistema de un grado de libertad. Comportamiento caótico bajo perturbaciones no estacionarias”, Revista Española de Física, vol. 8, no. 1, 52–56.

Lowenstein, J.H., 1992: “Interpolating Hamiltonians for a stochastic-web map with quasicrystalline symmetry”, Chaos, vol. 2, no. 3, 413–422.

Zaslavsky, G.M, Sagdeev, R.Z., Usikov, D.A., y Chernikov A.A., 1991: *Weak Chaos and Quasiregular Patterns*, Cambridge University Press, New York.