CONVERGENCIA EN L^p CON PESOS DE LA SERIE DE FOURIER RESPECTO DE ALGUNOS SISTEMAS ORTOGONALES*

Juan Luis Varona

Departamento de Matemática Aplicada. Colegio Universitario de La Rioja.

Dada $d\mu$ una medida positiva y $\{\phi_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, un sistema ortogonal completo en $L^2(d\mu)$, para cada $f \in L^2(d\mu)$ se denota $S_n f$ a las sumas parciales de la serie de Fourier de f respecto del sistema $\{\phi_n\}$.

Es bien conocido que $S_n f$ converge a f en la norma de $L^2(d\mu)$, pero no se puede asegurar en general que haya convergencia en $L^p(d\mu)$ para p distinto de 2. Sin embargo, para diversos sistemas ortogonales entre los que se encuentran los polinomios ortogonales clásicos y los sistemas de Bessel y Dini sí que se conocen condiciones necesarias y suficientes para esta convergencia.

Un paso más nos lleva a pensar en estudiar la convergencia de $S_n f$ a f en $L^p(U d\mu)$ para alguna función positiva (peso) U. Más en general aún, dados dos pesos U y V, podemos preguntarnos bajo qué condiciones es cierta la convergencia de $(S_n f)U$ a fU en la norma de $L^p(d\mu)$ para cada función f tal que $fV \in L^p(U d\mu)$, $1 < p < \infty$. Cuando $U \leq CV$ esto se traduce en la acotación uniforme de S_n como operador entre $L^p(V^p d\mu)$ y $L^p(U^p d\mu)$.

Para realizar este estudio es fundamental disponer de buenas estimaciones de las funciones ortogonales y de una adecuada descomposición en sumandos del núcleo de la serie de Fourier. De este modo el problema se reduce, fundamentalmente, a conocer la acotación de la transformada de Hilbert entre diversos espacios de tipo L^p con pesos, para lo cual se emplea la teoría A_p de pesos.

En el trabajo se analizan todos estos problemas para diversos sistemas ortogonales que incluyen *a*) polinomios de Jacobi generalizados, *b*) sistemas provinientes de pesos de pesos de Jacobi a los que se han añadido deltas de Dirac, *c*) sistemas de Bessel y Dini,

---

* Resumen de la tesis doctoral; dicha tesis fue dirigida por el Dr. D. José J. Guadalupe y defendida en la Universidad de Cantabria el día 10-12-1988. El Instituto de Estudios Riojanos publicó este resumen en *Zubía* **8** (1990), 217–218.

d) polinomios de Hermite generalizados. Explicamos a continuación brevemente lo que se obtiene en relación con cada uno de los apartados anteriores.

Para pesos en el intervalo $(-1,1)$ en los que los polinomios ortonormales verifican determinadas acotaciones, como es el caso de los polinomios de Jacobi generalizados, se encuentran condiciones necesarias y suficientes para la convergencia en media deseada. Estas condiciones se expresan en términos de p y de condiciones A_p y de integrabilidad para los diversos pesos que intervienen. Hay que hacer notar que cuando el peso de Jacobi es $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ con $\alpha, \beta \geq -1/2$ todas las condiciones se expresan de forma más sencilla, y las demostraciones son más fáciles de hacer. Otro sistema ortogonal en $(-1,1)$ que se analiza es el de Pollaczek, para el cual se muestra que no puede haber convergencia en media para $p \neq 2$.

Para estudiar la convergencia de sistemas provinientes de pesos de Jacobi con deltas de Dirac es necesario previamente calcular estimaciones de los polinomios ortonormales, pues no eran conocidas. Es de destacar que, hasta donde el autor conoce, esta es la primera vez que se aborda la convergencia de series de Fourier de polinomios ortogonales respecto a una medida no absolutamente continua.

En los sistemas de Bessel y Dini –que ya no están constituidos por polinomios– se encuentran condiciones necesarias y condiciones suficientes para la convergencia en media que, como ocurría con polinomios de Jacobi, se expresan en función de p y de condiciones A_p y de integrabilidad sobre los pesos implicados. De nuevo en este caso cuando el parámetro de la función de Bessel es $\alpha \geq -1/2$ las condiciones tienen una expresión más sencilla y las demostraciones se simplifican.

Por último, el método empleado para analizar la convergencia de series de Fourier de polinomios de Hermite generalizados es radicalmente diferente del utilizado para los otros sistemas. Consiste simplemente en usar resultados conocidos sobre series de polinomios de Laguerre y adaptarlos para obtener conclusiones sobre series de polinomios de Hermite generalizados. El método resulta sencillo de aplicar y los resultados que se consiguen permiten incluso extender lo ya conocido para el sistema original de Hermite.