RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES POR MEDIO DE DESARROLLOS EN SERIE

Juan Luis Varona

1. SOLUCIONES ANALÍTICAS

Consideremos un sistema lineal

$$[L] \equiv \begin{cases} x'(t) = A(t) \cdot x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

donde $A(t)$ es una matriz $n \times n$ y $b(t)$ es un vector columna n-dimensional, ambos analíticos en un intervalo real $I = (t_0 - R, t_0 + R)$. Al ser $A(t)$ y $b(t)$ continuas, el teorema de Picard-Lindelöf asegura que existe una única solución de $[L]$ en I, pero no proporciona un método que permita solucionar el sistema por medio de cuadraturas.

Sin embargo, si la solución de $[L]$ fuese analítica, una técnica diferente de abordar el problema consistiría en lo siguiente: Al ser la solución analítica, se puede derivar término a término; entonces, sustituyendo en la ecuación diferencial, se igualan los términos de igual grado y esto permite encontrar la solución.

Nuestra suposición de que la ecuación $[L]$ tiene solución analítica es cierta. Para comprobarlo, en primer lugar extendamos analíticamente $A(t)$ y $b(t)$ a $A(z)$ y $b(z)$ definidas en la bola compleja $B_R(t_0)$. Entonces, para $z \in B_R(t_0)$ definimos por recurrencia las iteradas de Picard

$$\varphi_0(z) = x_0, \quad \varphi_{n+1}(z) = x_0 + \int_{t_0}^{z} [A(t) \cdot \varphi_n(t) + b(t)]\, dt.$$

Las funciones $\varphi_n(z)$ son analíticas y, además, es fácil demostrar que convergen uniformemente sobre compactos de $B_R(t_0)$ a una función φ que, por lo tanto, deberá ser también analítica. Se comprueba así mismo sin dificultad que esta función es la solución de $[L]$.

La aplicación de este resultado sobre sistemas lineales a la ecuación diferencial lineal de orden n es inmediata. En efecto, sea

$$x^{(n}(t) + a_1(t)x^{(n-1}(t) + \dots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = b(t)$$

con $a_i(t)$ y $b(t)$ desarrollables en series de potencias. Entonces, utilizando el método estándar para transformar ecuaciones diferenciales de orden n en sistemas diferenciales se sigue que sus soluciones son desarrollables en serie de potencias en, al menos, el mismo intervalo que $b(t)$ y las $a_i(t)$.

En la práctica, el método a seguir para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales por medio de series de potencias consiste en tomar $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, derivar formalmente término a término las veces necesarias, sustituir en la ecuación diferencial e igualar coeficientes. Las derivaciones término a término están plenamente justificadas ya que hemos demostrado que existen soluciones expresables mediante series convergentes. Tales funciones son derivables y su derivada coincide, dentro del radio de convergencia, con la derivada término a término de la serie. Además, el radio de convergencia se mantiene al derivar, luego se puede iterar el proceso.

Existen numerosos tipos de ecuaciones cuya solución se aborda por el método anteriormente citado. Una de las más conocidas es la ecuación de Hermite $x''-2tx'+2px = 0$, donde p es un parámetro real. Una cuestión de interés es conocer cómo debe ser el parámetro p para que existan soluciones polinómicas. La respuesta a esta pregunta es que p debe ser un entero no negativo, que coincide precisamente con el grado del polinomio. Estos polinomios son únicos salvo constante multiplicativa; así se denomina *polinomio de Hermite* a $H_n(t)$ solución de $x'' - 2tx' + 2nx = 0$ con coeficiente director 2^n.

Los polinomios de Hermite tienen multitud de interesantes propiedades, como pueden ser su expresión a partir de una función generatriz o a partir de la fórmula de Rodrigues; así como su ortogonalidad en $\mathbb{R}$ con respecto al peso e^{-t^2}. Además, están íntimamente relacionados con diversos problemas de Mecánica Cuántica, como puede ser la ecuación de onda de Schrödinger para el oscilador armónico simple. En este problema, el hecho de que las únicas soluciones de la ecuación de Schrödinger que permanecen acotadas cuando el tiempo tiende a infinito sean las funciones de Hermite (y por lo tanto el parámetro p tiene que ser un entero positivo) se traduce en la cuantificación de la energía.

2. PUNTOS SINGULARES REGULARES

Según acabamos de demostrar, si $P(t)$ y $Q(t)$ son analíticas, entonces las soluciones de la ecuación $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$ son analíticas. Parecería razonable esperar que, cuando $P(t)$ y $Q(t)$ tienen un polo en un punto, las soluciones de la ecuación diferencial también tengan un polo en ese punto.

Pero es fácil convencernos de que esto no es cierto en general ya que una solución de la ecuación $x'' + \frac{1}{t^2}\, x' - \frac{1}{t^3}\, x = 0$ es la función $-te^{1/t}$, cuyo desarrollo de Laurent en torno a $t = 0$ tiene infinitos términos negativos.

Para abordar estos problemas se consideran únicamente *puntos singulares regulares*, que son los puntos en los que, a lo sumo, $P(t)$ tiene un polo de orden uno y $Q(t)$ de orden dos. Sin pérdida de generalidad, consideraremos que el punto que estamos tratando es $t_0 = 0$.

Para resolver la ecuación diferencial se emplea el *método de Fröbenius* que consiste en ensayar soluciones del tipo $t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $a_0 \neq 0$; derivaremos formalmente la serie, sustituiremos en la ecuación e igualaremos coeficientes del mismo grado. Como la ecuación diferencial que estamos intentando resolver es de segundo orden, nuestro deseo será encontrar dos soluciones linealmente independientes de la forma anterior. Si denotamos

$$P(t) = t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n, \quad Q(t) = t^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n,$$

al igualar los coeficientes de menor grado aparece la condición $\lambda(\lambda-1) + p_0\lambda + q_0 = 0$, que se denomina *ecuación indicial*.

La importancia de esta ecuación radica en que determina los únicos valores que puede tomar λ para que la serie que estamos ensayando pueda ser realmente una solución de la ecuación diferencial. La ecuación indicial es una ecuación polinómica de segundo grado que tendrá dos raíces que denominamos λ_1 y λ_2. Todo el desarrollo posterior va a depender de estas dos raíces, y el hecho fundamental va a recaer en que su diferencia $\lambda_1 - \lambda_2$ sea o no un entero.

Si denotamos $f(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0$, al ensayar en la ecuación diferencial la posible solución $t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ e igualar coeficientes, además de la ecuación indicial que con esta notación es $f(\lambda) = 0$, obtenemos

$$[FR] \;\equiv\; a_n f(\lambda + n) = -\sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}(\lambda + k) + q_{n-k}]a_k.$$

Es claro ahora que si $f(\lambda + n) \neq 0 \ \forall n > 0$ la relación anterior es una fórmula de recurrencia que nos permitirá determinar todos los coeficientes a_n a partir de $a_0 \neq 0$ cualquiera.

Al menos para una de las raíces de la ecuación indicial, la relación $[FR]$ proporciona un procedimiento para encontrar todos los a_n a partir de a_0; y si $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ el método funciona para las dos raíces. En caso contrario no se garantiza que este método permita encontrar la solución asociada a la menor de las raíces (si $\lambda_2 + n = \lambda_1$, entonces $(\lambda_2 + n) = 0$ y no se puede despejar a_n en $[FR]$).

De todas formas, la parte básica de todo este proceso es la demostración, originalmente debida a Frobënius, de que el método que hemos seguido conduce realmente a series convergentes cuya derivación término a término tiene sentido. Más concretamente, lo que sucede es que si $tP(t)$ y $t^2Q(t)$ son analíticas en la bola de radio $R > 0$, entonces se demuestra que los coeficientes a_n que se obtienen a partir de $[FR]$ (siempre que sea posible) proporcionan una serie con, al menos, el mismo radio de convergencia. Esto prueba que todo el proceso formal tiene sentido luego las series son realmente soluciones.

Una conocida ecuación que se resuelve mediante el método de Frobënius es la de Bessel $t^2x'' + tx' + (t^2 - p^2)x = 0$, donde p es un parámetro real no negativo. Las raíces de su ecuación indicial son p y $-p$. Así, el método de Frobënius permite construir fácilmente la solución para la mayor de las raíces que, con la elección de a_0 adecuada, denotaremos $J_p(t)$ (y se denomina *función de Bessel* de orden p); y también para la menor cuando $2p \notin \mathbb{Z}$, solución que denotamos $J_{-p}(t)$. Si $2p \in \mathbb{Z}$, es decir cuando las dos raíces de la ecuación indicial se diferencian en un entero, el método de Frobënius para $-p$ no tiene por qué funcionar. De hecho funciona cuando p es semientero pero no cuando p es entero.

Asociadas a las funciones de Bessel también se pueden encontrar diversos desarrollos ortogonales. A este respecto, la relación de ortogonalidad más mas conocida es el hecho de que las funciones $\{J_p(\alpha_n t)\}_{n=1}^{\infty}$ (donde $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ son los ceros positivos de $J_p(t)$) son ortogonales en $L^2((0,1), t\,dt)$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] G. Birkhoff y G. C. Rota, *"Ordinary Differential Equations"*, 3^a ed., Wiley and Sons, Nueva York, 1978.

[2] A. Erdélyi y otros, *"Higher Transcendental Functions"*, McGraw-Hill, Nueva York, Vol. I, II, 1953; Vol. III, 1955.

[3] H. Hochstadt, *"Differential Equations. A Modern Approach"*, Dover, Nueva York, 1975.

[4] C. Martínez y M. A. Sanz, *"Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias"*, Reverté, Barcelona, 1991.

[5] E. D. Rainville y P. E. Bedient, *"Ecuaciones Diferenciales"*, 5^a ed., Edit. Interamericana, México, 1977.

[6] G. F. Simmons *"Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas"*, McGraw-Hill, Madrid, 1988.

[7] J. Sotomayor, *"Lições de Equações Diferenciais Ordinárias"*, I.M.P.A., Brasilia, 1979.

[8] G. Szegő, *"Orthogonal polynomials"*, 3^a ed., Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1967.