

TRANSFORMADAS DE DUNKL Y TEOREMAS DE MUESTREO

ÓSCAR CIAURRI Y JUAN LUIS VARONA

Departamento de Matemáticas y Computación,
Universidad de La Rioja,
26004 Logroño, Spain

oscar.ciaurri@unirioja.es, jvarona@unirioja.es

Resumen

La transformada de Dunkl en la recta real es una generalización de la transformada de Fourier, y muchos resultados en los que interviene la de Fourier se pueden adaptar a este nuevo contexto mucho más amplio. En este artículo mostramos un teorema de muestreo relacionado con la transformada de Dunkl; este teorema de muestreo generaliza al clásico de Whittaker-Shannon-Kotel'nikov. Por el camino, hay que construir, sirviéndonos de las funciones de Bessel, un sistema ortogonal que es completo en $L^2((-1, 1), |x|^{2\alpha+1} dx)$. Cuando $\alpha = -1/2$, este nuevo sistema se reduce al clásico sistema trigonométrico (exponencial) que se usa en la definición de las series de Fourier.

Palabras clave: *Teorema de muestreo, WSK, transformada de Dunkl, sistema ortogonal, funciones de Bessel.*

Clasificación por materias AMS: *94A20, 42A38.*

1 Introducción

Comencemos con un tópico (en la acepción española de la palabra) a más no poder: de todos es sabido que el muestreo de señales constituye uno de los más importantes tópicos (con su habitual uso como falso amigo del inglés) de la matemática aplicada. De hecho, los autores hemos contribuido recientemente al tema, aportando nuestro pequeño grano de arena: en [5], hemos demostrado un nuevo teorema de muestreo que generaliza el clásico de Shannon. En ese resultado, la transformada de Fourier se sustituye por una más general, la denominada transformada de Dunkl sobre la recta real; en ella aparece un parámetro α que, en el caso particular $\alpha = -1/2$, da lugar a la transformada de Fourier, y al teorema de muestreo clásico.

La investigación de los autores está subvencionada por el proyecto de la DGI número MTM2006-13000-C03-03.

Nuestro propósito ahora va a ser mostrar estos resultados de una manera divulgativa, sin dar demostraciones rigurosas, que se pueden encontrar en el artículo antes citado. Comenzaremos esta sección introductoria explicando qué son los operadores de Dunkl; un poco más adelante, haremos una breve reseña sobre teoremas de muestreo. En la segunda sección mostraremos un sistema ortogonal (también dependiente de un parámetro α) que generaliza al trigonométrico clásico. Este nuevo sistema jugará un papel clave en la tercera sección: sirviéndonos de él y de la transformada de Dunkl obtendremos nuestro teorema de muestreo.

1.1 Operadores de Dunkl

Los operadores de Dunkl en \mathbb{R}^n son operadores que tienen una parte diferencial y otra en diferencias (lo que en inglés se denomina *differential-difference operators*) asociados a un grupo de reflexión finito; fueron introducidos por Dunkl en 1989, en su artículo [7]. En la recta real, y con el grupo de reflexión \mathbb{Z}_2 , el operador de Dunkl Λ_α se define como

$$\Lambda_\alpha f(x) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{2\alpha + 1}{2} \left(\frac{f(x) - f(-x)}{x} \right).$$

Para $\alpha \geq -1/2$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \Lambda_\alpha f(x) = \lambda f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

tiene una única solución, $E_\alpha(\lambda x)$, dada por

$$E_\alpha(z) = \mathcal{I}_\alpha(z) + \frac{z}{2(\alpha + 1)} \mathcal{I}_{\alpha+1}(z),$$

con

$$\mathcal{I}_\alpha(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \frac{J_\alpha(iz)}{(iz)^\alpha} = \Gamma(\alpha + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n! \Gamma(n + \alpha + 1)}$$

(véase [8] y [12]); como es habitual, estamos usando J_α para denotar la función de Bessel de orden α (un amplio y clásico tratado sobre funciones de Bessel es [22]). La función E_α se denomina núcleo de Dunkl. Cuando $\alpha = -1/2$, se tiene $\Lambda_{-1/2} = d/dx$ y $E_{-1/2}(\lambda x) = e^{\lambda x}$.

De manera similar a la transformada de Fourier (que corresponde al caso $\alpha = -1/2$), podemos definir la transformada de Dunkl sobre la recta real como

$$\mathcal{F}_\alpha(f, y) = \int_{\mathbb{R}} E_\alpha(-ixy) f(x) d\mu_\alpha(x), \quad y \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

donde $d\mu_\alpha$ denota la medida

$$d\mu_\alpha(x) = \frac{1}{2^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} |x|^{2\alpha+1} dx.$$

Por ser $|E_\alpha(ix)| \leq 1$ para cada $x \in \mathbb{R}$, el operador \mathcal{F}_α está bien definido para funciones $f \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$, y

$$\|\mathcal{F}_\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)}.$$

Además, como en la transformada de Fourier, si S es la clase de Schwartz,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha: S &\longrightarrow S \\ f &\longmapsto \mathcal{F}_\alpha f \end{aligned}$$

es un isomorfismo y $\mathcal{F}_\alpha^2 f(x) = f(-x)$. Entonces, del teorema de Fubini se deduce la fórmula de multiplicación

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha(f, x)g(x) d\mu_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha(g, x)f(x) d\mu_\alpha(x), \quad f, g \in S.$$

Tomando $g(x) = \overline{\mathcal{F}_\alpha(f, x)}$ se obtiene

$$\|\mathcal{F}_\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)}, \quad f \in S.$$

Y ahora, por densidad, \mathcal{F}_α se extiende a funciones en $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$.

Realmente, también se puede definir la transformada de Dunkl en $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$ cuando $-1 < \alpha \leq -1/2$, aunque ahora la expresión (2) ya no es siempre válida para funciones en $L^1(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$. Pero esta nueva \mathcal{F}_α sí que conserva las propiedades en $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$; los detalles se pueden ver en [15]. Esto nos permitirá extender nuestro estudio al caso $\alpha > -1$.

En los últimos años ha habido una gran actividad investigadora relacionada con la transformada de Dunkl. Al ser la transformada de Fourier un caso particular suyo, cada problema previamente estudiado para la transformada de Fourier proporciona un nuevo desafío en el contexto de la de Dunkl. Así, por ejemplo, se han obtenido resultados relacionados con multiplicadores ([18, 3]), teoría de Littlewood-Paley ([19]), teoremas de Paley-Wiener ([20, 2]), transplatación ([14]), incertidumbre ([17, 16, 6]), transformadas de Riesz ([21]), así como el teorema de muestreo que nos ocupa ahora ([5]).

1.2 El teorema de muestreo clásico

El teorema de muestreo de Shannon afirma que, si una señal $f(t)$ no tiene frecuencias mayores que w ciclos por segundo, la función f está completamente determinada por sus valores $f(k/(2w))$, y se puede reconstruir mediante la denominada *serie cardinal*:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2w}\right) \frac{\text{sen}(\pi(2wt - k))}{\pi(2wt - k)}. \quad (3)$$

Cuando una señal $f(t)$ no tiene frecuencias mayores que w ciclos por segundo, se dice que es *banda-limitada* al intervalo $(-2\pi w, 2\pi w)$ (el valor $2w$ que nos

aparece aquí se conoce con el nombre de *frecuencia de Nyquist*). Esto es equivalente a decir que su transformada de Fourier F se anula fuera de ese intervalo, y que, por tanto,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2\pi w}^{2\pi w} F(x) e^{ixt} dx.$$

Pensándolo de manera inversa, las funciones f que se pueden obtener de esta forma para alguna F constituyen el denominado *espacio de Paley-Wiener*.

El principio subyacente es que toda la información de una señal banda-limitada está contenida en sus *muestras* $f(k/(2w))$.

Sin preocuparnos de la convergencia de series e integrales, ni del intercambio entre sumatorios e integrales, es fácil dar una demostración informal de este resultado. Para ello, supongamos que $w = 1/2$ (esto no conlleva ninguna pérdida de generalidad, pues es un simple cambio de variable). Así, F está soportada en $[-\pi, \pi]$ y tiene el siguiente desarrollo de Fourier:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(-k) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) e^{-ikx}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{ixt} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(t-k)} dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \frac{\text{sen}(\pi(t-k))}{\pi(t-k)}. \end{aligned}$$

Éste es el teorema de muestreo clásico. Fue Whittaker quien, en 1915, lo mostró por primera vez; posteriormente, fue redescubierto, por separado, por Shannon (en EE.UU.) y Kotel'nikov (en la URSS). En consecuencia, a menudo se conoce como teorema de muestreo de Whittaker-Shannon-Kotel'nikov o, simplemente, WSK. No podemos dejar de destacar que la verdadera importancia de este resultado surgió cuando, alrededor de 1940, Shannon comienza a aplicar el teorema de muestreo a la teoría de comunicación, donde resulta extremadamente útil. Hoy en día, las técnicas de muestreo se aplican para todo tipo de señales; en particular, se usan para tratar digitalmente tanto el sonido como la imagen.

Existen otros teoremas de muestreo; entendemos por esto como la reconstrucción de una función f a partir de sus valores en un conjunto discreto:

$$f(x) = \sum_{n \in \Delta} f(t_n) G(x, t_n),$$

para alguna sucesión $\{t_n\}_{n \in \Delta}$. En algunos contextos, estas series se conocen como *series interpolatorias de tipo Lagrange*.

Usualmente, la herramienta principal para obtener estos resultados es la relación entre una transformada continua y su homóloga discreta. Por ejemplo:

1. Transformada de Fourier/séries de Fourier: el teorema clásico.
2. Transformada de Hankel/séries de Fourier-Bessel: [10].
3. q -transformada de Fourier/ q -séries de Fourier: [11].
4. q -transformada Hankel/ q -séries de Fourier-Bessel: [1].
5. Transformada de Dunkl/séries de Fourier-Dunkl: el que expondremos a continuación.

El lector puede encontrar muchos detalles sobre gran cantidad de teoremas de muestreo en [23]. Y un precioso *survey* sobre el tema es [9].

2 Series de Fourier-Dunkl

Por comodidad, escribamos $E_\alpha(ix)$ mediante

$$E_\alpha(ix) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \left(\frac{J_\alpha(x)}{x^\alpha} + \frac{J_{\alpha+1}(x)}{x^{\alpha+1}} xi \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

(del desarrollo en serie de las funciones de Bessel se sigue de manera inmediata que la parte real de $E_\alpha(ix)$ es una función par; y, la parte imaginaria, una impar). Es bien conocido que la función de Bessel $J_{\alpha+1}(x)$ tiene una sucesión creciente de raíces positivas, $\{s_j\}_{j=1}^\infty$; tomemos, además, $s_{-j} = -s_j$ y $s_0 = 0$. Así, $\{s_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ son las raíces de

$$\text{Im}(E_\alpha(ix)) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \frac{J_{\alpha+1}(x)}{x^{\alpha+1}} x = \frac{x}{2(\alpha + 1)} \mathcal{I}_{\alpha+1}(ix).$$

Con ellas, definamos las funciones

$$e_{\alpha,j}(r) = \frac{2^{\alpha/2} (\Gamma(\alpha + 1))^{1/2}}{|\mathcal{I}_\alpha(is_j)|} E_\alpha(is_j r), \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad r \in (-1, 1),$$

y $e_{\alpha,0}(r) = 2^{(\alpha+1)/2} (\Gamma(\alpha + 2))^{1/2}$.

En el caso $\alpha = -1/2$, esto es el sistema exponencial clásico del que surgen las series de Fourier, es decir, $e_{-1/2,j}(r) = e^{i\pi jr}$.

Nuestro objetivo ahora es probar que $\{e_{\alpha,j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2((-1, 1), d\mu_\alpha)$. Gran parte del trabajo descansa en el siguiente lema:

Lema 1 Sea $\alpha > -1$ y $x, y \in \mathbb{C}$. Entonces, para $x \neq y$,

$$\int_{-1}^1 E_\alpha(ixr) \overline{E_\alpha(iyr)} d\mu_\alpha(r) = \frac{2^{-\alpha-1}}{\Gamma(\alpha + 2)} \frac{x \mathcal{I}_{\alpha+1}(ix) \mathcal{I}_\alpha(iy) - y \mathcal{I}_{\alpha+1}(iy) \mathcal{I}_\alpha(ix)}{x - y}, \quad (4)$$

y , para $x = y$,

$$\int_{-1}^1 |E_\alpha(ixr)|^2 d\mu_\alpha(r) = \frac{2^{-\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+2)} \left(\frac{x^2}{2(\alpha+1)} \mathcal{I}_{\alpha+1}^2(ix) - (2\alpha+1)\mathcal{I}_{\alpha+1}(ix)\mathcal{I}_\alpha(ix) + 2(\alpha+1)\mathcal{I}_\alpha^2(ix) \right). \quad (5)$$

La demostración del lema no es complicada, aunque sí bastante técnica. Con el fin de lograr un artículo lo más autocontenido posible, y puesto que el lema es un ingrediente básico en este artículo, no queremos prescindir de ella. Pero, por otra parte, para hacer más llevadera la narración, la posponemos hasta después del teorema (y el lector puede saltarse esa parte si lo considera oportuno). Así pues, expongamos ya la ortogonalidad buscada:

Teorema 2 *Sea $\alpha > -1$. Entonces, la sucesión de funciones $\{e_{\alpha,j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2((-1,1), d\mu_\alpha)$. En consecuencia, para cada $f \in L^2((-1,1), d\mu_\alpha)$, podemos escribir*

$$f(r) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(f) e_{j,\alpha}(r), \quad a_j(f) = \int_{-1}^1 f(t) \overline{e_{j,\alpha}(t)} d\mu_\alpha(t).$$

Demostración de la ortogonalidad. Si tomamos $x = s_j$ e $y = s_k$ con $j \neq k$, de (4) se sigue que

$$\int_{-1}^1 e_{\alpha,j}(r) \overline{e_{\alpha,k}(r)} d\mu_\alpha(r) = 0.$$

Para $j = k \neq 0$ tenemos

$$\int_{-1}^1 |e_{\alpha,j}(r)|^2 d\mu_\alpha(r) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{\mathcal{I}_\alpha^2(is_j)} \int_{-1}^1 |E_\alpha(is_j r)|^2 d\mu_\alpha(r) = 1,$$

sin más que usar (5). El caso restante $j = k = 0$ es similar, pero teniendo en cuenta que $s_0 = 0$ e $\mathcal{I}_{\alpha+1}(is_0) = 1$. \square

Demostración de la completitud. Supongamos que, para alguna función $\phi \in L^2((-1,1), d\mu_\alpha)$, se cumple

$$\int_{-1}^1 \phi(r) \overline{e_{\alpha,j}(r)} d\mu_\alpha(r) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Descompongamos ϕ en sus partes real e imaginaria, y estas, a su vez, en sus partes par (*even*) e impar (*odd*):

$$\phi(r) = a_e(r) + a_o(r) + i(b_e(r) + b_o(r))$$

(si denotamos $a(r) = \text{Re}(\phi(r))$, basta tomar $a_e(r) = (a(r) + a(-r))/2$ y $a_o(r) = (a(r) - a(-r))/2$; y análogamente con $b(r) = \text{Im}(\phi(r))$). De aquí, obtendríamos

$$\int_0^1 a_o(r) \mathcal{I}_\alpha(is_j r) r^{2\alpha+1} dr = \int_0^1 b_o(r) \mathcal{I}_\alpha(is_j r) r^{2\alpha+1} dr = 0,$$

para $j = 0, 1, \dots$ y

$$\int_0^1 a_e(r)(s_j r) \mathcal{I}_{\alpha+1}(is_j r) r^{2\alpha+1} dr = \int_0^1 b_e(r)(s_j r) \mathcal{I}_{\alpha+1}(is_j r) r^{2\alpha+1} dr = 0,$$

para $j = 1, 2, \dots$

Finalmente, caigamos en la cuenta de que

$$\mathcal{I}_\alpha(is_j r) = c_n \phi_n(r) \quad \text{y} \quad (s_j r) \mathcal{I}_{\alpha+1}(is_j r) = d_n \psi_n(r),$$

donde $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ son sistemas de Dini, ortogonales y completos en $L^2((0, 1), r^{2\alpha+1} dr)$ (véase [22, p. 134]). Así, concluimos que

$$a_e(r) = a_o(r) = b_e(r) = b_o(r) = 0$$

luego $\phi \equiv 0$. □

2.1 Demostración del lema

Comencemos probando (4). Es claro que $\overline{E_\alpha(iyr)} = E_\alpha(-iyr)$. De (1), tenemos

$$E_\alpha(ixr) \Lambda_\alpha E_\alpha(-iyr) = -iy E_\alpha(ixr) E_\alpha(-iyr)$$

(a lo largo de la demostración, las derivadas en Λ_α lo son respecto a r), y la misma igualdad con el par (x, y) cambiado por $(-y, -x)$. Sumando ambas identidades, obtenemos

$$i(x-y) \int_{-1}^1 E_\alpha(ixr) E_\alpha(-iyr) d\mu_\alpha(r) = I(x, y) + I(-y, -x)$$

con

$$I(x, y) = \int_{-1}^1 E_\alpha(-iyr) \Lambda_\alpha E_\alpha(ixr) d\mu_\alpha(r).$$

Si usamos la definición de Λ_α , podemos escribir $I(x, y) = I_1(x, y) + I_2(x, y)$ con

$$I_1(x, y) = \int_{-1}^1 E_\alpha(-iyr) \frac{d}{dr} E_\alpha(ixr) d\mu_\alpha(r)$$

e

$$I_2(x, y) = (2\alpha + 1) \int_{-1}^1 E_\alpha(-iyr) \frac{E_\alpha(ixr) - E_\alpha(-ixr)}{2r} d\mu_\alpha(r).$$

Integrando I_1 por partes, queda

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= \frac{E_\alpha(ix)E_\alpha(-iy) - E_\alpha(-ix)E_\alpha(iy)}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} \\ &\quad - I_1(-y, -x) - (2\alpha + 1) \int_{-1}^1 \frac{E_\alpha(ixr)E_\alpha(-iyr)}{r} d\mu_\alpha(r), \end{aligned}$$

y por tanto

$$I(x, y) = \frac{E_\alpha(ix)E_\alpha(-iy) - E_\alpha(-ix)E_\alpha(iy)}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} \\ - I_1(-y, -x) - (2\alpha+1) \int_{-1}^1 E_\alpha(-iyr) \frac{E_\alpha(ixr) + E_\alpha(-ixr)}{2r} d\mu_\alpha(r).$$

En consecuencia,

$$I(x, y) + I(-y, -x) = \frac{E_\alpha(ix)E_\alpha(-iy) - E_\alpha(-ix)E_\alpha(iy)}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} \\ - (2\alpha+1) \int_{-1}^1 E_\alpha(-iyr) \frac{E_\alpha(ixr) + E_\alpha(-ixr)}{2r} d\mu_\alpha(r) + I_2(-y, -x) \\ = \frac{E_\alpha(ix)E_\alpha(-iy) - E_\alpha(-ix)E_\alpha(iy)}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} \\ - (2\alpha+1) \int_{-1}^1 \frac{E_\alpha(ixr)E_\alpha(iyr) + E_\alpha(-ixr)E_\alpha(-iyr)}{2r} d\mu_\alpha(r) \\ = \frac{E_\alpha(ix)E_\alpha(-iy) - E_\alpha(-ix)E_\alpha(iy)}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)},$$

donde en el último paso hemos usado que $\frac{E_\alpha(ixr)E_\alpha(iyr) + E_\alpha(-ixr)E_\alpha(-iyr)}{2r}$ es una función impar. Así, hemos mostrado que

$$\int_{-1}^1 E_\alpha(ixr) \overline{E_\alpha(iyr)} d\mu_\alpha(r) = \frac{1}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} \frac{E_\alpha(ix)E_\alpha(-iy) - E_\alpha(-ix)E_\alpha(iy)}{i(x-y)}.$$

Ahora, usando $E_\alpha(-ix)E_\alpha(iy) = \overline{E_\alpha(ix)} \overline{E_\alpha(-iy)}$ y que, para $a, b \in \mathbb{C}$, $ab - \bar{a}\bar{b} = 2i \operatorname{Im}(ab) = 2i(\operatorname{Re}(a) \operatorname{Im}(b) + \operatorname{Im}(a) \operatorname{Re}(b))$, aparece (4).

Para probar (5) basta con evaluar

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+2)} \frac{x\mathcal{I}_{\alpha+1}(ix)\mathcal{I}_\alpha(iy) - y\mathcal{I}_{\alpha+1}(iy)\mathcal{I}_\alpha(ix)}{x-y}.$$

Esto se consigue sin más que usar la regla de L'Hopital y las identidades

$$\frac{d\mathcal{I}_\alpha(iy)}{dy} = -\frac{y}{2(\alpha+1)} \mathcal{I}_{\alpha+1}(iy)$$

e

$$\mathcal{I}_{\alpha+2}(ix) = \frac{4(\alpha+1)(\alpha+2)}{x^2} (\mathcal{I}_{\alpha+1}(ix) - \mathcal{I}_\alpha(ix)),$$

con lo que concluye la demostración del lema.

3 El teorema de muestreo

Tal como se hace habitualmente en teoría de muestreo, tomamos el **espacio de tipo Paley-Wiener** que, en nuestro caso, se define como

$$PW_\alpha = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha) : f(x) = \int_{-1}^1 u(y) E_\alpha(ixy) d\mu_\alpha(y), \right. \\ \left. u \in L^2((-1, 1), d\mu_\alpha) \right\},$$

con la norma de $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$. Con esto, ya estamos en condiciones de establecer el teorema de muestreo:

Teorema 3 *Si $f \in PW_\alpha$, $\alpha > -1$, entonces f tiene la representación*

$$f(x) = f(s_0) \mathcal{I}_{\alpha+1}(ix) + \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} f(s_j) \frac{x \mathcal{I}_{\alpha+1}(ix)}{2(\alpha+1) \mathcal{I}_\alpha(is_j)(x-s_j)},$$

que converge en la norma de $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$. Además, la convergencia de la serie es uniforme en subconjuntos compactos de \mathbb{R} .

Antes de abordar su demostración, merece la pena que hagamos un par de comentarios.

En primer lugar, destaquemos que el caso $\alpha = -1/2$ da lugar al teorema WSK clásico. En efecto, no hay más que tener en cuenta que $J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \cos(x)$, $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \sin(x)$ y que los s_j son, ahora, $s_j = \pi j$. Con esto, obtener la fórmula clásica (3) (con frecuencia de Nyquist $2w = 1/\pi$) a partir de la del teorema 3 es un mero trámite.

En segundo lugar, también es fácil comprobar que, para funciones pares, el resultado se convierte en el teorema de Higgins ([10]) para el par transformada de Hankel/series de Fourier-Bessel antes citado.

3.1 Una demostración informal

Una demostración rigurosa, que además muestre la convergencia uniforme en subconjuntos compactos a la que alude el teorema, requeriría algo más de trabajo. Lo habitual en estos casos es recurrir al contexto de núcleos reproductores (siguiendo las técnicas que se detallan, por ejemplo, en [10] o [13]), que aquí no vamos a explicar. En todo caso, la demostración completa del teorema se puede consultar en [5].

Para $f \in PW_\alpha$, consideremos su correspondiente función $u \in$

$L^2((-1, 1), d\mu_\alpha)$ y tomemos su desarrollo de Fourier-Dunkl:

$$\begin{aligned}
u(y) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(u) e_{\alpha,j}(y) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 u(t) \overline{e_{\alpha,j}}(t) d\mu_\alpha(t) \right) e_{\alpha,j}(y) \\
&= 2^{\alpha/2} (\Gamma(\alpha+1))^{1/2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{e_{\alpha,j}(y)}{|\mathcal{I}_\alpha(is_j)|} \int_{-1}^1 u(t) \overline{E_\alpha(is_j t)} d\mu_\alpha(t) \\
&= 2^{\alpha/2} (\Gamma(\alpha+1))^{1/2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{e_{\alpha,j}(y)}{|\mathcal{I}_\alpha(is_j)|} \int_{-1}^1 u(t) E_\alpha(-is_j t) d\mu_\alpha(t) \\
&= 2^{\alpha/2} (\Gamma(\alpha+1))^{1/2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{e_{\alpha,j}(y)}{|\mathcal{I}_\alpha(is_j)|} f(-s_j) \\
&= 2^{\alpha/2} (\Gamma(\alpha+1))^{1/2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\overline{e_{\alpha,j}}(y)}{|\mathcal{I}_\alpha(is_j)|} f(s_j).
\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-1}^1 u(y) E_\alpha(ixy) d\mu_\alpha(y) \\
&= 2^{\alpha/2} (\Gamma(\alpha+1))^{1/2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{f(s_j)}{|\mathcal{I}_\alpha(is_j)|} \int_{-1}^1 E_\alpha(ixy) \overline{e_{\alpha,j}}(y) d\mu_\alpha(y) \\
&= 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{f(s_j)}{(\mathcal{I}_\alpha(is_j))^2} \int_{-1}^1 E_\alpha(ixy) E_\alpha(-is_j y) d\mu_\alpha(y) \\
&= f(s_0) \mathcal{I}_{\alpha+1}(ix) + \frac{1}{2(\alpha+1)} \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} f(s_j) \frac{x \mathcal{I}_{\alpha+1}(ix)}{\mathcal{I}_\alpha(is_j)(x-s_j)},
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

3.2 Un ejemplo

Para $\alpha, \beta, \alpha + \beta > -1$, se cumple

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{J_{\alpha+\beta+2n+1}(t)}{t^{\alpha+\beta+1}} \frac{J_\alpha(xt)}{(xt)^\alpha} t^{2\alpha+1} dt \\
&= \frac{\Gamma(n+1)}{2^\beta \Gamma(\beta+n+1)} (1-x^2)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x^2) \chi_{[0,1]}(x), \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

donde $P_n^{(\alpha,\beta)}$ denota el n -ésimo polinomio de Jacobi de orden (α, β) , y $\chi_{[0,1]}$ es la función característica del intervalo $[0, 1]$ (véase [4]). A partir de esta expresión,

se sigue fácilmente que

$$x^{2n} E_{\alpha+\beta+2n+1}(ix) \in PW_{\alpha}.$$

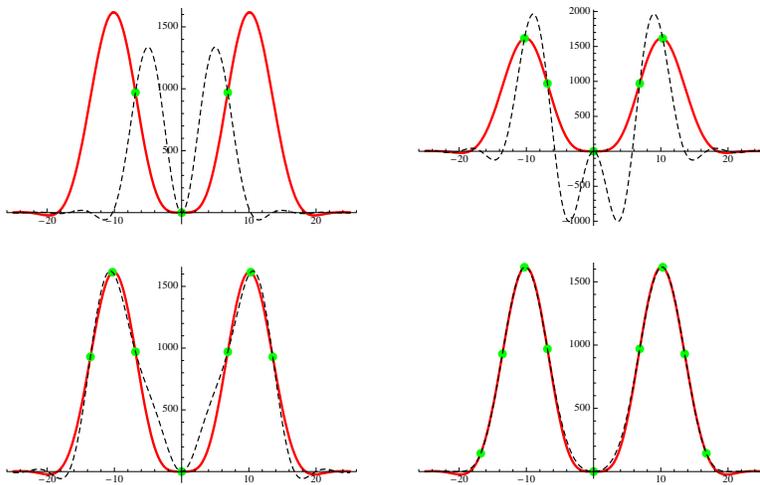
Entonces, aplicando el teorema de muestreo,

$$x^{2n} E_{\alpha+\beta+2n+1}(ix) = \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} s_j^{2n} E_{\alpha+\beta+2n+1}(is_j) \frac{x \mathcal{I}_{\alpha+1}(ix)}{2(\alpha+1) \mathcal{I}_{\alpha}(is_j)(x-s_j)},$$

válido para $\alpha, \beta, \alpha + \beta > -1$, y $n = 1, 2, \dots$. Y, para $n = 0$,

$$E_{\alpha+\beta+1}(ix) = \mathcal{I}_{\alpha+1}(ix) + \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} E_{\alpha+\beta+1}(is_j) \frac{x \mathcal{I}_{\alpha+1}(ix)}{2(\alpha+1) \mathcal{I}_{\alpha}(is_j)(x-s_j)}.$$

Tomando $f(x) = x^{2n} E_{\alpha+\beta+2n+1}(ix)$ con $\alpha = 2.4$, $\beta = 7.2$ y $n = 2$, presentamos varios gráficos en los que representamos f (con trazo grueso), los puntos de muestreo, y (con líneas discontinuas) las sumas parciales $\sum_{j=-k}^k$ de la fórmula que recupera f , con $k = 1, 2, 3$ y 4 , respectivamente:



Los figuras muestran que la serie truncada en seguida proporciona muy buenas aproximaciones.

Agradecimientos

Deseamos agradecer a Renato Álvarez Nodarse su invitación para impartir una charla en la sesión especial «Approximation theory and special functions with applications» del CEDYA-2007 en Sevilla, fruto de la cual son estas notas. Asimismo, le agradecemos el interés que se ha tomado en revisarlas.

Referencias

- [1] L. D. Abreu, A q -sampling theorem related to the q -Hankel transform, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), 1197–1203.
- [2] N. B. Andersen y M. de Jeu, Elementary proofs of Paley-Wiener theorems for the Dunkl transform on the real line, *Int. Math. Res. Not.* **30** (2005), 1817–1831.
- [3] J. Betancor, Ó. Ciaurri y J. L. Varona, The multiplier of the interval $[-1, 1]$ for the Dunkl transform on the real line, *J. Funct. Anal.* **242** (2007), 327–336.
- [4] Ó. Ciaurri, J. J. Guadalupe, M. Pérez y J. L. Varona, Mean and almost everywhere convergence of Fourier-Neumann series, *J. Math. Anal. Appl.* **236** (1999), 125–147.
- [5] Ó. Ciaurri y J. L. Varona, A Whittaker-Shannon-Kotel'nikov sampling theorem related to the Dunkl transform, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), 2939–2947.
- [6] Ó. Ciaurri y J. L. Varona, An uncertainty inequality for Fourier-Dunkl series, prepublicación.
- [7] C. F. Dunkl, Differential-difference operators associated with reflections groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **311** (1989), 167–183.
- [8] C. F. Dunkl, Integral kernels with reflections group invariance, *Canad. J. Math.* **43** (1991), 1213–1227.
- [9] A. G. García, Orthogonal sampling formulas: a unified approach, *SIAM Rev.* **42** (2000), 499–512.
- [10] J. R. Higgins, An interpolation series associated with the Bessel-Hankel transform, *J. Lond. Math. Soc.* **5** (1972), 707–714.
- [11] M. E. Ismail y A. I. Zayed, A q -analogue of the Whittaker-Shannon-Kotel'nikov sampling theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), 3711–3719.
- [12] M. F. E. de Jeu, The Dunkl transform, *Invent. Math.* **113** (1993), 147–162.
- [13] L. Máté, “Hilbert space methods in science and engineering”, Adam Hilger, Bristol, 1989.
- [14] A. Nowak y K. Stempak, Relating transplantation and multipliers for Dunkl and Hankel transforms, *Math. Nachr.* (en prensa). Prepublicación disponible en <http://www.im.pwr.wroc.pl/~anowak/research.html>
- [15] M. Rosenblum, Generalized Hermite polynomials and the Bose-like oscillator calculus, *Oper. Theory Adv. Appl.* **73** (1994), 369–396.

- [16] M. Rösler, An uncertainty principle for the Dunkl transform, *Bull. Austral. Math. Soc.* **59** (1999), 353–360.
- [17] M. Rösler y M. Voit, An uncertainty principle for Hankel transforms, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), 183–194.
- [18] F. Soltani, L^p -Fourier multipliers for the Dunkl operator on the real line, *J. Funct. Anal.* **209** (2004), 16–35. Corrigendum, *J. Funct. Anal.* **242** (2007), 672–673.
- [19] F. Soltani, Littlewood-Paley operators associated with the Dunkl operator on \mathbb{R} , *J. Funct. Anal.* **221** (2005), 205–225.
- [20] K. Trimèche, Paley-Wiener theorems for the Dunkl transform and Dunkl translation operators, *Integral Transforms Spec. Funct.* **13** (2002), 17–38.
- [21] S. Thangavelu y Y. Xu, Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform, *J. Comput. Appl. Math.* **199** (2007), 181–195.
- [22] G. N. Watson, “A treatise on the theory of Bessel functions”, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
- [23] A. I. Zayed, “Advances in Shannon’s sampling theory”, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.