ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA EN MEDIA DE LAS SERIES DE FOURIER DE LOS SISTEMAS DE BESSEL Y DINI MEDIANTE TEORÍA A_p

Juan Luis Varona Malumbres

Abstract

By means of A_p theory we obtain conditions that imply the uniform boundedness between L^p type spaces of partial sums of Bessel and Dini series with order greater than $-1/2$.

Clasificación A.M.S. (1980): 42C15, 42A50.

Sea $J_\alpha(x)$ la función de Bessel de orden $\alpha > -1$. Es bien conocido (ver por ejemplo el tratado de Watson [4]), que $J_\alpha(x)$ tiene un conjunto numerable de ceros en $(0,\infty)$, todos ellos simples y cuyo único punto de acumulación es ∞. Sean $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ estos ceros ordenados en sentido creciente. Entonces, se cumple

$$\int_0^1 J_\alpha(\alpha_n x) J_\alpha(\alpha_m x) x\,dx = \frac{\delta_{nm} J_{\alpha+1}(\alpha_n)^2}{2},$$

luego $\{J_\alpha(\alpha_n x)\}_{n=1}^\infty$ forma un sistema ortogonal en $L^2((0,1), x\,dx)$ que, además, es completo. Sean

$$S_n(f,x) = \sum_{k=1}^n c_k J_\alpha(\alpha_k x), \quad c_k = c_k(f) = \frac{2}{J_{\alpha+1}(\alpha_k)^2} \int_0^1 J_\alpha(\alpha_k y) f(y) y\,dy$$

las sumas parciales de su serie de Fourier.

Dado $p \in (1,\infty)$ y dos pesos $U(x)$ y $V(x)$ en $(0,1)$ ($U(x) \le CV(x)$) estudiaremos, utilizando teoría A_p de pesos, cuándo los operadores

$$\begin{aligned} S_n : L^p((0,1), V(x)^p x\,dx) &\longrightarrow L^p((0,1), U(x)^p x\,dx) \\ f &\longmapsto S_n f \end{aligned} \tag{1}$$

Este artículo se presentó en las *XIII Jornadas Hispano Lusas de Matemáticas*, Universidad de Valladolid (Valladolid, 1988). Contrariamente a lo anunciado —y dado el tiempo ya transcurrido— parece claro que no va a haber nunca actas de dicho congreso. Así, éste es un manuscrito sin publicar; no obstante, una versión ampliada puede encontrarse en el artículo J. J. Guadalupe, M. Pérez, F. J. Ruiz y J. L. Varona, Mean and weak convergence of Fourier-Bessel series, *J. Math. Anal. Appl.* **173** (1993), 370–389.

son uniformemente acotados (a partir de ahora todos los espacios L^p que consideremos serán sobre el intervalo $(0,1)$ aunque no lo indiquemos). Esto, junto con los adecuados resultados de densidad de los que aquí no nos preocuparemos se traduce en la convergencia en $L^p(U(x)^p x\,dx)$ de $S_n f$ a f para cada $f \in L^p(V(x)^p x\,dx)$. Usaremos q para designar al conjugado de p, es decir, p y q deben cumplir la relación $1/p + 1/q = 1$.

Utilizando las conocidas estimaciones de las funciones de Bessel

$$J_\alpha(z) = O(z^\alpha), \quad z \to 0, \qquad \text{y} \qquad J_\alpha(z) = O(z^{-1/2}), \quad z \to \infty,$$

es claro que cuando $\alpha \geq -1/2$ existe C tal que

$$|J_\alpha(z)| \leq C z^{-1/2}, \qquad z \in (0,\infty), \tag{2}$$

acotación independiente de α y que será muy útil para nuestros propósitos.

Como

$$S_n(f,x) = \int_0^1 K_n(x,y) f(y) y\,dy, \qquad K_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2 J_\alpha(\alpha_k x) J_\alpha(\alpha_k y)}{J_{\alpha+1}(\alpha_k)^2},$$

para estudiar la acotación uniforme tendremos que utilizar expresiones adecuadas de los núcleos $K_n(x,y)$. Wing (ver [5]) demuestra que, cuando $\alpha \geq -1/2$,

$$K_n(x,y) = F(M_n,x,y) + F(M_n,y,x) + G(M_n,x,y) + G(M_n,y,x) + O(1)(xy)^\alpha + \frac{O(1)(xy)^{-1/2}}{2-x-y}$$

donde $M_n = \dfrac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2}$,

$$F(M_n,x,y) = J_\alpha(M_n x) J_{\alpha+1}(M_n y) \frac{M_n}{2(y-x)},$$
$$G(M_n,x,y) = J_\alpha(M_n x) J_{\alpha+1}(M_n y) \frac{M_n}{2(x+y)}$$

y las $O(1)$ son acotadas independientemente de $x, y \in (0,1)$ y $n \geq 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|S_n(f,x)| &= \left| \int_0^1 K_n(x,y) f(y) y\,dy \right| \\
&\leq \left| \int_0^1 F(M_n,x,y) f(y) y\,dy \right| + \left| \int_0^1 F(M_n,y,x) f(y) y\,dy \right| \\
&\quad + \left| \int_0^1 G(M_n,x,y) f(y) y\,dy \right| + \left| \int_0^1 G(M_n,y,x) f(y) y\,dy \right| \\
&\quad + C \int_0^1 (xy)^\alpha |f(y)| y\,dy + C \int_0^1 \frac{(xy)^{-1/2}}{2-x-y} |f(y)| y\,dy \\
&= \sum_{i=1}^{4} |W_{i,n}(f,x)| + C W_5(f,x) + C W_6(f,x)
\end{aligned}$$

respectivamente. De aquí que para que se verifique la acotación uniforme de los operadores (1) bastará comprobar

$$\int_0^1 |W_{i,n}(f,x)U(x)|^p x\,dx \le C \int_0^1 |f(x)V(x)|^p x\,dx, \qquad i=1,2,3,4 \tag{3}$$

y

$$\int_0^1 |W_i(f,x)U(x)|^p x\,dx \le C \int_0^1 |f(x)V(x)|^p x\,dx, \qquad i=5,6. \tag{4}$$

En las expresiones anteriores aparecen no sólo transformadas de Hilbert

$$H(f,x) = \text{v.p.} \int_0^1 \frac{f(y)}{x-y}\,dy$$

(a partir de ahora, no indicaremos el v.p.) sino también operadores del tipo

$$J(f,x) = \int_0^1 \frac{f(y)}{2-x-y}\,dy \qquad \text{y} \qquad J'(f,x) = \int_0^1 \frac{f(y)}{x+y}\,dy,$$

pero es fácil ver que cuando la transformada de Hilbert H es acotada también lo son J y J'.

Para estudiar la acotación de la transformada de Hilbert emplearemos la teoría A_p de pesos, desarrollada fundamentalmente por Muckenhoupt, Hunt y Wheeden ([2] y [3]). Un par de pesos (u,v) definidos en el intervalo $(0,1)$ se dice que están en $A_p(0,1)$ si existe una constante C independiente de $I \subseteq (0,1)$ intervalo tal que

$$\left(\int_I u(x)\,dx\right)\left(\int_I v(x)^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} \le C|I|^p,$$

donde $|I|$ denota la longitud del intervalo I. Por comodidad, utilizaremos sólo A_p para designar $A_p(0,1)$. Tomando $I=(0,1)$ es claro que $(u,v)\in A_p$ implica que u y $v^{-1/(p-1)}$ son integrables.

El ejemplo que más usaremos de pesos A_p es el siguiente:

$$(x^r, x^R) \in A_p \iff r > -1,\ R \le r \text{ y } R < p-1, \tag{5}$$

cuya demostración puede hacerse fácilmente de modo directo.

La importancia de la teoría A_p de pesos radica en que para que la transformada de Hilbert $H : L^p(v) \longrightarrow L^p(u)$ sea acotada es condición necesaria que $(u,v)\in A_p$ y condición suficiente que exista $\delta > 1$ tal que $(u^\delta, v^\delta) \in A_p$ (esto último se denota simplemente $(u,v)\in A_p^\delta$). Cuando $u = v$ la condición $(u,v)\in A_p$ es equivalente a que H sea acotada.

Lema. *Bajo las condiciones*

$$\int_0^1 U(x)^p x^{\alpha p+1}\,dx < \infty \qquad y \qquad \int_0^1 V(x)^{-q} x^{\alpha q+1}\,dx < \infty$$

existe $c_n(f)$ para cada $f \in L^p(V(x)^p x\,dx)$ y cada $n \ge 1$ y además $S_n f \in L^p(U(x)^p x\,dx)$. En esas mismas condiciones, el operador W_5 de (4) es acotado de $L^p(V(x)^p x\,dx)$ en $L^p(U(x)^p x\,dx)$.

Demostración. Usando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}\frac{J_{\alpha+1}(\alpha_n)^2}{2}|c_n(f)| &= \left|\int_0^1 f(y)J_\alpha(\alpha_n y)y\,dy\right| \\ &\le \left(\int_0^1 |f(y)|^p V(y)^p y\,dy\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |J_\alpha(\alpha_n y)|^q V(y)^{-q} y\,dy\right)^{1/q},\end{aligned}$$

y la última integral es finita para cada n por (2). Para ver ahora que $S_n f \in L^p(U(x)^p x\,dx)$, basta comprobar que $J_n(\alpha_n x) \in L^p(U(x)^p x\,dx)$ para cada n, lo cual es de nuevo inmediato por (2).
Comprobemos ahora la acotación de W_5. Por la desigualdad de Hölder, es claro que

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |W_5(f,x)U(x)|^p x\,dx \\ &\le \left(\int_0^1 U(x)^p x^{\alpha p+1}\,dx\right)\left(\int_0^1 V(y)^{-q}y^{\alpha q+1}\,dy\right)^{p/q}\left(\int_0^1 |f(y)V(y))|^p y\,dy\right)\end{aligned}$$

y como por hipótesis los dos primeros factores son finitos, W_5 es acotado. $\square$

A continuación, veamos el resultado principal:

Teorema. *Sea $\alpha \ge -1/2$ y $1 < p < \infty$. Si se verifica*

$$(U(x)^p x^{1-p/2}, V(x)^p x^{1-p/2}) \in A_p^\delta \quad \textit{para algún} \quad \delta > 1 \tag{6}$$

(basta $\delta = 1$ si $U = V$) entonces los operadores de (1) *son uniformemente acotados.*

Demostración. Hay que comprobar que los operadores de (3) y (4) son uniformemente acotados.
$i = 1$) Sirviéndonos de (2) y (6) tenemos

$$\begin{aligned}&\int_0^1 |W_{1,n}(f,x)U(x)|^p x\,dx \\ &= \int_0^1 \left|\int_0^1 \frac{f(y)M_n^{1/2}J_{\alpha+1}(yM_n)}{x-y}\,y\,dy\right|^p |(xM_n)^{1/2}J_\alpha(xM_n)|^p U(x)^p x^{1-p/2}\,dx \\ &\le C\int_0^1 \left|\int_0^1 \frac{f(y)y^{1/2}(yM_n)^{1/2}J_{\alpha+1}(yM_n)}{x-y}\,dy\right|^p U(x)^p x^{1-p/2}\,dx \\ &\le C_1\int_0^1 |f(x)x^{1/2}(xM_n)^{1/2}J_{\alpha+1}(xM_n)|^p V(x)^p x^{1-p/2}\,dx \\ &\le C_2\int_0^1 |f(x)V(x)|^p x\,dx.\end{aligned}$$

$i = 2$) Es exactamente igual que $i = 1$ ya que las cotas de (2) para J_α y $J_{\alpha+1}$ son las mismas.
$i = 3$ e $i = 4$) Análogos a los anteriores, pero utilizando la acotación de J' en lugar de la de H.

$i = 5$) Aplicar que u y $v^{-1/(p-1)}$ son integrables cuando $(u,v) \in A_p$ y el lema anterior.
$i = 6$) Queremos comprobar que

$$\int_0^1 |W_6(f,x)U(x)|^p x\,dx = \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{|f(y)|y^{1/2}}{2-x-y}\,dy \right|^p U(x)^p x^{1-p/2}\,dx$$
$$\leq C \int_0^1 |f(x)x^{1/2}|^p V(x)^p x^{1-p/2}\,dx.$$

Y esto, si llamamos $g(y) = |f(y)|y^{1/2}$, es lo mismo que demostrar que el operador $J(g,x)$ es acotado con sus correspondientes pesos, lo cual es cierto por (6). □

Corolario. *Sean $\alpha \geq -1/2$, $1 < p < \infty$ y los pesos*

$$U(x) = x^a(1-x)^b \prod_{k=1}^m |x-x_k|^{b_k}, \quad V(x) = x^A(1-x)^B \prod_{k=1}^m |x-x_k|^{B_k}$$

($0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m < 1$). Si se verifica

$$\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{a}{4} + \frac{A}{4} \right| < \frac{1}{4} + \frac{a-A}{4}, \qquad A \leq a,$$
$$pb > -1, \quad B \leq b, \quad pB < p-1,$$
$$pb_k > -1, \quad B_k \leq b_k, \quad pB_k < p-1 \quad (1 \leq k \leq m)$$

entonces los operadores de (1) son uniformemente acotados.

Demostración. Se demuestra que la condición A_p de (6) puede estudiarse por factores y por tanto basta que exista $\delta > 1$ para el cual los pares de pesos

$$(x^{ap+1-p/2}, x^{Ap+1-p/2}), \qquad ((1-x)^{bp}, (1-x)^{Bp})$$

y

$$\left(|x-x_k|^{pb_k}, |x-x_k|^{pB_k}\right) \quad (1 \leq k \leq m)$$

estén en A_p^δ. Empecemos con el primero de los tres. Por (5), es equivalente a

$$\delta(ap+1-p/2) > -1, \quad \delta(Ap+1-p/2) \leq \delta(ap+1-p/2)$$

y

$$\delta(Ap+1-p/2) < p-1.$$

Pero como la primera y la última de las desigualdades anteriores son estrictas, es lo mismo que decir $p(1-2a) < 4$, $A \leq a$ y $p(3-2A) > 4$. Y basta dividir por $4p$ para darse cuenta de que

$$p(1-2a) < 4 < p(3-2A)$$
$$\iff -1/4 - a/4 + A/4 < 1/p + a/4 + A/4 - 1/2 < 1/4 - A/4 + a/4.$$

Por último, un sencillo cambio de variable a partir de (5) muestra que la segunda condición A_p es equivalente a $pb > -1$, $B \leq b$, $pB < p-1$, y la tercera a $pb_k > -1$, $B_k \leq b_k$, $pB_k < p-1$ $(1 \leq k \leq m)$. □

Si en el corolario anterior tomamos $U(x) = V(x) = 1$ aparece $4/3 < p < 4$ y si tomamos $U(x) = V(x) = x^{1/2-1/p}$ obtenemos $1 < p < \infty$, resultados ambos ambos ya conocidos y debidos a Wing [5]. Por último, haciendo $U(x) = V(x) = x^a$ se sigue el resultado de Benedek-Panzone [1].

Por último, simplemente citar que si denotamos $\overline{S}_n$ a las sumas parciales de la serie de Fourier del sistema de Dini, que también es ortogonal en $L^2((0,1), x\,dx)$ (ver Watson [4]), y llamamos $\overline{K}_n(x,y)$ a los núcleos, utilizando que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $N = N(n)$ tal que

$$\left|K_N(x,y) - \overline{K}_n(x,y)\right| \le C\,\frac{x^{-1/2}y^{-1/2}}{2-x-y}$$

(ver Wing [5]), se obtiene como consecuencia inmediata que la condición (6) también es suficiente para que los operadores $\overline{S}_n$ sean uniformemente acotados como en (1).

Bibliografía

[1] A. Benedek y R. Panzone, Mean convergence of series of Bessel functions, *Rev. Un. Mat. Arg.* **26** (1972), 42–61.

[2] R. A. Hunt, B. Muckenhoupt y R. L. Wheeden, Weighted norm inequalities for the conjugate function and the Hilbert transform, *Trans. Amer. Math. Soc.* **176** (1973), 227–251.

[3] B. Muckenhoupt y R. L. Wheeden, Two weight function norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function and the Hilbert transform, *Studia Math.* **55** (1976), 279–295.

[4] G. N. Watson, “A treatise on the theory of Bessel functions”, Cambridge, 1944.

[5] G. M. Wing, The mean convergence of orthogonal series, *Amer. J. Math.* **72** (1950), 792–808.

Juan Luis Varona Malumbres
Departamento de Matemáticas
Colegio Universitario de La Rioja
26001 Logroño, ESPAÑA